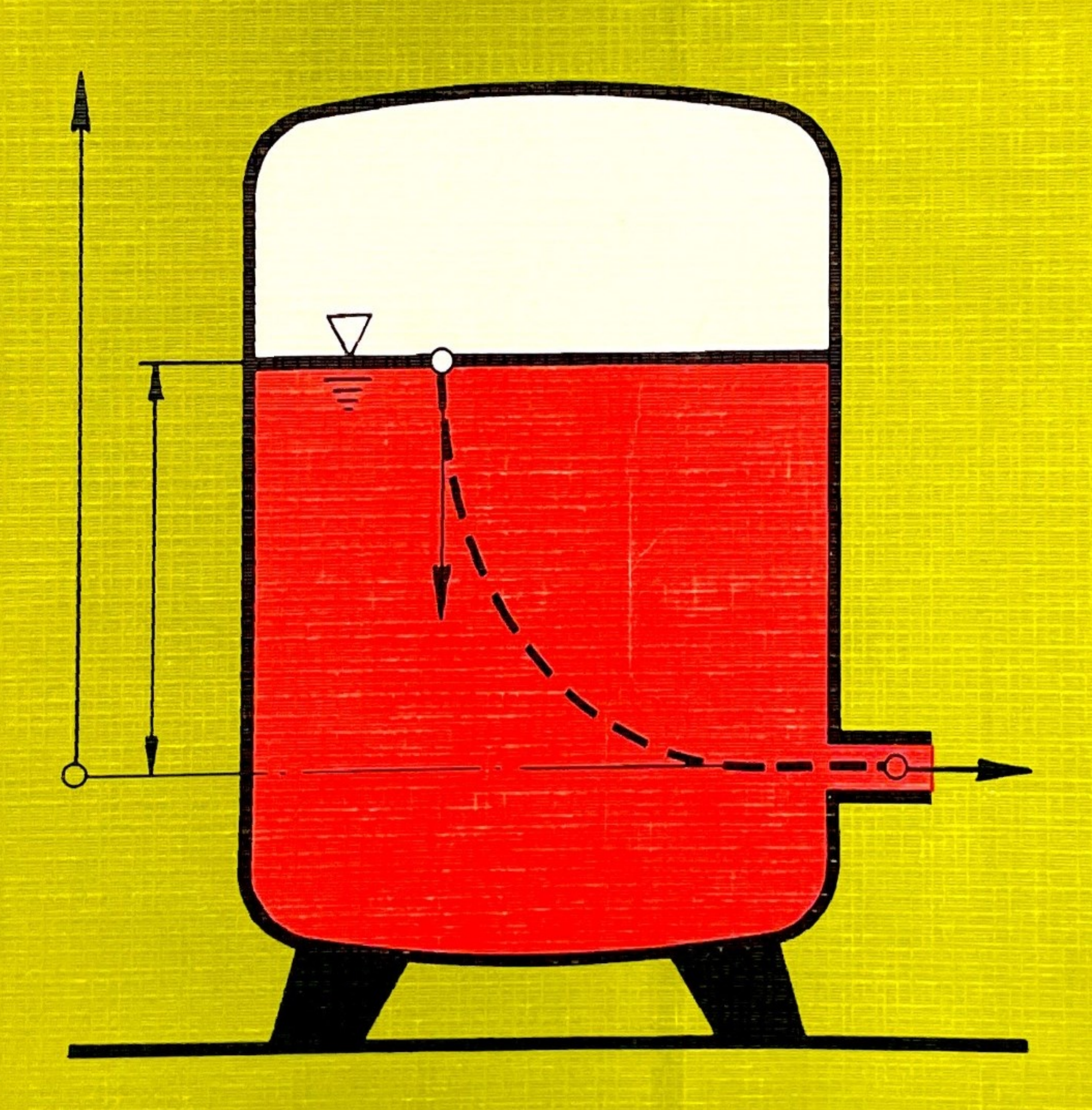
Fluidmechanik

in Theorie und Praxis

RITTER/TASCA



PHYSIK IN BEISPIELEN

Fluidmechanik
in Theorie und Praxis

Fluidmechanik in Theorie und Praxis

von Prof. Dipl.-Ing. Rolf Ritter und Dr. Dan Joan Tasca

Mit 174 durchgerechneten Beispielen

und 173 Aufgaben mit Lösungen

1979

VERLAG HARRI DEUTSCH

THUN · FRANKFURT/MAIN

ISBN 3-87144-515-0

Herstellung: Fuldaer Verlagsanstalt GmbH, Fulda
Printed in Germany

V O R W O R T

Langjährige Lehrerfahrung veranlaßte die Verfasser,das Angebot an Theoriebüchern,Beispiel- und Aufgabensammlungen über Fluidmechanik (Hydro- und Aerostatik,Hydrodynamik,Gasdynamik) durch folgende Konzeption der Stoffdarbietung zu ergänzen:

- Den einzelnen Stoffbereichen wird jeweils ein kurzgefaßter,aber in seinen Ableitungen vollständiger Theorieblock vorangestellt.
- Die Lösungswege sind ausführlich gehalten;sie enthalten auch notwendige physikalische Erklärungen.
- Mathematische Begriffe der Fluidmechanik werden dem Leser dadurch verdeutlicht,daß der diesbezügliche physikalische Hintergrund besonders hervorgehoben wird.

Mit diesem Buch wird der Zweck verfolgt,eine praxisbezogene Einführung in die Fluidmechanik zu geben.Die sogenannte Praxisbezogenheit soll aber nicht mißverstanden werden,daß den Leser etwa rezeptartig zurechtgeschnittene oder katalogisierte Anwendungsbeispiele erwarten.Im Gegenteil.Die Verfasser sehen ihre Aufgabe darin,dem Leser vor allen Dingen theoretisches Handwerkszeug zu liefern,das ihn befähigt,mutig und selbständig Problemlösungen jedweder Art anzusteuern.
Man muß in der Technik vielfach auf exakte,mathematische Lösungen verzichten,weil beispielsweise Randbedingungen fehlen oder noch kein zufriedenstellendes,mathematisches Beschreibungsmodell existiert.Man muß sich also mit einem Kompromiß,einer Näherungslösung begnügen.Das wiederum verlangt vom Bearbeiter ein breitgefächertes Grundlagenwissen.
Nachdem im Verlaufe eines Studiums physikalische und mathematische Grundlagen beschafft worden sind,soll hiermit gezeigt werden,wie sie in der angewandten Fluidmechanik Verwendung finden. - Aus didaktischen Gründen steht das vollständig durchgerechnete Beispiel im Mittelpunkt der Stoffdarbietung.Es möge sich dabei um numerische oder allgemeine Beispiele handeln,um immer wieder das Arbeiten mit ein paar wenigen Grundlagen vor Augen zu führen.
Das Buch gliedert sich in vier Hauptteile: Fluidspezifische

Grundlagen,Fluidstatik,Fluiddynamik und Gasdynamik.
Im ersten Hauptteil wird das Stoffgebiet der Fluidmechanik abgegrenzt.Weiter werden physikalische Eigenschaften der Fluide zusammengestellt,damit das Verhalten der Fluide (Flüssigkeiten und Gase) verständlich wird.
Der Fluidstatik (Hydro- und Aerostatik) ist ein verhältnismässig breiter Raum gewidmet.Das erklärt sich einerseits damit, daß sich das Mechanik-Verständnis der Fluidmechanik hierdurch besonders gut vermitteln läßt.Gleichzeitig wird das Gleichgewichts- und Bilanzdenken vorteilhafterweise geschult.
Die Stoffauswahl in der Fluiddynamik erklärt sich aus der Absicht der Verfasser,die praktische Anwendung fluidmechanischer Gesetzmäßigkeiten immer wieder in den Vordergrund zu schieben.
Die Gasdynamik kann hier nur in der Art einer knapp gehaltenen Einführung angeboten werden.
Alle Gleichungen verstehen sich als Größengleichungen.Es wird nur im'Internationalen Maßsystem' gearbeitet.-Vorgeschriebene Symbolnormungen werden weitgehend eingehalten,bis auf einige Abweichungen bei den Geschwindigkeitssymbolen.
Aus Platzgründen wird auf einen umfangreichen Tabellen- und Diagramm-Anhang verzichtet,zumal es in Handbüchern und der einschlägigen Fachliteratur wertvolle Zusammenstellungen dieser Art gibt.
Das Buch wendet sich an Studenten und Berufstätige,die sich in die Fluidmechanik einarbeiten oder ihre Kenntnisse auffrischen und ergänzen wollen.
An dieser Stelle sei Frau R.Ritter ganz herzlich gedankt,weil sie unermüdlich mit großer Sorgfalt sämtliche Abbildungen angefertigt hat.
Gleicherweise ist der Verlagsleitung für das Interesse,das sie dieser Buchkonzeption entgegenbringt,und für die angenehme Zusammenarbeit zu danken.
Die Verfasser sind für Kritik und Anregungen dankbar.Sie hoffen jedoch,daß die getroffene Stoffauswahl akzeptabel ist und daß mit dieser Buchkonzeption eine weitere Art der Wissensvermittlung in der Fluidmechanik gefunden worden ist.

Saarbrücken,im Juni 1979

Rolf Ritter

Dan Tasca

INHALTSVERZEICHNIS

TEIL I : GRUNDLAGEN

E L Z E I C H E N, MASSEINHEITEN

SI-Einheit	Bedeutung	Symbol	SI-Einheit
m^2	Fläche, Querschn.	K	-
m/s^2	Beschleunigung,	k	1
	massenspez. Kraft	k	$m^3/(kg.s^2)$
J	Anergie	k	$N/m^2 = Pa$
m	Breite	k	m
J/kg	spezifische Aner		
m	Breite	k_s	m
m/s	Absolutgeschwind	L	m
J/(kg.K)	spez. Wärme	l	m
m	Durchmesser	M	-
-	Druckmittelpunkt	Me	-
m	Durchmesser	Ma	-
-	Dimension von ..	M	Nm
J	Energie	m	kg
$N/m^2 = Pa$	E-Modul	m	kg/s
J	Exergie	n	1
J/kg	spez. Energie	$\vec{n}$	1
J/kg	spez. Exergie	n	m
N	Kraft	P	W
$N/kg=m/s^2$	Feldbeschleunig.	p_o	N/m^2
N/m^2	Schubmodul		
m/s^2	Erdbeschleunig.	p	N/m^2
-	Gradient von ..	Q	J
m	Höhe		
J	Enthalpie	q	J/kg
m	Höhe, Tiefe		
J/kg	spezif. Enthalpie	R	Ω
m^4	Flächenträg-	R	J/(kg.K)
	heitsmoment	R	m
kg.m/s	Impuls	r	m
N	Impulsstrom	r	J/kg
$kg.m^2$	polares Massen-	S	- ; m^2
	trägheitsmoment		
A	el. Strom	SA	-
1	Einheitsvektor	s	m
1	rel. Spiegelgef.	s	J/(kg.K)
1	Einheitsvektor	T	K

SI-Einheit	Bedeutung
s	Schwingungsdauer
(°C)	Temperaturangabe
s	Zeit
m	benetzter Umfang
V	el.Spannung
J	innere Energie
J/kg	spez.innere En.
m/s	Umfangsgeschwind.
m^3	Volumen
m^3/s	Volumenstrom
m/s	Fahrzeuggeschw.
m^3/kg	spez.Volumen
J = Nm	Arbeit
J/kg	spez.Arbeit
m	abs.,kartes.Koord.
m	relative,kart.K.
$J/kg=m^2/s^2$	spez.Arbeit oder spez.Leistung
m	abs.,kartes.Koord.
m	relative,kart.K.
	komplexe Zahl
	konj.-kompl.Zahl
m	abs.,kartes.Koord.
m	relative,kartesische Koordinate
1	Absorptionskoeff.
1/K	Längenausd.koeff.
grd	Winkel
1/s	Winkelgeschw.
$1/s^2$	Winkelbeschl.
grd	Winkel
1/K	Volumenausdehnungskoeff.f.Fl.
m^2/s	Zirkulation
grd	Winkel
1/K	Druckkoeffizient
1/s	Schergeschwindig.
grd	Winkel
grd	Winkel

Symbol	SI-Einhei
δ	m
ε	-
ε	1
ζ	1
η	Ns/m^2
θ	grd
æ	1
λ	grd
λ	1
μ	1
ν	m^2/s
ρ	kg/m^3
Σ	-
σ	$N/m^2=Pa$
τ	$N/m^2=Pa$
τ_s	N/m
Φ	m^2
φ	1
φ	grad
φ	m^2/s
χ	m^2/s
ψ	m^2/s
ψ	1
ω	1/s

TEIL I: GRUNDLAGEN

1. STOFFGEBIET DER FLUIDMECHANIK

1.1. Aggregatszustände,Phasen

1.1.1. Übersicht

Ein Stoff kann bei gleicher chemischen Beschaffenheit drei verschiedene physikalische Erscheinungsformen aufweisen: Man kennt seinen festen,flüssigen und gasförmigen Zustand.Das sind die drei klassischen Aggregatszustände.
Unter Phasen verstehe man homogene Bereiche eines heterogenen Systems.So spricht man von der festen,flüssigen oder gasförmigen Phase eines Stoffes,wenn die Aggregatszustände eines Stoffes nebeneinander in einem System bestehen können.
Die beiden Aggregatszustände "flüssig" und "gasförmig" schreibt man heutzutage Medien zu,die gemeinhin FLUIDE genannt werden.
In Natur und Technik gibt es auch Zwischenzustände,die mit Hilfe der drei klassischen Aggregatszuständen nicht genügend genau erfaßt sind.
Eine erweiterte Klassifikation zeigt Bild 1-1.
Außer der dichten Festphase sind alle übrigen fließbar.Solche Medien sind aber Gegenstand der Fließkunde,die allgemein Rheologie heißt.-
Die Fluidmechanik gehört demzufolge zur Rheologie;gleichzeitig ist sie ein beliebtes Anwendungsgebiet der mathematischen Physik,und zwar als Teil der Kontinuummechanik (Stetigkeitsmechanik).

1.1.2. Stetigkeit

Sie soll in dreifacher Hinsicht kurz erläutert werden: geometrisch, mechanisch und molekularphysikalisch.
Ein Raum,wenn er noch so klein ist (z.B.: 1 mm^3),enthält eine dreifache Unendlichkeit (∞^3) geometrischer Punkte,die einen stetigen, geometrischen Raum (R^3) bilden.
Ein Raum (z.B.: 1 mm^3) enthält eine dreifache Unendlichkeit (∞^3) materieller Punkte,die einen stetigen,materiellen (mechanisch kontinuierlichen) Raum bilden.
Ein Raum (z.B.: 1 mm^3) enthält eine große Anzahl von Molekülen,die

Phase	Beschreibung	Verformbarkeit	Beispiele
Festphase	dicht	starr	Granit
		elastisch verformbar	Stahl
		plastisch verformbar	Stahl, Pech
	körnig		Split
	pulverig		Mehl
	festes Dispersionsmittel mit gasf. disperser Phase		fester Schaum
	festes Disp.mittel mit flüssiger Phase		fester Schaum
	festes Disp.mittel mit fester Phase		festes Sol
Plastische Phase	dicht	plastisch verformbar	Schlamm, Pasten, Harze, Pech
Flüssige Phase	tropfbare Flüssigkeiten und ihre homogenen Mischungen	etwas elastisch verformbar	Wasser, Alkohole, Öle, Emulsoide
	Flüssigkeiten mit körnigen/pulverigen Festphasen gemischt	etwas elastisch verformbar	Suspensoide
	Flüssigkeiten mit Gasblasen	elastisch verformbar	Mineralwässer, Schaum
Gasphase	reine Gase und ihre homogenen Mischungen	kompressibel	Helium, Luft
	Gas mit Staub gem .	"	Aerosole, Rauch
	Gas mit Tropfen gem.	"	Aerosole, Nebel, Wolken
	Dämpfe	"	Naßdampf, Sattdampf, Heißdampf
Plasma	homogen	elastisch verformbar	Leuchtstoffröhren Lichtbogen

einen unstetigen (diskontinuierlichen),materiellen Raum bilden.Diese Wirklichkeit steht im Gegensatz zur Voraussetzung der Kontinuummechanik und damit eben auch zur Fluidmechanik.
Beispiele im folgenden Abschnitt lassen die Molekülanzahl abschätzen und damit die Größenordnung des Fehlers abgrenzen,wenn man die Fluidmechanik als Quasi-Kontinuummechanik betreibt.
Praktischerweise genügt es,davon auszugehen,daß eine Fluidphase quasistetig ist.
In Bild 1-1 findet man Phasen,die keineswegs als quasi-stetig angesehen werden dürfen.-Beispielsweise Flüssigkeiten,mit körnigen Festphasen oder mit Gasblasen gemischt,sowie Gase,die mit Staub oder Tropfen angereichert sind,lassen sich nicht als quasi-stetige Medien behandeln.-Mischungen dieser Art gehören zu rheologischen Phasen,die kein Behandlungsgebiet der Fluidmechanik abgeben.
Fluidphasen sind ausnahmslos massenbehaftet.-Beim Plasma sind die elektromagnetischen Kräfte wesentlich,wogegen die Massenkräfte vernachlässigbar sind (Gegenstand der Magneto-Hydrodynamik).
Nunmehr erfolgt für die weiteren Abhandlungen die Definition eines Fluids: Ein Fluid ist ein quasi-stetiges,massenbehaftetes Medium, das von selbst leicht und relativ schnell fließt.

1.1.3. Beispiele

Die folgenden drei Beispiele dienen dazu,dem Leser zu verdeutlichen, daß in technischer Hinsicht die Annahme der Quasi-Stetigkeit gerechtfertigt ist.

1.**Beispiel:** Der Wasserstoff ist das leichteste Gas,das man kennt.Es ist zu zeigen,wieviele Wasserstoffmoleküle sich in 1 mm^3 befinden.

Lösung: Aufgrund der Avogadroschen Zahl befinden sich in 1 Mol Wasserstoff $6{,}023 . 10^{23}$ Moleküle.Das Molvolumen für den Normzustand (p_N = 1,015 bar; T_N = 273 K) ist mit $22{,}414 . 10^6$ mm^3 anzugeben.-Damit ergibt sich für ein Volumen von 1 mm^3 eine Molekülanzahl von $2{,}687 . 10^{16}$.
Übrigens gilt diese Anzahl auch für Luft!

2.**Beispiel:** Das Wasser ist die gewöhnlichste Flüssigkeit.Das Dichteverhältnis von Wasser zu Luft beträgt im Normzustand 773,5.- Wieviele Wassermoleküle befinden sich in 1 mm^3?

Lösung: Näherungsweise läßt sich mit Hilfe des Dichteverhältnisses die Molekülanzahl von Wasser angeben zu : $773{,}5 \cdot 2{,}687 \cdot 10^{16} = 2{,}08 \cdot 10^{19}$ pro Kubikmillimeter.

3.Beispiel: Das Quecksilber ist die bislang schwerste Flüssigkeit. Da seine Dichte mit 13 590 kg/m^3 etwa 13,59mal größer ist als diejenige des Wassers,kann man folgendermaßen zur

Lösung gelangen: $13{,}59 \cdot 2{,}08 \cdot 10^{19} = 2{,}83 \cdot 10^{20}$ Quecksilbermoleküle pro Kubikmillimeter.

Im gesamten Gebiet der Fluidmechanik trifft man demzufolge in einem Kubikmillimeter zwischen $2{,}687 \cdot 10^{16}$ und $2{,}83 \cdot 10^{20}$ Moleküle an!-Die Annahme des stetigen materiellen Körpers bzw. Mediums enthält einen Fehler,der wohl sehr gering sein wird,wenn man die riesige Anzahl der Moleküle ansieht.Der größte Fehler kommt im Falle des Wasserstoffs vor,weil dabei die geringste Molekülanzahl im Kubikmillimeter zu verzeichnen ist.-Bedenkt man zudem,daß ein Wasserstoffmolekül ein Volumen von $2{,}26 \cdot 10^{-22}$ mm^3 und ein Quecksilbermolekül ein Volumen von $13{,}97 \cdot 10^{-21}$ mm^3 besitzen,dann ist es gestattet,das Fluidmolekül für einen materiellen Punkt zu halten und die Molekülmenge als ein quasistetiges Medium(trotz der Intermolekularräume) in der Fluidmechanik anzusehen.

1.2. Fluidität

Unter Fluidität versteht man die Eigenschaft eines Stoffes,in der Fluidphase von selbst und relativ schnell zu fließen.-Die Ursache der Fluidität ist in der Schwäche der Kohäsionskräfte zu suchen.Bedeutsame Folgerungen der Fluidität sind:

- Fluide haben keine eigene Gestalt,sondern nehmen immer die Form des Behälters an;
- die Berührung der Fluide mit den Behältern wird in zweifach unendlich vielen Kontaktpunkten (∞^2) erreicht;
- Fluide übertragen keine <u>elastischen</u> Beanspruchungen infolge von Zug,Biegung,Torsion und Scherung;
- Fluide können nur elastische Druckbeanspruchungen übertragen;
- die Reibung hat bei Fluiden einen anderen Charakter als bei Festkörpern (vgl. Abschn. 2.6.1 und 15.1);

- die Drehbewegung der Fluidteilchen hat einen anderen Charakter als bei Festkörpern (vgl. Abschn. 11.3).

Die zur Fluidität gegenteilige Stoffeigenschaft heißt Zähigkeit (Viskosität).

1.3. Physikalische Größen

1.3.1. Allgemeines

Physikalische Größen beschreiben qualitativ und quantitativ die Zustände und Zustandsänderungen von physikalischen Systemen.Beispiele für Zustände: die Temperatur T,der Druck p,die Kraft F,das Moment M u.a.-Beispiele für Änderungsgrößen von Zuständen: die Arbeit W,die Wärmemenge Q u.a.

Eine physikalische Größe läßt sich qualitativ durch ihre Eigenschaften beschreiben.Die Gesamtheit der Eigenschaften bringt ihre physikalische Natur zum Ausdruck.

Quantitativ wird eine physikalische Größe beschrieben durch das Produkt: Maßzahl x Maßeinheit !

Physikalische Größen sind nur dann miteinander vergleichbar,wenn sie von identischer physikalischer Natur sind.Man kann beispielsweise nur Temperaturen miteinander vergleichen.-Ansonsten sind sie bestenfalls analog zueinander.

1.3.2. Intensive Größen

Sind physikalische Größen von der Masse unabhängig,dann nennt man sie intensive Größen.Als Beispiele sind zu erwähnen: die absolute Temperatur T,die Länge L,die elektrische Spannung U u.v.a.m.-

1.3.3. Extensive Größen

Sind physikalische Größen von der Masse abhängig,dann heißen sie extensive Größen.Als Beispiele sind anzuführen: die Kraft F,das Drehmoment M,die Energie E,die Arbeit W,die Leistung P u.a.

1.3.4. Spezifische Größen

In der Fluidmechanik und in der Thermodynamik ist es üblich,physikalische Größen auf die Fläche,das Volumen oder die Masse zu beziehen. Dadurch entstehen die sogenannten spezifischen Größen.

Spezifische Größen sind gleichzeitig auch intensive Größen, sofern sie durch Relativierung mit der Masse entstanden sind.-Hierzu einige Beispiele:

Dichte

Der aus einem System herausgegriffene und besonders untersuchte Bereich heißt Kontrollraum. Er dient zur Abgrenzung einer bestimmten Materienmenge.-Hat ein Kontrollraum das Volumen V und enthält er die Masse m, dann nennt man das Verhältnis

$$\rho_m = m / V \qquad (1\text{-}1)$$

seine mittlere Dichte. (Man könnte auch von der Volumendichte der Masse sprechen).-Der genaue Wert der Dichte in einem Punkt des Kontrollraumes wird als Grenzwert

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \Delta m / \Delta V = dm / dV \qquad (1\text{-}2)$$

verstanden.-Weil der Kehrwert davon, nämlich das

spezifische Volumen (v)

als massenspezifische Größe eine intensive Größe ist, muß auch die Dichte als intensiv gelten.

Druck

Das Verhältnis einer Druckkraft F zur normal dazu liegenden Fläche A heißt

$$p_m = F / A \qquad (1\text{-}3)$$

und wird mittlerer Druck genannt.-Der genaue lokale Wert ist als Grenzwert anzugeben:

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \Delta F / \Delta A = dF / dA \qquad (1\text{-}4).$$

Damit präsentiert sich der Druck als spezifische Kraft. Da es gleichgültig ist, wieviel Masse in der Druckzone vorhanden ist, stellt der Druck nicht nur eine spezifische, sondern auch eine intensive, also massenunabhängige Größe dar.

Spezifische Massenkraft

Das dynamische Grundgesetz für die Translation nach Newton lautet:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \qquad (1\text{-}5).$$

Das Verhältnis

$$\vec{a} = \vec{F} / m \qquad (1\text{-}6)$$

nennt man die mittlere spezifische Massenkraft. Sie ist natürlich von der Art einer Beschleunigung.

Spezifische kinetische Energie

Die kinetische Energie der Translation

$$E_k = (1/2) \cdot m \cdot c^2 \qquad (1\text{-}7)$$

wird durch Relativierung mit der Masse zur spezifischen Energie

(K ist Nebensymbol)

$$e_k = (1/2) \cdot c^2 = K \qquad (1\text{-}8).$$

Spezifische Druckenergie

Bezieht man die Druckenergie

$$E_d = p \cdot V \qquad (1\text{-}9)$$

auf die Masse, dann läßt sich für die spezifische Druckenergie schreiben:

$$e_d = \frac{p \cdot V}{m} = p / \varrho \qquad (1\text{-}10).$$

Spezifische potentielle Energie der Lage

Ein Körper hat aufgrund seines Gewichtes F_G bezüglich einer Nullniveaulinie eine potentielle Lageenergie von

$$E_p = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h \qquad (1\text{-}11),$$

wobei g die lokale Erdbeschleunigung und h die Höhenlage bedeuten. Der Massenbezug liefert ohne weiteres die spezifische potentielle Energie der Lage

$$e_p = g \cdot h \qquad (1\text{-}12).$$

Spezifische Exergie und Anergie der potentiellen Energie der Lage

Zunächst versteht man unter Exergie E_x den in mechanische Arbeit wandlungsfähige Anteil der Energie E; der nicht wandlungsfähige An-

teil der zur Verfügung gestellten Energie heißt Anergie B.-Zusammengefaßt gilt:

$$\boxed{E = E_x + B} \qquad (1\text{-}13).$$

Jede Energieerscheinungsform ist auf ihren exergetischen und anergetischen Anteil hin zu untersuchen, wenn man ihren "Gütegrad" feststellen will.
Ein kurzes Beispiel wird für die potentielle Energie der Lage gezeigt: Die Wasserfassung für ein Wasserturbinenkraftwerk liegt 100 m über dem Meeresspiegel. Das Krafthaus befindet sich auf 40 m über NN.-Wie groß sind die spezifische Exergie und Anergie?

Lösung:

$$e_{p1} = g.h_1 = 9{,}81.100 = 981\ m^2/s^2 = 981\ J/kg\ ;$$

$$e_{p2} = g.h_2 = 9{,}81.40 = 392{,}4\ J/kg.$$

Nur die Differenz der potentiellen Energie ist zur Wandlung in mechanische Arbeit fähig:

$$\boxed{e_{xp} = g\ .\ (\ h_1 - h_2\ )} \qquad (1\text{-}14).$$

Daraus folgt für das Beispiel:

$$e_{xp} = 588{,}6\ J/kg.$$

Der Anteil e_{p2} ist reine Anergie, und zwar in bezug auf das in 40 m über NN liegende Krafthaus:

$$b_p = 392{,}4\ J/kg.$$

2. PHYSIKALISCHE EIGENSCHAFTEN DER TROPFBAREN FLÜSSIGKEITEN

2.1. Masse

Neben der Fluidität besitzen Flüssigkeiten eine Masse, die nie vernachlässigbar ist. Als spezifische Größe kennt man sie bekanntlich als Dichte (vgl. Gl. 1-1 und 1-2).

2.2. Druck

Jede Flüssigkeit ist Sitz eines Druckes.-Wenn der Druck in einem Kontrollraum bis auf null abnimmt, dann spricht man von Vakuum.

2.3. Kompressibilität, Schallgeschwindigkeit

2.3.1. Theorie

Die Druckelastizität, auch Kompressibilität genannt, von Flüssigkeiten

ist vollkommen,also ohne die Nebenerscheinungen der Hysterese.Zur mathematischen Formulierung dieses Sachverhaltes wird auf das Hookesche Spannungs-Dehnungsgesetz zurückgegriffen, Bild 2-1.Das negative Vorzeichen im Gesetz

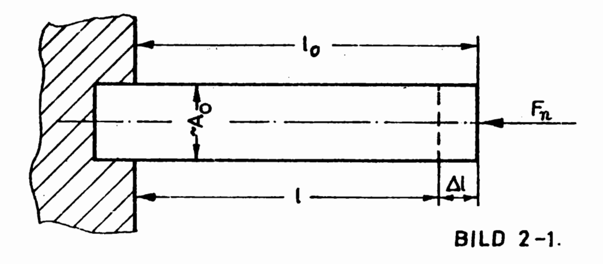


BILD 2-1.

$$\sigma = -E.\varepsilon \qquad (2\text{-}1)$$

weist auf die Druckspannung im Probestab hin. Das Hookesche Gesetz läßt sich folgendermaßen weiterentwickeln:

$$\sigma = \frac{F_N}{A_o} = -E.\varepsilon = -E.\frac{\Delta l}{l_o}.\frac{A_o}{A_o} = -E.\frac{\Delta V}{V_o}\quad .$$

Führt man bei Flüssigkeiten für den Druckunterschied das Symbol Δp ein, dann ergibt sich:

$$\Delta p = -E.\frac{\Delta V}{V_o} \qquad (2\text{-}2).$$

E hat hier die Bedeutung des Volumenelastizitätsmoduls der Flüssigkeit.-Der Reziprokwert wird Kompressionsmodul k genannt:

$$k = \frac{1}{E} = -\frac{1}{V_o}.\frac{\Delta V}{\Delta p} \qquad (2\text{-}3).$$

Für reines Wasser beträgt $E \approx 20\,000$ bar .
In elastischen Medien pflanzen sich geringe Störungen mit Schallgeschwindigkeit fort.Sie stellt demnach eine andere Beschreibungsgröße dar für das elastische Verhalten eines Mediums.-Geht man davon aus, daß der E-Modul und die Dichte eines Mediums die Schallgeschwindigkeit maßgebend beeinflussen,dann erhält man folgenden Zusammenhang:

$$c_s = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} \qquad (2\text{-}4).$$

c_s sei das Symbol für die Schallgeschwindigkeit.Der E-Modul ist nur innerhalb gewisser Druck- und Temperaturgrenzen konstant.Messungen der Schallgeschwindigkeit zeigen aber die Abhängigkeit von Druck und Temperatur auf.

2.3.2. Beispiele

1.Beispiel

In erster Näherung dürfen die Temperatur- und Druckabhängigkeit des E-Moduls von Wasser linear angenommen werden. Man ermittle:

a) die Druckabhängigkeit des E-Moduls, wenn folgende Messungen vorliegen: $p_ü = 1,015$ bar und $E = 18\,850$ bar sowie $p_ü = 6\,700$ bar und $E = 33\,333$ bar;

b) ebenso die Temperaturabhängigkeit bei folgenden Meßwerten: $T=273$ K und $E = 18\,830$ bar sowie $T = 293$ K und $E = 20\,050$ bar.

c) Durch Superposition der Einzelwirkungen ist die Gleichung $E = f\,(T,\, p_ü)$ anzugeben.

Lösungen:

a) $E = f\,(p_ü)$: Die zulässige Linearität führt zur nachstehenden Geradengleichung

$$E(p_ü) = 18850 + \frac{33333-18850}{6700 - 1,015} \cdot p_ü \quad .$$

Mit $p_ü$ in bar gilt für Wasser:

$$\boxed{E(p_ü) = 18\,850 + 2,16 \cdot p_ü} \qquad (2\text{-}5)\ .$$

b) $E = f\,(T)$: Mit den dazugehörenden Werten ergibt sich auch in diesem Fall eine Geradengleichung:

$$E(T) = 18850 + \frac{20050 - 18850}{293 - 273} \cdot (T - 273)$$

$$\boxed{E(T) = 18\,850 + 60 \cdot (T - 273)} \qquad (2\text{-}6).$$

c) $E = f(p_ü, T)$: Durch Superposition der beiden Teilgleichungen erhält man schließlich mit $p_ü$ in bar und T in K:

$$\boxed{E(p_ü, T) = 18\,850 + 2,16 \cdot p_ü + 60 \cdot (T-273)} \qquad (2\text{-}7).$$

2.Beispiel

Während der Dichtigkeitsprobe eines starren Behälters vom Inhalt $V_o = 20\ m^3$ wird der Druck von 35 bar auf 12 bar zurückgenommen.- Wieviel m^3 Wasser sind dabei dem Behälter zu entnehmen, wenn der E-Modul des Wassers mit $E = 20\,700$ bar angegeben wird?

Lösung:

Die Volumenabnahme läßt sich aus Gl.(2-2) ermitteln:

$$\Delta V = -\frac{\Delta p . V_o}{E} = -\frac{(35-12).20}{20\ 700} = -\ 0{,}022\ m^3 \quad .$$

3.Beispiel

Um wieviel Prozent nimmt die Dichte des destillierten Wassers bei konstanter Temperatur zu, wenn der Druck, vom Atmosphärendruck p_o = 1,015 bar ausgehend, um 1000 bar erhöht wird?

Lösung:

Mit Hilfe der Gleichung (2-5) erhält man zunächst für den E-Modul $E(p_ü)$ = 18 850 + 2,16.1000 = 21 000 bar; bekanntlich besteht zwischen Masse, Dichte und Volumen nach Gl.(1-1) im Mittel der Zusammenhang: $m = \varrho\ .\ V$ .Durch logarithmische Differentiation ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\ln m - \ln \varrho - \ln V = 0$$

$$\frac{dm}{m} = \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{dV}{V} \quad .$$

Bedenkt man zudem, daß die an der Zustandsänderung beteiligte Masse konstant bleibt, dann ergibt sich mit dm = 0 sofort: $-dV/V = d\varrho/\varrho$. Diesen Zusammenhang verwertet man in Gl.(2-2), weshalb sich sodann angeben läßt, und zwar für endliche Differenzen:

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho} = \frac{\Delta p}{E} = \frac{1000}{21\ 000} = 0{,}0476 \quad .$$

Die Dichte steigt demnach um 4,76 % .

4.Beispiel

In einem starren Behälter befinden sich 50 m^3 Wasser.-Wie ändert sich das Wasservolumen, wenn der Druck um 100 bar steigt?

Lösung:

Aus Gl.(2-5) folgt für den E-Modul: $E(p_ü)$=18850 + 2,16.100 = 19066 bar.
Aus Gl.(2-2) erhält man ohne weiteres:

$$\Delta V = -\frac{\Delta p\ .\ V_o}{E} = -\frac{100.50}{19066} = -\ 0{,}256 \quad .$$

Es stellt sich eine Volumenänderung von $\Delta V = -\ 0{,}256\ m^3$ ein.

5. Beispiel

Man bestimme den Elastizitätsmodul einer Flüssigkeit, wenn man bei einer Druckzunahme von 10 bar eine Volumenverringerung von 0,002 m^3 festgestellt hat; das Anfangsvolumen beträgt $V_o = 4\ m^3$.

Lösung:

Durch Verwendung von Gl. (2-2) läßt sich angeben: $E = -\frac{\Delta p \cdot V_o}{\Delta V} = -\frac{10.4}{(-0{,}002)}$.
Der E-Modul beträgt:

$$E = 20\ 000\ \text{bar}.$$

6. Beispiel

Man bestimme die Dichte von Meerwasser ϱ_2 in einer Tiefe, wo ein Überdruck von 40 bar vorherrscht. Die Dichte an der Wasseroberfläche wird mit $\varrho_1 = 1035\ kg/m^3$ angegeben; der mittlere E-Modul beträgt E = 20700 bar.

Lösung:

Die Gl. (2-2) liefert folgende Beziehung:

$$\Delta p = -E.\frac{\Delta V}{V_o} = -E.\frac{V_2 - V_1}{V_1} = -E \cdot \left(\frac{V_2}{V_1} - 1\right).$$ Einen anderen Zusammenhang liefert die Massengleichheit der beiden Zustände:

$$m = \varrho_1 \cdot V_1 = \varrho_2 \cdot V_2 \quad : \quad V_2/V_1 = \varrho_1 / \varrho_2$$; aus diesen beiden Angaben läßt sich formulieren:

$$\varrho_2 = \frac{1}{1 - \Delta p/E} = \frac{1035}{1 - 40/20700}$$; die Dichte beträgt $\varrho_2 = 1037\ kg/m^3$.

Zum gleichen Ergebnis wäre man auch mit der in Beispiel 3 gezeigten Lösungsmethode gelangt.

7. Beispiel

Wie hoch ist die Schallgeschwindigkeit durch das reine Wasser bei folgenden Zuständen:

a) Druck p = 1,015 bar, E = 18850 bar, $\varrho = 1000\ kg/m^3$;
b) Druck p = 1,015 bar, E = 20000 bar, $\varrho = 998\ kg/m^3$?

Lösungen:

a) Die Schallgeschwindigkeit errechnet sich in diesem Fall einfach mit Gl. (2-4):

$$c_s = \sqrt{E/\varrho} = \sqrt{1{,}885 . 10^9 / 1000} = 1\ 373\ \mathrm{m/s} \quad .$$

b) Der angegebene Lösungsweg ergibt hier:

$$c_s = \sqrt{2 \ . \ 10^9/998} = 1\ 419{,}5\ \mathrm{m/s} \quad .$$

2.4. Schwere

2.4.1. Theorie

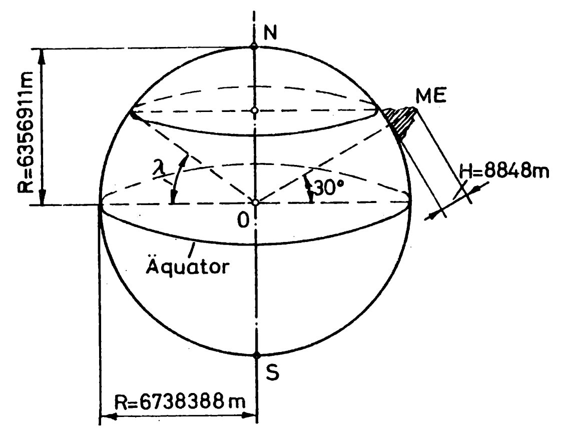
Die tropfbaren Flüssigkeiten werden deshalb für schwere Fluide gehalten, weil in einer Vielzahl von Problemen ihre Gewichtskräfte in der Größenordnung der Druckkräfte liegen. Nur wenn der statische Druck ungewöhnlich groß ist, dürfen Gewichtskräfte vernachlässigt werden, wie z.B. bei Bewegungsvorgängen durch Strömungsmaschinen. Die Schwerkraft ist eine Massenkraft und wird berechnet mit:

$$\vec{F}_G = \int_{(m)} \vec{g} \ . \ dm = \int_{(V)} \vec{g} \ . \ \varrho \ . \ dV \qquad (2\text{-}8),$$

wobei dm das Massendifferential, ϱ die Dichte, V das Volumen und $\vec{g}$ die Erdbeschleunigung bedeuten. - Die Erdbeschleunigung $\vec{g}$ beinhaltet nicht nur die reine Massenanziehungskraft (Gravitationskraft), sondern sie berücksichtigt auch die Fliehkraftwirkung aufgrund der täglichen Erdrotation, Bild 2-2. - Die Erdbeschleunigung ist abhängig vom Abstand des Massenpunktes zum Erdmittelpunkt. Diesen Sachverhalt kann man auch über die geographische Breite und die Höhe H über Meereshöhe angeben:

$$g = 9{,}806059 - 0{,}025028 . \cos 2\lambda - 1{,}15 . 10^{-6} . H \qquad (2\text{-}9).$$

H in m, g in m/s^2, λ in grd.



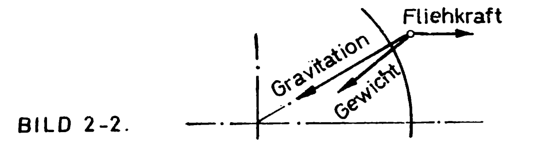


BILD 2-2.

2.4.2. Beispiel

Wie schwer ist 1 m^3 Wasser:

a) am Äquator ($\lambda = 0$) und auf Ozeanniveau ($H = 0$) ;

b) am Nordpol ($\lambda = 90^o$) und Ozeanniveau ($H = 0$) ;

c) auf dem Mount Everest (nördliche Breite $\lambda = 30^o$, $H = 8848$ m) ?

Lösungen:

a) Mit Gl.(2-9) erhält man für die lokale Erdbeschleunigung:

$g = 9{,}806059 - 0{,}025028 . \cos 0^o = 9{,}781031$ m/s^2, womit nun das Gewicht lautet, und zwar unter Verwendung von Gl.(2-8):

$$F_G = \varrho . g . V = 1000 . 9{,}781031 . 1 = 9\ 781{,}031 \text{ N} \;;$$

b) ebenso erhält man:

$$g = 9{,}806059 - 0{,}025028 . \cos 180^o$$
$$g = 9{,}831087 \text{ m/s}^2 \quad \text{und}$$
$$F_G = 9\ 831{,}087 \text{ N} .$$

c) Für diesen Punkt erhält man:

$$g = 9{,}806059 - 0{,}025028 . \cos 60^o - 1{,}15 . 10^{-6} . 8848$$
$$g = 9{,}783369 \text{ m/s}^2 \;;$$
$$F_G = 9\ 783{,}369 \text{ N} ,$$

also nur wenig mehr als am Äquator auf Ozeanniveau.

2.5. Gasgehalt und Kavitation

2.5.1. Theorie

Tropfbare Flüssigkeiten lösen umso mehr Gase, je höher der auf dem Flüssigkeitsspiegel lastende Gasdruck ist und je niedriger die Flüssigkeitstemperatur liegt. - Im anderen Fall des Druckabfalls und der Temperaturzunahme werden die gelösten Gase wieder allmählich frei!- Die Gasabgabe wird natürlich immer von einer geringen Dampfabgabe begleitet, und zwar in Folge von Verdunstung. Beim Siedepunkt entstehen im Inneren der Flüssigkeit Dampfblasen, die wirbelnd aufsteigen und den angefüllten Dampf in die Umwelt ablassen. Im Zustand des Siedens ist die Löslichkeit von Gasen null!-Die mit der Dampfblasenbildung und dem Freiwerden gelöster Gase verbundenen Effekte, besonders in der Nähe fester Wände, werden als HOHLRAUMBILDUNG oder KAVITATION bezeichnet.-Erscheinungen, die man alle in Verbindung mit der Kavitation bringt, sind vielfältiger Art, wobei einige noch nicht vollständig geklärt sind.

1.Effekt: Die Stetigkeit der tropfbaren Flüssigkeit verschwindet;deshalb verlieren Gesetzmäßigkeiten,welche die Stetigkeit zur Voraussetzung haben,ihre Gültigkeit.

2.Effekt: Die austretenden Gase sind anfangs einatomig.Sofern also z.B. Luft gelöst war,wird der einatomige Sauerstoff besonders korrosiv wirken!-Neben Oxiden wird es auch zu Karbonaten kommen,weil die Kohlensäure als instabil bekannt ist. Bei eisenhaltigen Wänden wird sich demzufolge leicht Rost bilden können, der eine Mischung aus Eisenoxiden und Eisenkarbonaten darstellt.

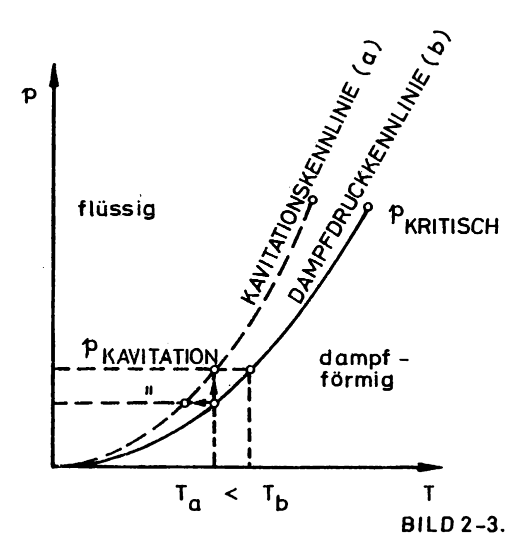


BILD 2-3.

3.Effekt: Gelangen die Dampfblasen in Zonen niedrigeren Druckes,dann kann es zu lokalen Dampfexplosionen mit hohem Temperaturabfall kommen,was sich auf feste Wände stark erosiv auswirken kann.

4.Effekt: Ebenso können Dampfblasen in Gebiete höheren Druckes gelangen, wobei sich dann Implosionen einstellen mit ebenfalls verheerenden Materialzerstörungen der umgebenden festen Wände.Neben dieser Art von Erosion stellt sich dabei der

5.Effekt ein:Die lokalen hohen Drücke komprimieren das eingeschlossene Gas und/oder den Dampf derart,daß Temperaturerhöhungen von einigen 1000 K keine Seltenheit sind.Dadurch kann es örtliche Schmelzvorgänge geben.

6.Effekt: Die Kavitation ist von einer starken Lärmentwicklung begleitet.

7.Effekt: Es ist nicht ausgeschlossen,daß auch Ultraschallwellen eine Rolle spielen,die ebenfalls schlimme Beschädigungen metallischer Wände verursachen können (Strukturveränderungen!).

8.Effekt: Da die Hohlräume stark ionisierte Zonen sind,kommt es zu plasmadynamischen Erscheinungen: Man kann im Laboratorium sogar Funken feststellen.Es ist noch nicht geklärt,ob es

sich um Glühfunken wegen der hohen Temperatur oder um elektrische Funken handelt. Auf jeden Fall werden auch hierdurch metallische Flächen zerstört.

Die Kavitationsempfindlichkeit einer Flüssigkeit wird durch die Kavitationskennlinie der Flüssigkeit gegeben. Ihr qualitativer Verlauf wird in Bild 2-3 (Kurve a) gezeigt.-Der Zusammenhang zwischen Dampfdruck und Temperatur einer reinen Flüssigkeit heißt Dampfdruckkurve (Bild 2-3, Kurve b).-Sind Gase in der Flüssigkeit gelöst (absorbiert), dann setzt bei einer bestimmten Temperatur die Verdampfung schon bei einem etwas höheren auf der Flüssigkeit lastenden Außendruck ein. Bezüglich eines bestimmten Außendruckes, der natürlich niedriger als der kritische Druck sein muß, setzt die Verdampfung bereits bei einer niedrigeren Temperatur ein : $T_a < T_b$.

2.5.2. Beispiele

1. Beispiel

a) Wieviel Sauerstoff (O_2) und Stickstoff (N_2) enthält 1 kg Wasser im Zustand von p_o = 1,015 bar und T_o = 273 K ? - Die Anteile sind als Massenteile zu verstehen.-Für die Lösung werden noch angegeben:

Definition des Absorptionskoeffizienten

$$\alpha = m_{Gas} / m_{Flüssigkeit} \qquad (2\text{-}10).$$

Absorptionskoeffizient für Sauerstoff/Wasser bei Normaldruck

$$\alpha_{O_2} = 0{,}04115 - 1{,}09.10^{-3}.(T-273) + 22{,}56.10^{-6}.(T-273)^2 \qquad (2\text{-}11).$$

Absorptionskoeffizient für Stickstoff/Wasser bei Normaldruck

$$\alpha_{N_2} = 0{,}020346 - 0{,}53887.10^{-3}.(T-273) + 11{,}156.10^{-6}.(T-273)^2 \qquad (2\text{-}12).$$

Da die Luft bezüglich der Masse aus 20,96 % Sauerstoff und 79,04 % Stickstoff besteht, lautet der diesbezügliche Absorptionskoeffizient für Luft/Wasser:

$$\alpha_{Luft} = 0{,}2096 \cdot \alpha_{O_2} + 0{,}7904 \cdot \alpha_{N_2} \qquad (2\text{-}13).$$

b) Weiterhin sind die relativen Massenanteile des im Wasser gelösten Sauerstoffs und Stickstoffs zu ermitteln;

c) ebenso für die in Luft vorhandenen Anteile.

Lösungen:

a) Gelöste Sauer- und Stickstoffmengen:

Aus den Gl.(2-11) und (2-12) folgt für den Fall,daß die Gase einzeln vorhanden sind:

$\alpha_{O_2} = 0{,}04115$ und $\alpha_{N_2} = 0{,}020346$.-Somit ergibt sich mit Gl. (2-13) der Absorptionskoeffizient von Luft in Wasser:

$$\alpha_{Luft} = 0{,}2096 \cdot 0{,}04115 + 0{,}7904 \cdot 0{,}020346$$

$$\alpha_{Luft} = \underbrace{0{,}008625}_{\text{Sauerstoff-anteil}} + \underbrace{0{,}0160815}_{\text{Stickstoff-anteil}} = 0{,}0247065 \approx 2{,}47\,\%\,.$$

Die Masse der gelösten Luft ergibt sich mit Gl.(2-10) zu:

$$m_{Luft} = 0{,}0247 \cdot 1 = 0{,}0247 \text{ kg} = 24{,}7 \text{ g}\,.$$

Für den gelösten Sauerstoff erhält man:

$$m_{O_2} = 0{,}008625 \cdot 1 = 0{,}008625 \text{ kg} = 8{,}625 \text{ g}\;;$$

analog ergibt sich für den gelösten Stickstoff:

$$m_{N_2} = 0{,}0160815 \cdot 1 = 0{,}0160815 \text{ kg} = 16{,}082 \text{ g}.$$

b) Relative Massenanteile im Wasser:

Die Verhältnisse für O_2 : 0,008625/0,0247065 = 0,349 und

N_2 ; 0,0160815/0,0247065= 0,651

geben die Massenanteile von Sauerstoff und Stickstoff an,die mit der Luft im Wasser gelöst sind.

c) Die in Luft vorhandenen Massenanteile betragen laut Angabe für

O_2 : 0,2096 und N_2 : 0,7904.

Aus den Ergebnissen von b) und c) folgt der Sachverhalt,daß die im Wasser gelöste Luft sauerstoffreicher ist als normale Luft!

2.Beispiel

a) Wieviel g Luft sind in 1 kg Wasser bei p_0 = 1,015 bar Luftdruck und einer Temperatur von T_0 = 293 K gelöst?

b) Man vergleiche den gefundenen Wert mit dem Ergebnis von Beispiel 1a!

c) Wie groß ist hierbei der Dampfdruck des Wassers?

Lösungen:

a) Luftgehalt: Den Absorptionskoeffizienten für Luft in Wasser ermittelt man mit Hilfe der Gl.(2-11) bis (2-13):

$$\alpha_{O_2} = 0{,}047994 \quad \text{und} \quad \alpha_{N_2} = 0{,}0140310 \quad ;$$

$$\alpha_{Luft} = 0{,}02115 \; .$$

Die Multiplikation mit 1 kg Wasser ergibt nach Gl.(2-10) eine gelöste Luftmasse von $m_{Luft} = 21{,}15$ g .

b) Vergleich: Eine Masse von 1 kg Wasser verliert bei einem Temperaturanstieg von 20 K:24,7 - 21,15 = 3,55 g Luft. Nimmt zudem der örtliche Druck ab,dann verstärkt sich dieser Effekt.

c) Dampfdruck: Aus der Dampftafel [11] folgt direkt für 293 K

$$p = 0{,}02337 \text{ bar.}$$

3.Beispiel

Wieviel cm^3 Luft enthält 1 dm^3 Wasser beim Athmosphärendruck p_0=1 015 mbar und einer Temperatur von T_0=293K ?

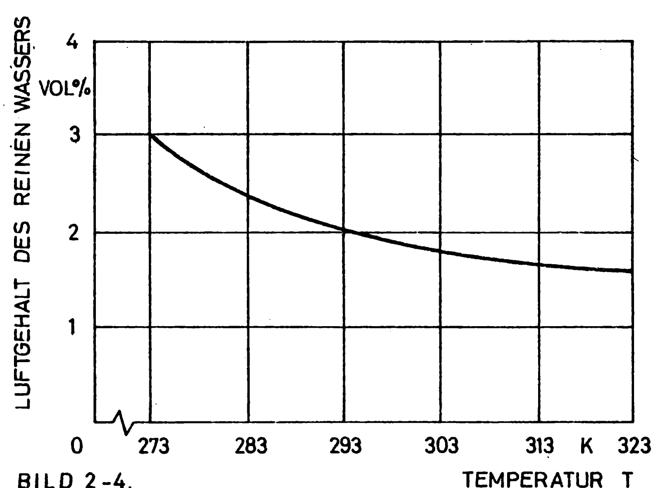


BILD 2-4.

Lösung:

Aus dem Diagramm von Bild 2-4 findet man 2 % ,d.h.: In 1000 cm^3 Wasser trifft man 20 cm^3 Luft an.

2.6. Zähigkeit

2.6.1. Theorie

Bekanntlich ist die Zähigkeit oder Viskosität die der Fluidität entgegengesetzte Flüssigkeitseigenschaft. Sie ist die Ursache für das Widerstandsverhalten bei der fließenden Bewegung. Die Zähigkeitswirkung besteht in der Entstehung von Tangentialkräften, deren Ursache nicht eindeutig geklärt sind. Die Adhäsion zwischen einer festen Wand, die Reibung zwischen Flüssigkeitsschichten und elastische Scherkräfte sind von Einfluß.-Es ist bemerkenswert, daß diese Tangentialkräfte nur bei Geschwindigkeitsunterschieden zwischen Flüssigkeitsschichten untereinander oder zwischen der Flüssigkeit und festen Wänden auftreten.

Flüssigkeiten im definierten Sinne lassen sich bezüglich ihres Reibungsverhaltens durch das Newtonsche Zähigkeitsgesetz beschreiben: Die Tangentialkraft F_t ist umso größer, je größer die Berührungsfläche A ist, und je höher der Geschwindigkeitsgradient $\Delta c / \Delta n$ ausfällt, wobei Δc den Geschwindigkeitsunterschied zwischen Wand und Flüssigkeitsschicht abgibt; Δn deutet auf die Schichtdicke hin:

$$\boxed{F_t = \eta . A . \frac{\Delta c}{\Delta n}} \qquad (2\text{-}14).$$

Der Proportionalitätsfaktor η in Ns/m^2 ist als dynamische oder absolute Zähigkeit bekannt.-Bezieht man die Tangentialkraft auf die Fläche, dann erhält man die mittlere Tangentialspannung:

$$\boxed{\tau_m = \frac{F_t}{A} = \eta \cdot \frac{\Delta c}{\Delta n}} \qquad (2\text{-}15).$$

Als Lokalwert gilt:

$$\boxed{\tau = \eta \cdot \frac{dc}{dn}} \qquad (2\text{-}16).$$

Flüssigkeiten, die sich durch dieses Gesetz beschreiben lassen, nennt man Newtonsche Flüssigkeiten.-Mit Nichtnewtonschen Flüssigkeiten hat man es dann zu tun, wenn ihr Fließverhalten nicht mit Gl. (2-15) beschrieben werden kann. Sie sind Betrachtungsgegenstand der Rheologie.- Man beachte, daß die Flüssigkeitsreibung von der Größe der Berührungsfläche abhängt, nicht aber die Festkörperreibung, s. Gl. (9-17), S. 78 und 140.

2.6.2. Rheologischer Überblick

In der Rheologie sind die Tangentialkräfte enger mit der Adhäsion

und den elastischen und plastischen Scherkräften gekoppelt, als es in der Fluidmechanik der Fall ist.
Man kennt in der Rheologie zwei Gesetzmäßigkeiten, welche das tangentiale Spannungsverhalten eines allgemeinen Fluids beschreiben helfen. Einmal bedient man sich des Hookeschen Spannungs-Dehnungs-Gesetzes

$$\tau = \frac{dF_t}{dA} = G \cdot \gamma \qquad (2\text{-}17),$$

wo G in Pa oder bar den Schubmodul und γ in rad den Deformationswinkel angeben, Bild 2-5.- Als zweite Gesetzmäßigkeit ist das Newtonsche Schubspannungsgesetz zu nennen, das man noch durch Einführung der Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$, die in 1/s gemessen wird, umformen kann:

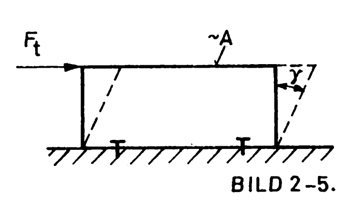


BILD 2-5.

$$\tau = \eta \cdot \dot{\gamma} \qquad (2\text{-}18).$$

Da aber bei einem rheologischen Fluid die absolute Zähigkeit nur selten konstant ist, stellt man das Newtonsche Schubspannungsgesetz in der Rheologie folgendermaßen dar:

$$\tau^k = \eta \cdot \frac{dc}{ds} = \eta \cdot \dot{\gamma} \qquad (2\text{-}19);$$

dabei besitzt der Exponent folgende Bedeutung:

$k = 1$: Es liegt ein Newtonsches Fluid vor.
$k > 1$: Man spricht hierbei von einer pseudoplastischen bzw. strukturviskosen Phase.
$k < 1$: Dieser Wert deutet dilatante Phasen an, Bild 2-6, Pos. a.

Die lokale absolute Zähigkeit ist bei dieser Darstellung als Tangentensteigung an die Fließkurven zu verstehen.
Beginnt ein rheologischer Stoff erst dann zu fließen, wenn eine bestimmte Schwellspannung überschritten wird, dann liegt eine Bingham-Phase vor. Von einem Bingham-Stoff ist die Rede, wenn der weitere Fließkurvenverlauf mit k = 1 beschrieben werden kann (Bild 2-6, Pos. b).
Weitere Besonderheiten im Fließverhalten rheologischer Stoffe stellt man in der Rheopexie und der Thixotropie fest.-Bei rheopexen Stoffen wächst die Viskosität bei gleichbleibender Scherbeanspruchung mit zunehmender Zeit.-Thixotrope Stoffe zeigen entgegengesetztes Verhalten. Zudem werden auch noch Hystereseerscheinungen beobachtet.

Andere rheologische Stoffe entwickeln erst dann Tangentialspannungen, wenn die Schergeschwindigkeit einen gewissen Schwellwert erreicht hat (Bild 2-6,Pos. c).Man spricht in diesem Zusammenhang von Ostwald-Phasen.
In diesem Buch werden nur Newtonsche Fluide eingesetzt.

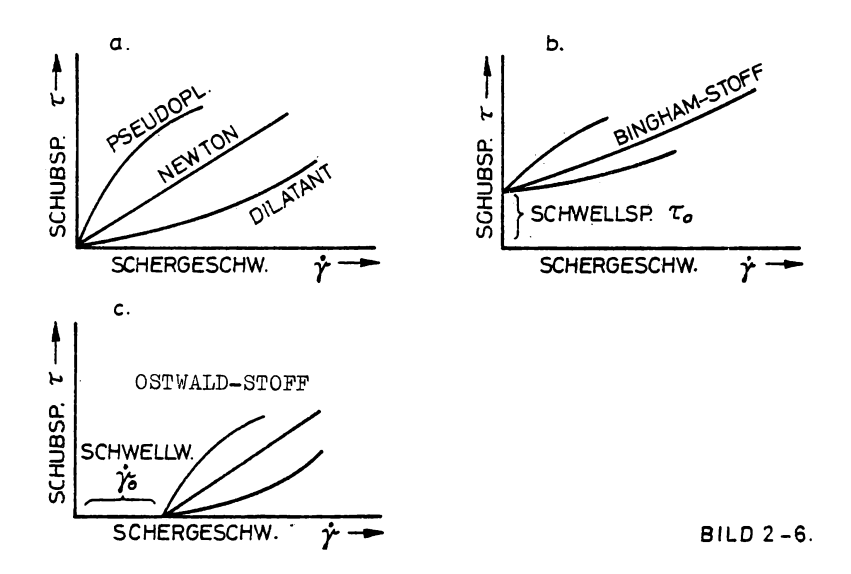


BILD 2-6.

2.7. Freie Oberfläche und Mischbarkeit

Manchmal haben tropfbare Flüssigkeiten im Zustand der Ruhe oder der Bewegung eine freie Oberfläche (z.B.: Wasserspiegel),die als Obergrenze des flüssigen Gebietes gilt,auch wenn der Behälter ein grösseres Volumen als die Flüssigkeitsmenge hat.Das folgt aus der Unfähigkeit tropfbarer Flüssigkeiten zur elastischen Ausdehnbarkeit. Zusammengebrachte Flüssigkeiten ordnen sich zunächst auf Grund der verschiedenen Dichten übereinander an.Die schwere Flüssigkeit lagert sich unten ab,die leichtere darüber.-Zwischen den Flüssigkeiten bildet sich jeweils im Zustand der Ruhe eine ebene Trennebene aus,welche eine ähnliche Rolle spielt wie die freie Oberfläche.Handelt es sich bei zwei sich berührenden Flüssigkeiten um mischbare Flüssigkeiten,dann werden sie sich wegen ihres Diffusionsverhaltens mit der Zeit vermischen;ansonsten bleiben sie getrennt.Man nennt sie dann nichtmischbare Flüssigkeiten.

2.8. Kapillarität

2.8.1. Theorie

Die Massenanziehungskraft zweier Massen m_1 und m_2 beträgt, wenn ihre Massenmittelpunkte den Abstand r haben, nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz:

$$F_{12} = F_{21} = k \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \qquad (2\text{-}20),$$

wobei F_{12} die Kraftwirkung der Masse m_1 auf die Masse m_2 bedeutet. F_{21} stellt die Kraftwirkung der Masse m_2 auf die Masse m_1 dar. Beide Kräfte sind zwar vom gleichen Betrag, aber entgegengesetzt gerichtet. k heißt Gravitationskonstante und beträgt $6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $m^3/(kg \cdot s^2)$.- Gleiches gilt natürlich auch bezüglich der Anziehungskraft zweier Moleküle, die man Kohäsionskraft nennt, Bild 2-7, Pos. a.

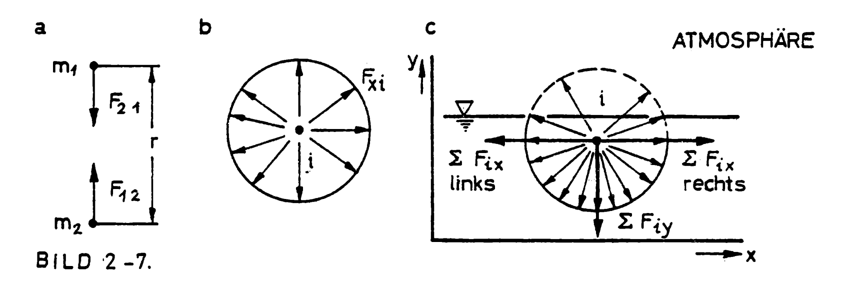


BILD 2-7.

Bild 2-7, Pos. b, will sagen, daß das Molekül Nr. i im Inneren der Flüssigkeit von allen in einem kugeligen Wirkungsbereich befindlichen Molekülen x angezogen wird und sich deshalb im Gleichgewicht befindet. Damit erklärt sich die leichte Verschieblichkeit der Moleküle im Inneren der Flüssigkeit. Moleküle, die sich in der Nähe der freien Oberfläche befinden, werden luftseitig viel weniger stark angezogen als aus der Flüssigkeit selbst heraus, und zwar wegen der viel geringeren Luftdichte (Bild 2-7, Pos. c). Bildet man die beiden horizontalen Teilresultierenden $\sum F_{ix/links}$ und $\sum F_{ix/rechts}$, so gelangt man zu der Einsicht, als ob die freie Oberfläche von Zugkräften beansprucht wäre! - Deshalb heißt das Verhältnis

$$\tau_s = \frac{\sum F_{ix/links\ oder\ rechts}}{s} = \frac{F_L}{s} \qquad (2\text{-}21)$$

F_L in N stellt eine Linienkraft dar.

Oberflächenspannung, gemessen in N/m. - s stellt die Länge eines Oberflächenabschnittes dar.-Die Vertikalresultierende $\sum F_{iy}$ führt, bezogen auf die Oberfläche dA, zu einer Art Kohäsionsdruck:

$$p_K = \frac{d\sum F_{iy}}{dA} \quad (2\text{-}22),$$

der aber an festen Wänden nicht spürbar werden kann.

Der Zusammenhang zwischen diesen Zug- und Druckkraftwirkungen wird besonders bei gekrümmten Oberflächen (z.B.: Tropfen, Meniskus) deutlich, Bild 2-8. Ein elementares, räumlich gekrümmtes Rechteck von den Seitenlängen ds_1 und ds_2 ist herausgezeichnet. Für den Gleichgewichtsfall werden die Zugkräfte auf die z-Achse projiziert:

BILD 2-8.

$$\sum F_{iz} = -p_1 . ds_1 . ds_2 + p_2 . ds_1 . ds_2 + 2 . \tau_s . tg(\frac{d\alpha_2}{2}) . ds_1 +$$

$$+ 2 . \tau_s . tg(\frac{d\alpha_1}{2}) . ds_2 = 0;$$ berücksichtigt man

$tg(d\alpha_1/2) = ds_1/R_1$ und $tg(d\alpha_2/2) = ds_2/R_2$, so läßt sich für den Druckunterschied nach Division durch $ds_1 . ds_2$ der zusätzliche Krümmungsdruck ermitteln:

$$\Delta p_{Kr} = p_1 - p_2 = \tau_s \cdot (1/R_1 + 1/R_2) \qquad (2\text{-}23).$$

Er kann auch, ganz im Gegensatz zum Kohäsionsdruck, auch nach außen hin wirksam sein. Der Klammerausdruck entspricht der mittleren Oberflächenkrümmung.
Wenn die "Wirkungskugel" eines Moleküls von zwei Grenzen durchschnitten wird, wie es z.B. in der Nähe einer Wand bei Atmosphärenzutritt der Fall ist, Bild 2-9, Pos. a, dann steigt die Flüssigkeit etwas an der

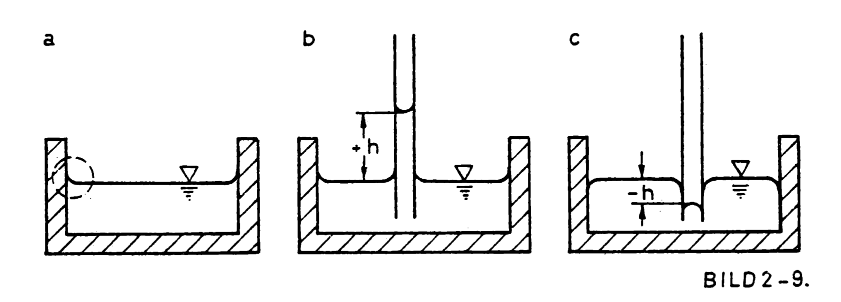


BILD 2-9.

Wand hoch, wenn die Adhäsionskräfte zwischen Wand und Flüssigkeit die Kohäsionskräfte der Flüssigkeit überwiegen, sofern man vom Einfluß der Luftmoleküle absieht. Im anderen Fall bildet sich ein konvexer Flüssigkeitsspiegel in Wandnähe aus (Bild 2-9, Pos. b und c). Die Erscheinung, daß Flüssigkeiten in dünnen Röhrchen (Haarröhrchen) aufsteigen oder in ihnen absinken, heißt bekanntlich Kapillarität. Da hierbei, wie ersichtlich, die Oberflächenspannung die entscheidende Rolle spielt, wird sie auch Kapillarspannung genannt.
Im Zusammenhang mit der Adhäsion und der Kapillarität sind auch andere Flüssigkeitseffekte zu sehen, wie z.B.:

- die Bildung der Tropfen (Stalagmometrie) und kugelige Gestalt;
- die kugelförmige Grenze von Gasblasen in Flüssigkeiten;
- die kugeligen Seifenblasen u.v.a.m.

Der Tropfen im Ruhezustand besitzt deshalb die Gestalt einer Kugel, weil die Oberflächenspannung τ_s regelmäßig verteilt ist. Dieser Umstand sichert dem Tropfen eine geometrische Gestalt, wo der flüssige Körper bei einem bestimmten Volumen die geringste Oberfläche besitzt: die Kugelgestalt. Ein fallender Tropfen nimmt bald arodynamische Gestalt an, Bild 2-10.

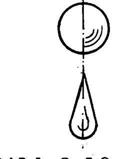


Bild 2-10

2.8.2. Beispiele

1.Beispiel

Im Punkte A treffen Luft und zwei Flüssigkeiten zusammen,Bild 2-11, Pos. a.Die Oberflächenspannungen betragen:

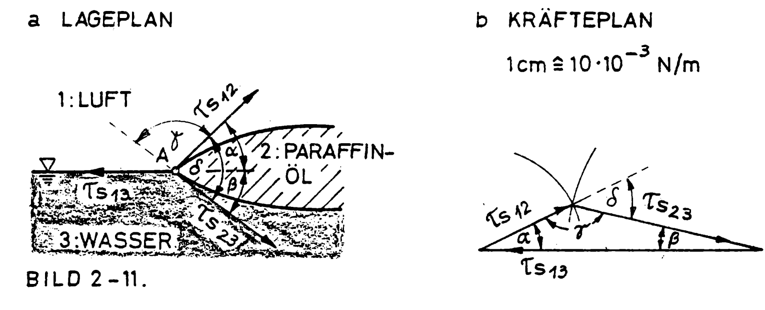


BILD 2-11.

$\tau_{s12} = 27.10^{-3}$ N/m (Paraffinöl gegen Luft);
$\tau_{s23} = 50.10^{-3}$ " (Paraffinöl gegen Wasser);
$\tau_{s13} = 72{,}9.10^{-3}$ N/m (Wasser gegen Luft).

Man ermittle den Flankenwinkel δ des auf dem Wasser schwimmenden linsenförmigen Öltropfens.

Lösung:

Die in A befindliche Molekülgruppe ist drei verschiedenen Kräften ausgesetzt;diese Belastung kann auch,auf die Länge bezogen -hier senkrecht zum Bild gedacht- ,durch die sogenannte Oberflächenspannungen in der Tendenz ersetzt werden.
Nach der Wahl eines Kräfteplanmaßstabs läßt sich bei den drei gegebenen "Kräften" ohne weiteres der "Kräfteplan" (Stevinus-Dreieck) zeichnen (Bild 2-11,Pos. b).Aus dem Kosinussatz folgt:

$\tau_{s13}^2 = \tau_{s12}^2 + \tau_{s23}^2 - 2.\tau_{s12}.\tau_{s23} . \cos\gamma$. Bedenkt man,daß

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ und $\delta + \gamma = 180^\circ$ gilt,so folgt:

$$\tau_{s13}^2 = \tau_{s12}^2 + \tau_{s23}^2 + 2.\tau_{s12}.\tau_{s23} . \cos\delta .$$

$$\boxed{\cos\delta = \frac{\tau_{s13}^2 - (\tau_{s12}^2 + \tau_{s23}^2)}{2.\tau_{s12}.\tau_{s23}}} \qquad (2\text{-}24).$$

Damit ergibt sich $\underline{\underline{\delta = 39{,}40^\circ}}$.

2.Beispiel

Ein Öltropfen wird auf eine Wasseroberfläche gebracht.-Welcher Flankenwinkel δ stellt sich ein,wenn auf der freien Oberfläche der Atmosphärendruck lastet?-Die vermutete Anordnung ist dem Bild 2-12 zu entnehmen.Als Oberflächenspannungen kennt man:

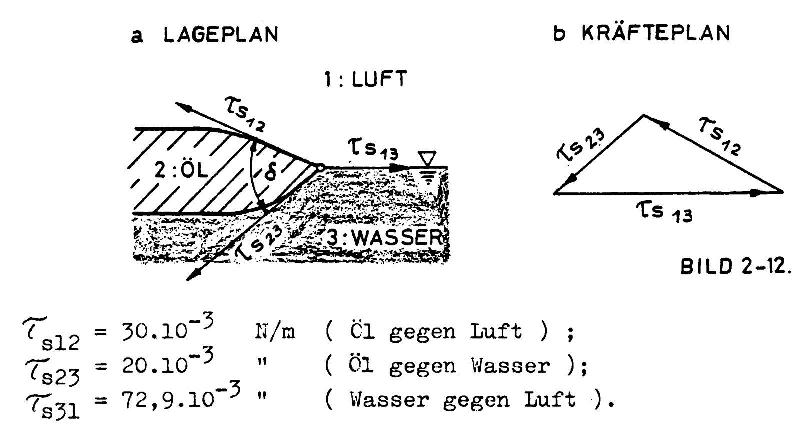


BILD 2-12.

$\tau_{s12} = 30.10^{-3}$ N/m (Öl gegen Luft) ;
$\tau_{s23} = 20.10^{-3}$ " (Öl gegen Wasser);
$\tau_{s31} = 72{,}9.10^{-3}$ " (Wasser gegen Luft).

Lösung:

Lageplan und qualitativer Kräfteplan (Bild 2-12) weisen den Lösungsweg.Bei der Zeichnung des realen Kräfteplans muß man jedoch feststellen,daß bereits die algebraische Summe der beiden kleinen Dreiecksseiten kleiner ist als die große: $30.10^{-3}+20.10^{-3} < 72{,}9.10^{-3}$! -
Daraus folgt die Tatsache,daß sich gar kein sich schließendes Kräftedreieck angeben läßt.Die Oberflächenspannung τ_{s13} überwiegt,weshalb eine resultierende Oberflächenspannung den Öltropfen auseinanderzieht: Das Öl breitet sich u.U. bis zu einer molekularen Ölhaut auf der Wasseroberfläche aus.-Dieser dünne Ölfilm bewirkt auch eine Dämpfung der Amplituden von Kapillarwellen auf der Wasseroberfläche.

3.Beispiel

In jeder Grenzfläche herrscht eine Oberflächenspannung,auch in der Grenze zwischen einer festen Wand und einer Flüssigkeit oder einem Gas.

Aus Bild 2-13 geht hervor, daß auf einer Glasplatte (3) ein Wassertropfen (2) liegt unter Anwesenheit der Atmosphäre (1).-
Man ermittle den Flankenwinkel δ ,wenn die Oberflächenspannungen angegeben werden zu:

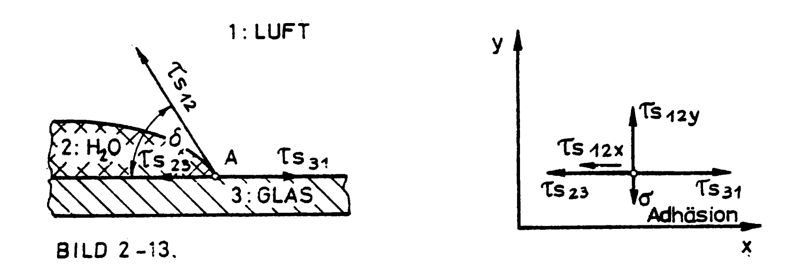


BILD 2-13.

$\tau_{s12} = 72{,}9 \cdot 10^{-3}$ N/m (Wasser gegen Luft);
$\tau_{s23} = 28 \cdot 10^{-3}$ " (Wasser gegen die Wand);
$\tau_{s31} = 90 \cdot 10^{-3}$ " (Wand gegen Luft).

Lösung:

Das Kräfte- bzw. Spannungsgleichgewicht in horizontaler Richtung ergibt:

$$\sum \tau_{six} = -\tau_{s23} - \cos\delta \cdot \tau_{s12} + \tau_{s31} = 0 \quad ; \text{ damit folgt:}$$

$$\boxed{\cos\delta = \frac{\tau_{s31} - \tau_{s23}}{\tau_{s12}}} \qquad (2\text{-}25).$$

Mit den angeführten Zahlenwerten entsteht ein Flankenwinkel von

$$\underline{\underline{\delta = 31{,}7^{\circ}}}.$$

Die Vertikalkomponente der Oberflächenspannung τ_{s12} wird durch Adhäsion von der Wand aus kompensiert!

4.Beispiel

Wenn man ein Haarröhrchen in die Oberfläche einer benetzenden Flüssigkeit eintaucht,dann steigt die Flüssigkeit bekanntlich in dem Rohr hoch.Dieser Effekt wird mit Kapillarität bezeichnet (genauer: Kapillaraszension).-Wie hoch steigt nun Wasser in einem Röhrchen ,wenn bei 20°C die Oberflächenspannung bzw. Kapillarkonstante zwischen Rohr und Wasser $\tau_{s12} = 72{,}9 \cdot 10^{-3}$ N/m beträgt bei einem Durchmesser von d= 3 mm,dem Randwinkel $\alpha \approx 0$ und der Dichte $\rho_W = 1000$ kg/m³ und $\rho_2 \ll \rho_1$?

Lösung:

In Bild 2-14 sind die notwendigen Größen eingetragen. Das Druckgleichgewicht bezüglich eines mittleren Säulenelements beträgt:

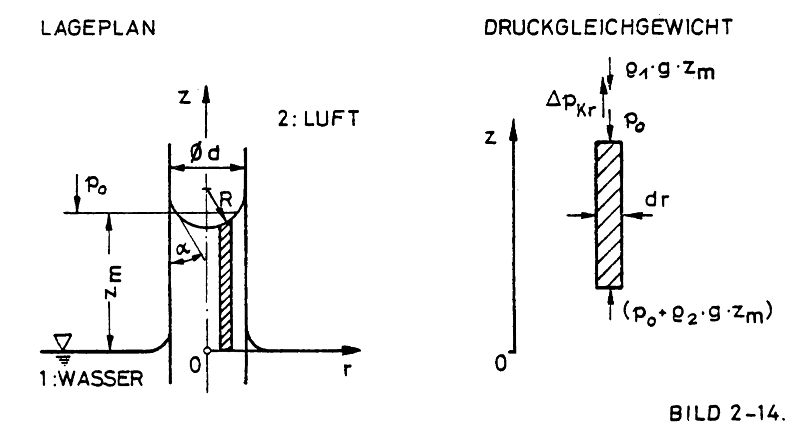


BILD 2-14.

$$\sum p_i = -p_o + \Delta p_{Kr} - \varrho_1 . g . z_m + (p_o + \varrho_2 . g . z_m) = 0 \quad ;$$

zur Berechnung von Δp_{Kr} nach Gl. (2-23) wird vereinfachend $R_1 = R_2$ (kugeliger Meniskus) angenommen, so daß sich Δp_{Kr} unter Beachtung von $R = d/(2 . \cos\alpha)$ angeben läßt mit:

$$\boxed{\Delta p_{Kr} = 4 . \tau_s . \cos\alpha \, / d} \qquad (2\text{-}26).$$

Führt man diesen Wert in die obige Druckgleichgewichtsgleichung ein, dann folgt für die mittlere Steighöhe:

$$\boxed{z_m = \frac{4 . \tau_{s12} . \cos\alpha}{d . (\varrho_1 - \varrho_2) . g}} \qquad (2\text{-}27).$$

Das Einsetzen der Daten ergibt:

$$\underline{\underline{z_m}} = \frac{4 . 72{,}9 . 10^{-3} . \cos 0^o}{0{,}003 . 1000 . 9{,}81} = \underline{\underline{0{,}01 \text{ m.}}}$$

Beachtet man, daß die Größen: τ_{s12}, α, g, ϱ_1 und ϱ_2 unabhängig von den Rohrabmessungen sind, dann kann man doch folgende Zusammenstellung notieren:

$$z_m \cdot d = 4 \cdot \frac{\tau_{s12} \cdot \cos\alpha}{g \cdot (\rho_1 - \rho_2)} = \text{const} \qquad (2\text{-}28).$$

Dieser Zusammenhang ist unter dem Namen Jurinsches Gesetz bekannt. Die Jurinsche Konstante lautet für Wasser und Glasrohr bei Anwesenheit atmosphärischer Luft in Abhängigkeit von der Temperatur, wenn man d und z_m in mm angibt:

Temperatur in K :	273	283	293	303	313
const in mm^2 :	30,8	30,2	29,7	29,2	28,6

5. Beispiel

In einem Kapillarrohr bleibt ein Wasserpfropfen hängen. Man bestimme die mittlere Länge h, wenn folgende Angaben gemacht werden, Bild 2-15:

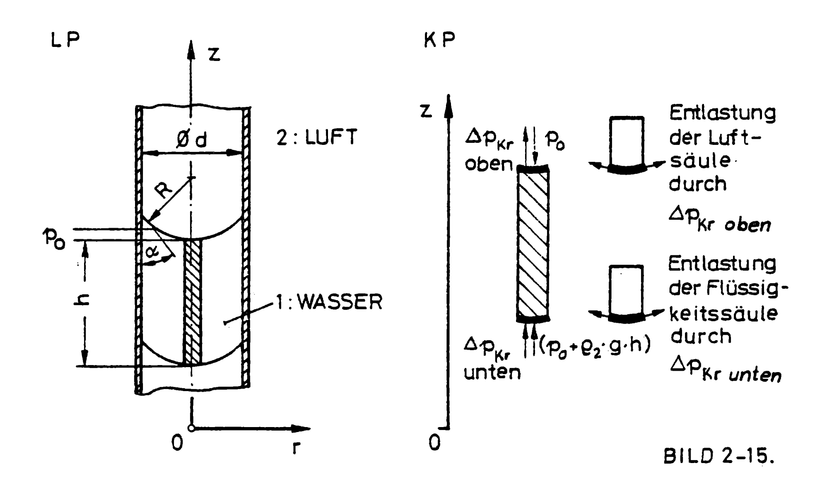


BILD 2-15.

$\tau_{s12} = 70 \cdot 10^{-3}$ N/m; d = 2 mm; freie Oberflächen entsprechen Halbkugeln: Randwinkel $\alpha = 0$; $\rho_W = 1000$ kg/m^3; ρ_{Luft} darf vernachlässigt werden.

Lösung:

Für einen beliebigen Säulenausschnitt gilt die Druckgleichheit:

$$\sum p_{iz} = -p_o + \Delta p_{Kr,oben} - \rho_W \cdot g \cdot h + (p_o + \rho_{Luft} \cdot g \cdot h) + \Delta p_{Kr,unten} = 0 .$$

Die Krümmungsdrücke lassen sich vereinfacht mit Gl. (2-26) berechnen. Somit folgt:

Mit Zahlenwerten folgt:

$$\underline{\underline{h}} = \frac{8.70.10^{-3}}{0,002.9,81.1000} = \underline{\underline{0,0285 \text{ m}}} .$$

6. Beispiel

Wird ein Kapillarrohr in eine nicht benetzende Flüssigkeit eingetaucht, so sinkt erfahrungsgemäß der Flüssigkeitsspiegel im Rohr ab (Kapillardepression). - Man bestimme die Absenkung bei Quecksilber ($\tau_s = 471.10^{-3}$ N/m), wobei zudem die Annahme eines halbkugeligen Meniskus zulässig sei. - Rohrdurchmesser d = 5 mm; ρ_{Hg} = 13 600 kg/m^3; $\rho_2 \ll \rho_1$!

Lösung:

Das Druckgleichgewicht in Höhe N-N, Bild 2-16, lautet:

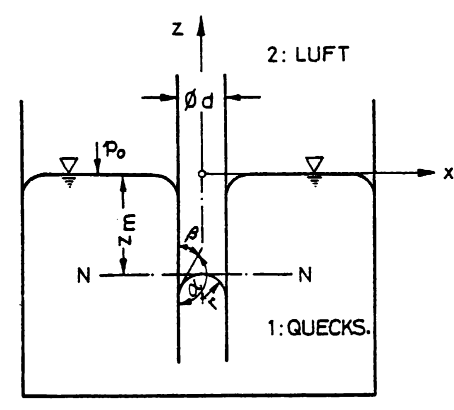


BILD 2-16.

$$\sum p_{iz} = -p_o - \rho_2 \cdot g \cdot z_m - \Delta p_{Kr} + (p_o + \rho_1 \cdot g \cdot z_m) = 0 .$$

Mit Gl. (2-26) und der Annahme, daß der Randwinkel 180° betrage, folgt:

$$\beta^\circ = 180^\circ - \alpha^\circ$$

$$\boxed{z_m = -\frac{4.\tau_{s12}.\cos\beta}{d.(\rho_1 - \rho_2).g}} \quad (2\text{-}29);$$

in Zahlen:

$$z_m = -\frac{4.471.10^{-3}.\cos 0^\circ}{0,005.13600.9,81}$$

$$\underline{\underline{z_m = -2,8 \text{ mm.}}}$$

7. Beispiel

Aus einem senkrechten Röhrchen treten am unteren Ende Flüssigkeitstropfen aus. Der Tropfendurchmesser ist kurz vor der Ablösung grösser als der Rohrdurchmesser, Bild 2-17. Beim Losreißen fällt aller-

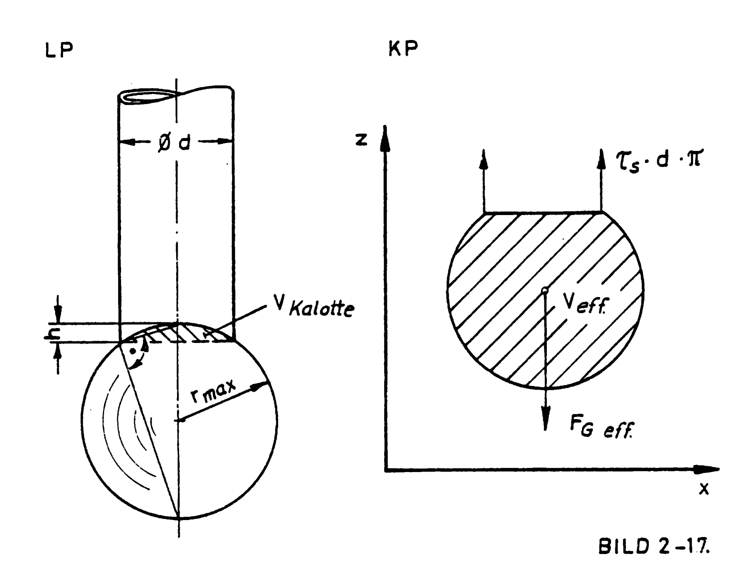


BILD 2-17.

dings nur ein kleinerer Tropfen ab. Der Rest des großen Tropfens bleibt im Rohr zurück. - Experimente ergaben folgende Beziehung zwischen dem Maximalvolumen und dem effektiven Fallvolumen:

$$V_{eff} = 0{,}8963 . V_{max} \ .$$

Demnach lautet dann die Beziehung zwischen den analogen Tropfenradien:

$$r_{eff} = 0{,}9642 . r_{max} \ .$$

Durch ein Glasröhrchen fließt Mineralöl ($d = 3$ mm; $\tau_s = 70.10^{-3}$ N/m; $\varrho_{Öl} = 850$ kg/m^3) und tropft ab. - Man ermittle:

a) den effektiven Kugelradius r_{eff} ;

b) den maximalen Kugelradius nach experimenteller Angabe;

c) den relativen Fehler der Volumina, wenn man von der Vorstellung ausgeht, daß das Effektivvolumen des fallenden Tropfens gerade dem Volumen ($V_{max} - V_{Kalotte}$) nach Bild 2-17 entspräche.

Lösungen:

a) r_{eff} : In der Abreißphase setzt man das Tropfengewicht gleich der ringförmig angeordneten Haltekraft infolge der Oberflächenspannung und schreibt:

$\pi \cdot d \cdot \tau_s = F_{G,eff} = g \cdot \rho_{Öl} \cdot V_{eff} = g \cdot \rho_{Öl} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{eff}^3$. Damit folgt:

$$r_{eff} = \sqrt[3]{\frac{d \cdot \tau_s \cdot 3}{\rho_{Öl} \cdot g \cdot 4}} = \sqrt[3]{\frac{0,003 \cdot 70 \cdot 10^{-3} \cdot 3}{850 \cdot 9,81 \cdot 4}} = 0,002663 \text{ m} = \underline{\underline{2,663 \text{ mm}}}.$$

b) r_{max} :

$$r_{max} = r_{eff}/0,9642 = 2,663/0,9642 = \underline{\underline{2,762 \text{ mm}}}.$$

c) $\Delta V/V_{eff}$:

$$V_{max} - V_{kal} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r_{max}^3 - \frac{\pi}{3} \cdot h^2 \cdot (3 \cdot r_{max} - h) \qquad (a).$$

Mit dem Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck ergibt sich nachstehende Hilfsgleichung zur Elimination von h :

$$(d/2)^2 = h \cdot (2 \cdot r_{max} - h)$$

$$h = r_{max} - \sqrt{r_{max}^2 - d^2/4} \qquad (b).$$

Mit den Zahlenwerten erhält man aus (b):

$\underline{h} = 2,762 - \sqrt{2,762^2 - 3^2/4} = \underline{0,4428 \text{ mm}}$; nun folgt mit (a):

$\underline{V_{max} - V_{Kal}} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2,762^3 - \frac{\pi}{3} \cdot 0,4428^2 \cdot (3 \cdot 2,762 - 0,4428) = \underline{86,7446 \text{mm}^3}$;

$\underline{V_{eff}} = \underline{86,6487 \text{ mm}^3}$ .Damit beträgt der relative Fehler:

$$\underline{\underline{\Delta V / V_{eff} = 0,11 \%}} \quad .$$

Als Nachtrag zu diesem Beispiel ist zu erwähnen,daß man mit der gezeigten Anordnung die Kapillarkonstante für relativ zähe (rheologische) Medien bestimmt(Stalagmometrie!),wobei es gilt,das Tropfengewicht und den Tropfendurchmesser zu messen.-Auswertungsgleichung hierfür ist die unter Pos. a) angeführte Gleichgewichtsgleichung.

2.9. Wärmeeigenschaften

2.9.1. Theorie

Die Volumenausdehnung beträgt:

$$\boxed{V_2 = V_1 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta t)} \qquad (2\text{-}30).$$

Es bedeuten: V_2 in m^3 : Volumen nach der Temperaturänderung;
V_1 " " : Volumen vor der Temperaturänderung;

β in 1/K oder 1/°C : Volumenausdehnungskoeffizient;
ΔT oder Δt in K oder °C : Temperaturdifferenz $T_2 - T_1$ oder $t_2 - t_1$.

Zu- oder abgeführte Wärmemengen berechnen sich mit der allbekannten Formel:

$$\boxed{Q = m \cdot c \cdot \Delta t} \quad (2\text{-}31).$$

Es bedeuten: Q in J : Wärmemenge
m " kg : Masse;
c " J/(kg.K): spezifische Wärme
$\Delta T = \Delta t$: Temperaturdifferenz.

Beginnt eine Flüssigkeit zu sieden,so ist ihr zur Sattdampfbildung die dem herrschenden Druck entsprechende Verdampfungswärme r in J/kg zuzuführen.Während der Verdampfung bleibt die Temperatur konstant.Die gleiche Wärmemenge ist bei der entsprechenden Kondensation abzuführen.-Analoges gilt für den Schmelz- bzw. Erstarrungsvorgang.

2.9.2. Beispiele

1.Beispiel

In einem vertikalen Glasrohr eines Meßgerätes ist Toluol eingefüllt. Man kennt bei T_1 = 288 K die Dichte des Toluols von ρ_1 = 866 kg/m³.
Es sind zu ermitteln:

a) die Dichte des Toluols bei T_2 = 298 K,wenn der Volumenausdehnungskoeffizient mit $\beta_{Toluol} = 1{,}08.10^{-3}$ 1/K angegeben ist;
b) die Länge der Toluolsäule bei der Temperatur von T_1,und zwar für den Fall,daß bei T_2 eine Länge von 200 mm gemessen worden ist.

Lösungen:

a) ρ_2 : Man gehe davon aus,daß die Masse des Toluols im Rohr gleichbleibt: $m = \rho_1 . V_1 = \rho_2 . V_2$; damit folgt mit Gl.(2-30):

$$\rho_2 = \frac{V_1 \cdot \rho_1}{V_1 \cdot (1+\beta \cdot \Delta T)} = \frac{\rho_1}{1+\beta \cdot \Delta T} = \frac{866}{1+1{,}08.10^{-3}.10} = 856{,}75 \text{ kg/m}^3.$$

b) l_1 : Der lineare Ausdehnungskoeffizient α einer Flüssigkeit darf mit genügender Genauigkeit angenommen werden zu:

$$\boxed{\alpha = \beta / 3} \quad (2\text{-}32).$$

Somit errechnet sich die Länge l_1 mit der bekannten Gleichung für die Längenausdehnung eines stabförmigen Körpers:

$$\boxed{l_2 = l_1 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta T)} \qquad (2\text{-}33)$$

zu:

$$\underline{\underline{l_1}} = \frac{0,2}{1 + \frac{1}{3} \cdot 1,08 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = \underline{\underline{0,1993 \text{ m}}} \; .$$

2. Beispiel

Eine Masse von 5 kg Eis wird bei einem Atmosphärendruck von 1 bar, angefangen bei -8 °C, erwärmt. - Man führe so viel Wärme zu, bis aus dem Eis gerade Sattdampf geworden ist. - Man ermittle:

a) die dem Eis zuzuführende Wärmemenge, wenn man die spezifische Wärme des Eises mit c_{Eis} = 2000 J/(kg.K) angibt;
b) die gesamte Schmelzwärme bei einer spezifischen Schmelzwärme von $q_s = 0,3336 \cdot 10^6$ J/kg;
c) die Flüssigkeitswärme bis zur Verdampfung mit der spezifischen Wärme c_W = 4186 J/kgK;
d) die bei der Verdampfung zuzuführende Wärme bei einer Verdampfungswärme von $r = 2,2579 \cdot 10^6$ J/kg;
e) die insgesamt zuzuführende Wärmemenge.

Lösungen:

a) Q_{Eis} : Im Sinne von Gl.(2-31) folgt:

$$\underline{\underline{Q_{Eis}}} = 5 \cdot 2000 \cdot 8 = 80\,000 \text{ J} = \underline{\underline{80 \text{ kJ}}} \; .$$

Alle Einzelvorgänge können qualitativ in Bild 2-18 verfolgt werden.

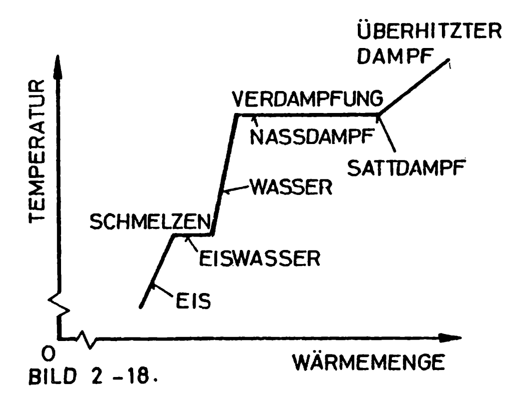


BILD 2 -18.

b) Q_S : Die beim Schmelzen aufzuwendende Wärme läßt sich mit

$$\boxed{Q_S = m \cdot q_s} \qquad (2\text{-}32)$$

angeben zu:

$Q_S = 5 \cdot 0{,}3336 \cdot 10^6 = 1{,}668 \cdot 10^6\ J = 1\ 668\ kJ.$

c) Q_W : Die Flüssigkeitswärme berechnet sich mit Gl.(2-31) zu:

$Q_W = 5 \cdot 4186 \cdot 100 = 2{,}093 \cdot 10^6\ J = 2093\ kJ$.

d) Q_r : Diese Wärmezufuhr ist mit

$$\boxed{Q_r = m \cdot r} \qquad (2\text{-}33)$$

zu ermitteln; r in J/kg steht für die Verdampfungswärme.

$Q_r = 5 \cdot 2{,}2579 \cdot 10^6 = 11{,}2895 \cdot 10^6\ J = 11\ 289{,}5\ kJ$.

e) Q_{ges}: Durch Aufsummieren ergibt sich:

$Q_{ges} = Q_{Eis}+Q_S+Q_W+Q_r = 15\ 130{,}5\ kJ$.

3. PHYSIKALISCHE EIGENSCHAFTEN DER GASE

3.1. Gemeinsame Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase

Hier werden nur diejenigen physikalischen Eigenschaften nochmals erwähnt,welche für beide Medien die gleiche Bedeutung haben und durch die gleichen Formalismen beschrieben werden:

die Masse, der Druck und die Zähigkeit .

3.2. Leichtgewichtigkeit

Gasförmige Fluide werden deshalb für leichtgewichtig gehalten,weil in der Mehrheit der Probleme das Verhältnis Gewichts- zur Druckkraft vernachlässigbar ist.Die Gewichtskraft enthält die beiden Faktoren m und $\vec{g}$ (Gl.2-8),von denen nur die Erdbeschleunigung vernachlässigbar ist,nicht aber die Masse.-Andere Massenkräfte,wie z.B. Fliehkräfte in Strömungsmaschinen,sind nicht mehr zu vernachlässigen.

3.3. Ausdehnbarkeit und Diffusion

Die Gase füllen den ihnen zur Verfügung gestellten Raum völlig aus.

Die Beweglichkeit ihrer Moleküle ist so groß,daß nur dichte Wände die Gase zurückhalten können.-Verschiedene Gase in einem Raum vermischen sich sehr schnell.Diese Erscheinung heißt Diffusion.Es gibt-im Gegensatz zu Flüssigkeiten-nur mischbare gasförmige Fluide.

3.4. Kompressibilität,Schallgeschwindigkeit

Die Druckelastizität der Gase läßt sich im Prinzip durch den gleichen Formalismus wie bei den Flüssigkeiten beschreiben (Gl.2-2).Ersetzt man in dieser Gleichung die Differenzen durch die entsprechenden Differentiale,so erhält man mit $dV/V_o = - d\varrho / \varrho$,was nach der Ableitung in Beispiel 3,Abschn. 2.3.2,bei konstanter Masse zulässig ist:

$$E = - \frac{V_o}{dV} . dp = \frac{\varrho}{d\varrho} . dp \text{ ; aus der Umformung } \frac{E}{\varrho} = \frac{dp}{d\varrho}$$

läßt sich sofort in Anlehnung an Gl.(2-4) die Schallgeschwindigkeit in Gasen notieren:

$$\boxed{c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}}} \qquad (3\text{-}1).$$

Mit dieser Geschwindigkeit breiten sich in einem Medium relativ schwache Störungen aus.-Bei Gasen ist die Schallgeschwindigkeit von der während der Ausbreitung sich einstellenden Zustandsänderung abhängig.

3.5. Wärmeeigenschaften

3.5.1. Zustand,Zustandsgröße,Zustandsänderung

Alle Momentanwerte physikalischer Größen,welche ein System (einen abgegrenzten Raum) beschreiben,kann man pauschaliert Zustand nennen.

Physikalische Größen heißen dann Zustandsgrößen,wenn sie wegunabhängig sind;das soll bedeuten: Es ist gleichgültig,auf welche Art und Weise der Momentanwert dieser physikalischen Größe erreicht worden ist.-Differentielle Änderungen von Zustandsgrößen dürfen deshalb,mathematisch gesprochen,als totale Differentiale verstanden werden: Ihr Integral stellt sich einfach als Differenz zwischen Anfangs- und Endwert dar (Linienintegral!).Den Übergang von einem Zustand zum anderen nennt man Zustandsänderung.Dabei sind verschiedenartige Übergänge denkbar.

3.5.2. Isobare Zustandsänderung

Im gesamten Kontrollbereich gilt p (x,y,z) ≡ const .Den Zusammenhang zwischen Volumen- und Temperaturänderung bei konstantem Druck,Bild 3-1,Pos. a,gibt das Gay-Lussacsche Gesetz an:

$$\boxed{V_2 = V_1 \cdot (1 + \beta \cdot \Delta T)} \qquad (3\text{-}2).$$

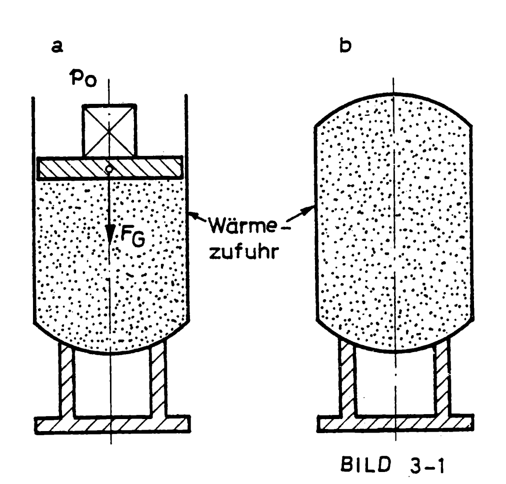


BILD 3-1

Es bedeuten:

V_1 in m^3:Volumen am Anfang;
V_2 " " : " " Ende;
β " 1/K:Volumenausdehnungskoeffizient für ideale Gase;
ΔT " K :Temperaturdifferenz.

3.5.3. Isochore Zustandsänderung

Im gesamten Kontrollbereich gilt ϱ (x,y,z) ≡ const. Bleibt das Volumen konstant, ändern sich aber Druck und Temperatur,dann gilt das Charlesche Gesetz(Bild 3-1,b):

$$\boxed{p_2 = p_1 \cdot (1 + \gamma \cdot \Delta T)} \qquad (3\text{-}3).$$

Es bedeuten:

p_2 in Pa : Druck nach der Zustandsänderung;
p_1 " " : " vor " " ;
γ " 1/K : Druckkoeffizient,der bei idealen Gasen nach Untersuchungen von Clapeyron gleich dem Volumenausdehnungskoeffizienten β ist;
ΔT " K : Temperaturdifferenz.

3.5.4. Isotherme Zustandsänderung

Überall im Kontrollbereich gilt T (x,y,z) ≡ const.-Den Zusammenhang von Volumen- und Druckänderung bei konstanter Temperatur findet man

im Boyle-Mariotteschen Gesetz:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 = p \cdot V = const \qquad (3\text{-}4).$$

3.5.5. Druckenergie

Das Produkt p.V ist bereits in Gl.(1-9) als Druckenergie vorgestellt worden. Um von dieser physikalischen Größe eine bessere Vorstellung zu bekommen, wird auf folgenden Sachverhalt hingewiesen:
Ein Gasdruckbehälter, bestehend aus einer elastischen "Ballonhülle", wird mit Gas aufgeladen. Der Druck steigt auf p_1 und das Volumen auf V_1.-Die hineingesteckte Aufbläharbeit (Verschiebearbeit gegen den Umgebungsdruck+Arbeit gegen den Formänderungswiderstand der Ballonhülle) findet sich als gespeicherte Arbeit, eben als Druckenergie $p_1 \cdot V_1$ wieder: $E_{d1} = p_1 \cdot V_1$.-Entlädt sich der Druckgasbehälter auf p_2, dann nimmt natürlich wegen des elastischen Behälters auch das Volumen auf V_2 ab. Es bleibt die Druckenergie $E_{d2} = p_2 \cdot V_2$ zurück. Am Energiespeicher ist eine Kapazitätsänderung von

$$\Delta E_d = p_1 \cdot V_1 - p_2 \cdot V_2 \qquad (3\text{-}5)$$

vorgenommen worden.

3.5.6. Allgemeine Gasgleichung

Die Verbindung der Gl.(3-2) mit Gl.(3-4) führt zur allgemeinen Gasgleichung für ideale Gase, welche den Zusammenhang zwischen den drei thermischen Zustandsgrößen : Druck, Temperatur und Volumen angibt:

$$p \cdot V = m \cdot R \cdot T \qquad (3\text{-}6).$$

Es bedeuten:

p	in	Pa	: absoluter Druck;	R in J/(kg.K)	: individuelle Gaskonstante;
V	"	m^3	: Gasvolumen;		
m	"	kg	: Gasmasse;	T " K	: absolute Temperatur.

Auf die Masse bezogen, lautet die allgemeine Gasgleichung bzw. die thermische Zustandsgleichung eines idealen Gases:

$$p \cdot v = p / \varrho = R \cdot T \qquad (3\text{-}7).$$

Dabei lautet die Definition für das spezifische Volumen:

$$v = 1 / \varrho \quad (3\text{-}8).$$

3.5.7. Wärmeaustausch, spezifische Wärme

Für die ausgetauschte Wärmemenge gilt die schon erwähnte Gl.(2-31).- Bei tropfbaren Flüssigkeiten ist die spezifische Wärme fast eine Phasenkonstante. Für Gase gilt das nicht mehr. Entscheidend für die spezifische Wärme ist die Art der Zustandsänderung. In den folgenden beiden Abschnitten werden dahingehend zwei spezielle Zustandsänderungen untersucht: die isochore und die isobare Zustandsänderung bei Wärmezufuhr beispielsweise.

3.5.8. Innere Energie

Führt man einem Gas, das in einem starren Behälter eingeschlossen ist, Wärmeenergie zu (Bild 3-1, Pos. b), dann geht die Wärme über in innere Energie des Gases:

$$\Delta U = m \cdot c_v \cdot \Delta T \quad (3\text{-}9),$$

wobei ΔU in J die Änderung der inneren Energie, m in kg die beteiligte Gasmasse, c_v in J/(kg.K) die spezifische Wärme bei konstantem Volumen und ΔT in K die Temperaturdifferenz bedeuten.

3.5.9. Enthalpie

Ist ein Gas in einem Behälter eingeschlossen, der einen reibungsfrei gelagerten Deckenkolben besitzt (Bild 3-1, Pos. a), dann wird von der zugeführten Wärmeenergie nicht nur die Temperatur des eingeschlossenen Gases ansteigen, sondern es wird auch Verschiebearbeit verrichtet gegen die Umwelt, und das alles bei konstantem Systemdruck. In Zusammenfassung spricht man von isobarer Wärmezufuhr, die sich in der Enthalpieänderung manifestiert:

$$\Delta H = m \cdot c_p \cdot \Delta T \quad (3\text{-}10).$$

Es bedeuten:

ΔH in J : Enthalpieänderung; m in kg : Masse;
c_p " J/(kgK): spezifische Wärme bei isobarer Zustandsänderung (das Gas wird hierbei nicht nur wärmer, sondern es muß zudem Verschiebearbeit verrichten! - Deshalb ist $c_p > c_v$!) ;
ΔT " K : Temperaturdifferenz.

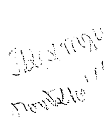
3.5.10. Erster Hauptsatz der Thermodynamik

Er stellt die kalorische Form des allgemeinen Energieerhaltungssatzes dar und gibt gleichzeitig die Definition der Wärme an:

$$\boxed{dQ = dU + p.dV} \qquad (3\text{-}11).$$

Zugeführte Wärme kann sich also aufspalten in die Zunahme der inneren Energie und in einen Verschiebearbeitsanteil.(Arbeit der Druckkraft).

Zum Begriff der Wärme ist kurz noch folgendes zu sagen:



> Wärme und mechanische Arbeit sind zwei Möglichkeiten,wie Energie Systemgrenzen überschreiten kann.<u>Wärme tritt nur während des strömenden Überganges auf</u>.Wärme ist also von dynamischer Natur.Von Wärme im Zustand der Ruhe zu sprechen, ist nicht richtig.Demnach kann Wärme auch keine thermodynamische Zustandsgröße sein.

Eine Folgerung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik ist die Robert-Mayersche Gleichung:

$$\boxed{c_p - c_v = R} \qquad (3\text{-}12).$$

Beweis:

Aus dem 1.Hauptsatz folgt z.B. für isobare Wärmezufuhr mit Gl.(3-9):

$$dQ = dm.c_p.dT = (c_v.dT + p.dv).dm$$

$$c_p = c_v + p.dv/dT \quad ;$$

die differenzierte allgemeine Gasgleichung (Gl.3-7) lautet:

$$p.dv + v.dp = R.dT \quad ;$$

da dp = 0 ist wegen der isobaren Zustandsänderung,vereinfacht sich dieser Ausdruck zu: $p \,.\, dv = R \,.\, dT$.- Setzt man die Kombination $p.dv/dT = R$ oben bei c_p ein,dann ergibt sich die bekannte Beziehung $c_p - c_v = R$!-Die Wichtigkeit dieser Formel besteht u.a. auch darin, daß der erste Hauptsatz der Thermodynamik auch in Abhängigkeit von der Enthalpie angeschrieben werden kann:

$$dq = du + p.dv$$
$$dq = c_v.dT + d(p.v) - v.dp$$
$$dq = c_v.dT + R.dT - v.dp$$
$$dq = (c_v + R).dT - v.dp = c_p.dT - v.dp$$

$$\boxed{dq = dh - v.dp} \quad (3\text{-}13).$$

3.5.11. Polytrope Zustandsänderung

Eine Zustandsänderung,gleich welcher Art,aber mit konstanter spezifischen Wärme ablaufend,wird Polytrope genannt.Im folgenden soll kurz die Formel für eine polytrope Zustandsänderung abgeleitet werden.-Die Gleichungen (2-31),(3-9) und (3-11) ergeben zusammen:

$$dQ = m.c.dT = m.c_v.dT + p.dV$$

$$m.(\ c - c_v\ ).dT = p.dV.$$

Eliminiert man hier dT mittels der Differentialform der allgemeinen Gasgleichung: $dT = (1/R).(\ p.dv + v.dp\ )$, dann folgt:

$$(1/R).(c-c_v).(p.dv+v.dp) = p.dv.$$

Durch Trennung der Variablen erhält man nachstehende Differentialgleichung:

$$\frac{c - c_p}{c - c_v} . \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0\ .$$

Sie läßt sich nach Einführung des Polytropenexponenten

$$\boxed{n = \frac{c - c_p}{c - c_v} = const} \quad (3\text{-}14)$$

einfacher anschreiben:

$$n . \frac{dv}{v} + \frac{dp}{p} = 0\ .$$

Durch Integration bekommt man:

$$n.\ \ln v + \ln p\ = konst$$

$$\boxed{p\ .\ v^n\ =\ const} \quad (3\text{-}15).$$

Damit läßt sich unter Verwendung von Gl.(3-7) und Gl.(3-8) für die thermischen Zustandsänderungen angeben:

$$\boxed{\frac{p_2}{p_1} = \left[\frac{T_2}{T_1}\right]^{\frac{n}{n-1}} = \left[\frac{v_1}{v_2}\right]^n = \left[\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right]^n} \quad (3\text{-}16).$$

Es sind hier nur so viele thermodynamischen Grundlagen angeführt worden als zum Verständnis anstehender Beispiele vonnöten sind.

3.5.12. Adiabate Zustandsänderung

Steht ein thermodynamisches System nicht im Wärmeaustausch mit seiner Umgebung, dann spricht man von einer adiabaten Zustandsänderung im System. - Mit welchem Polytropenexponenten zu rechnen ist, hängt von den systeminternen Dissipationen ab.

4. KLASSIFIKATION DER KRÄFTE IN DER FLUIDMECHANIK

Wenn später Kräftegleichgewichtsbetrachtungen anzustellen sind, dann ist es notwendig zu wissen, welche Kraftarten in der Fluidmechanik von Bedeutung sind, so daß man an Hand einer gewissen Checkliste erkunden mag, ob am freigemachten Objekt alle möglichen Kräfte angesetzt sind. Bild 4-1 gibt einen Überblick. - Kräfte sind bekanntlich als die Ursachen anzusehen für die Änderungen des Bewegungszustandes und/oder die Deformation eines Körpers. Im ersten Fall gilt es zu beachten, daß ein Geschwindigkeitsvektor sowohl der Richtung als auch der Größe nach veränderlich sein kann. Wirkrichtung der Kraft und Richtung der Bewegungsänderung sind parallel zueinander. - Die Kräfte lassen sich ihrer physikalischen Natur nach in Massenkräfte, Linienkräfte (Kapillarkräfte, Gl. 2-21) und Flächenkräfte einteilen.

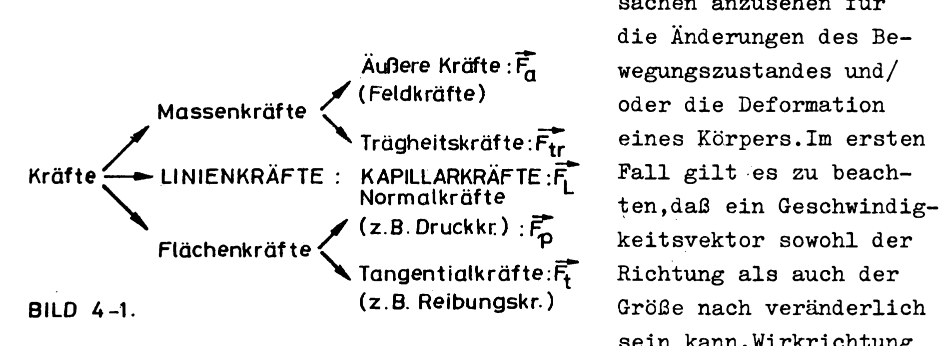


BILD 4-1.

Massenkräfte lassen sich ihrerseits als äußere Kräfte (z.B.: Feldkräfte)

$$\vec{F}_a = \int_{(m)} \vec{f}.dm = \int_{(V)} \vec{f}.\rho.dV \qquad (4-1)$$

($\vec{f}$ in m/s^2 : massenspezifische äußere Kraft, Feldbeschleunigung) oder als Trägheitskräfte verstehen:

$$\vec{F}_{tr} = -\int_{(m)} \vec{a}.dm = -\int_{(m)} \frac{d\vec{c}}{dt}.dm = -\int_{(V)} \frac{d\vec{c}}{dt}.\rho.dV \qquad (4-2).$$

Als Absolutbeschleunigung eines Körpers ist definiert:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{c}}{dt} \qquad (4\text{-}3).$$

Man vergl. auch die Gl.(1-5) und (1-6).
Der Begriff Flächenkräfte ist deshalb zur Klassifizierung geschaffen worden,um die an der Oberfläche eines Kontrollraumes angreifenden Kräfte bezüglich ihrer Orientierung zu unterscheiden;denn die Flächenkräfte lassen sich weiterhin in normal und tangential gerichtete Kräfte einteilen,weshalb sich ohne weiteres die Namen wie Druck- und Tangentialkräfte verstehen lassen.Ihre Definitionsgleichungen lauten:

Druckkräfte als Stützreaktionen:

$$\vec{F}_p = -\int_{(A)} \vec{n}.p.dA \qquad (4\text{-}4).$$

Tangentialkräfte:

$$\vec{F}_t = \int_{(A)} \vec{\tau}.dA \qquad (4\text{-}5).$$

$\vec{n}$ deutet auf den Normalenvektor hin (Einheitsvektor zur Richtungsanzeige).-Gl.(2-21) definiert die Linienkräfte F_L .
Je nach dem Vorhandensein der fünf genannten Kraftarten: $\vec{F}_a$, $\vec{F}_{tr}$, $\vec{F}_p$, $\vec{F}_t$ und $\vec{F}_L$ lassen sich drei Arbeitsbereiche der Fluidmechanik unterscheiden:

1.Arbeitsbereich

Wenn an jeder Stelle eines Kontrollraumes die Geschwindigkeit verschwindet,wenn also gilt: $\vec{c}(x,y,z) \equiv 0$, dann gibt es auch keine Trägheits- und Reibungskräfte.Wenn demnach nur Feldkräfte und Druckkräfte anzutreffen sind,dann liegt das Stoffgebiet der Fluidstatik vor. - Linienkräfte sind meistens zu vernachlässigen.

2.Arbeitsbereich

Vernachlässigt man den Einfluß der Zähigkeit,so verschwinden die Tangential-/Reibungskräfte.Man hat es hierbei nur mit Feldkräften, den Trägheitskräften und den Druckkräften zu tun.Das ist wiederum das Stoffgebiet der Mechanik vollkommener Fluide.-Die Beschäftigung mit vollkommenen Fluiden hat sich als sehr wertvoll erwiesen: Die Probleme werden theoretisch durchgespielt und danach durch Korrekturglieder und Korrekturkoeffizienten an die Wirklichkeit angepaßt.

3.Arbeitsbereich

Kommen alle vier Kraftarten vor,dann liegt die Fluidmechanik reeller Fluide vor.

TEIL II: FLUIDSTATIK

5. EINFÜHRUNG IN DIE HYDRO- UND AEROSTATIK

5.1. Ruhezustand

Die Fluidstatik ist die Lehre von den Kräften,die auf einen ruhenden Fluidbereich einwirken und sich an ihm das Gleichgewicht halten.Dieser Sachverhalt ist bereits im sogenannten ersten Arbeitsbereich des Abschnittes 4 angeklungen,wo mit $\vec{c}(x,y,z) \equiv 0$ in knappster Form die Fluidstatik definiert worden ist.Nur äußere Kräfte und Druckkräfte spielen eine Rolle;Trägheits- und Tangentialkräfte scheiden dabei aus. - Von Sonderfällen abgesehen,werden Linienkräfte also vernachlässigt.

5.2. Gleichgewichtsgleichungen

5.2.1. Vektorielle Schreibweise

Das Kräftegleichgewicht an einem flüssigen oder gasförmigen Körper wird bekanntermaßen angegeben durch:

$$\boxed{\sum \vec{F_i} = 0} \quad (5\text{-}1).$$

Da wegen der Fluidität keine Momente übertragbar sind,entfällt in diesem Zusammenhang die sonst zusätzliche Forderung nach dem Gleichgewicht der Momente $\sum \vec{M_i} = 0$.

5.2.2. Kartesische Schreibweise

Bettet man den fluidischen Körper in ein rechtwinkliges oder kartesisches Koordinatensystem ein,dann lauten die drei rechnerischen Gleichgewichtsbedingungen für ein fluidstatisches,räumliches Problem:

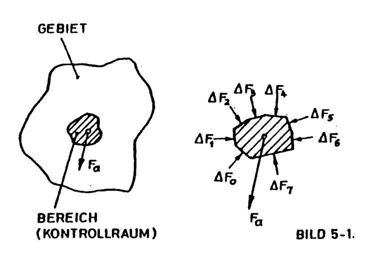
$$\boxed{\sum F_{ix} = 0 \; ; \sum F_{iy} = 0 \; ; \sum F_{iz} = 0} \quad (5\text{-}2).$$

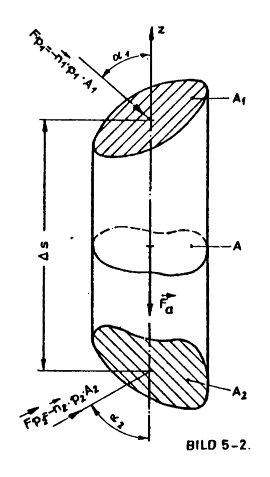
5.3. Druckkräfte als Stützreaktionen

5.3.1. Skalare Natur des Druckes, erster Pascalscher Hauptsatz

Greift man aus einem in Ruhe befindlichen Fluidgebiet einen kleineren Bereich heraus,Bild 5-1,so müssen auch die an ihm angreifenden Teilkräfte miteinander im Gleichgewicht stehen.Es sind dies einmal

z.B. eine äußere Kraft $\vec{F}_a$ und mehrere normale Stützreaktionen,die von der losgetrennten fluidischen Umwelt herrühren: $\Delta\vec{F}_1, \Delta\vec{F}_2$ .... Die auf die Oberflächenelemente bezogenen Normalkräfte entsprechen dem jeweiligen mittleren Druck.(Siehe auch Gl.1-3 und 1-4).





Ohne Einbuße an Allgemeingültigkeit kann man um die Wirkungslinie der resultierenden äusseren Kraft $\vec{F}_a$ einen zylindrischen Kontrollraum abgrenzen, der "oben und unten" beliebig schräg begrenzt ist,Bild 5-2. Da der Fluidbereich in Ruhe sein soll,müssen sich die Druckkräfte rundum gegenseitig aufheben. In Richtung der z-Achse muß folgendes Kräftegleichgewicht eingehalten werden:

$$\sum F_{iz} = -F_{p1}\cdot\cos\alpha_1 - F_a + F_{p2}\cdot\cos\alpha_2 = 0.$$

Mit Hilfe der beiden Schnittflächen A_1 und A_2 schreibt sich unter Annahme unterschiedlicher Drücke p_1 und p_2 die Gleichgewichtsgleichung folgendermaßen an:

$$-A_1\cdot p_1\cdot\cos\alpha_1 - F_a + A_2\cdot p_2\cdot\cos\alpha_2 = 0.$$

Setzt man die geometrische Erkenntnis $A_1\cdot\cos\alpha_1 = A$ (Normalschnitt !) und $A_2\cdot\cos\alpha_2 = A$ ein und erweitert gleichzeitig $F_a = f\cdot\rho\cdot\Delta V$ (vgl.Gl.4-1) mit $\Delta V = A\cdot\Delta s$,dann erhält man:

$$-p_1\cdot A - f\cdot\rho\cdot A\cdot\Delta s + p_2\cdot A = 0 \quad ; \text{davon bleibt:}$$

$$-p_1 - f\cdot\rho\cdot\Delta s + p_2 = 0 .$$

Läßt man $\Delta s \to 0$ gehen,um die äußeren Kräfte zu beseitigen,dann bleibt:

$$\underline{\underline{p_1 = p_2 = p}} \quad ,$$

was bedeutet,daß der Druck in einer ruhenden Flüssigkeit an einem ganz bestimmten Punkt im Kontrollraum unabhängig von der Richtung ist.Damit entspricht er einer skalaren Ortsfunktion und zeigt keinen

Vektorcharakter!-Das ist aber die Aussage des ersten Pascalschen Hauptsatzes.

5.3.2. Orientierung einer Druckkraft

Da der Druck eine skalare Größe ist,die Druckkraft aber natürlich ein Vektor ist,führt man über einen Normalenvektor den Richtungssinn ein,wie es beispielsweise in Bild 5-2 gezeigt worden ist:

$\vec{F}_{p1}=-\vec{n}_1 \cdot p_1 \cdot A_1$ und $\vec{F}_{p2}=-\vec{n}_2 \cdot p_2 \cdot A_2$ als Stützreaktionen;die Normalenvektoren selbst weisen aber vom Fluidgebiet oder Kontrollraum nach "außen" hin !

5.4. Potentialfunktion einer Massenkraft

5.4.1. Druckgradient

Der Gradient einer skalaren Ortsfunktion stellt einen Vektor dar, welcher in die Richtung der maximalen Änderung weist.Sein Betrag gibt den Wert der maximalen Änderung an.Dies gilt auch für den Druck p(x,y,z),da er ja einer skalaren Größe entspricht.Der Gradientvektor des Druckes lautet demnach:

$$\nabla p = \text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} \cdot i + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot j + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot k \qquad (5\text{-}3).$$

5.4.2. Gaußscher Integralsatz

Es ist gezeigt worden,daß Druckkräfte als Stützreaktionen den Zustand der Ruhe gewährleisten,wenn man das Kräftegleichgewicht an einem freigemachten Fluidbereich als Kontrollraum untersucht.Demnach steht die Summe aller äußerer Kräfte $\vec{F}_a$ mit der Summe aller Druckkräfte (Stützreaktionen) im Gleichgewicht.Es gilt also nach Bild 5-3:

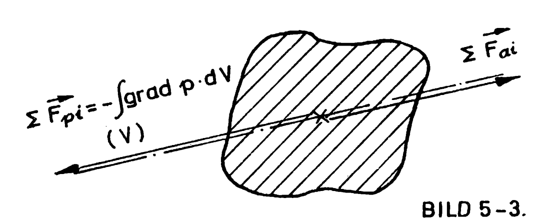


BILD 5-3.

$$\sum \vec{F}_{pi} + \sum \vec{F}_{ai} = 0$$

Man muß in diesem Zusammenhang nun unterscheiden zwischen Druckkräften,die aus dem Inneren des Fluidkontrollraumes herauskommen und nach außen wirken und denjenigen Druckkräften,die als Stützreaktionen,von außen nach innen wirkend,festzuhalten sind.- Die Aktionswirkung,also

die resultierende Druckkraft von innen nach außen,läßt sich mittels des Gaußschen Integralsatzes aus einem Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umformen:

$$\oint_{(A)} \vec{n} \cdot p \cdot dA = \int_{(V)} \nabla p \cdot dV \qquad (5\text{-}4).$$

Die diesbezügliche Stützreaktion erhält das negative Vorzeichen beim Einsetzen in die obige Gleichgewichtsgleichung!-Es ergibt sich damit unter zusätzlicher Verwendung der Gl.(4-1) folgender Zusammenhang:

$$-\int_{(V)} \nabla p . dV + \int_{(V)} \varrho \, . \vec{f} . dV = 0 \quad .$$

Der Integrandenvergleich erlaubt folgende Gleichsetzung:

$$\nabla p = \varrho \cdot \vec{f} \qquad (5\text{-}5).$$

Wenn der spezifische Feldkraftvektor komplett in der Form

$$\vec{f} = f_x . i + f_y . j + f_z . k \qquad (5\text{-}6)$$

angeschrieben wird,dann lassen sich sofort für das kartesische Koordinatensystem drei partielle Differentialgleichungen notieren:

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = f_x \; ; \; \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = f_y \; ; \; \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} = f_z \qquad (5\text{-}7).$$

Man kann dieses Gleichungssystem integrieren,wenn man die erste Gleichung mit dx,die zweite mit dy und die dritte mit dz multipliziert, weil die darauffolgende Addition der drei Gleichungen zu einem totalen Differential der linken Gleichungsseite führt, so daß der Druck auch in mathematischer Hinsicht als Zustandsgröße erkannt worden ist. (Die Integration totaler Differentiale ist wegunabhängig,was ja auch das Charakteristikum einer Zustandsgröße ist!)

$$\frac{1}{\varrho} . \underbrace{\left(\frac{\partial p}{\partial x} . dx + \frac{\partial p}{\partial y} . dy + \frac{\partial p}{\partial z} . dz \right)}_{= dp} = f_x . dx + f_y . dy + f_z . dz \qquad (5\text{-}7a).$$

Schreibt man einen Ortsvektor,Bild 5-4, folgendermaßen an:

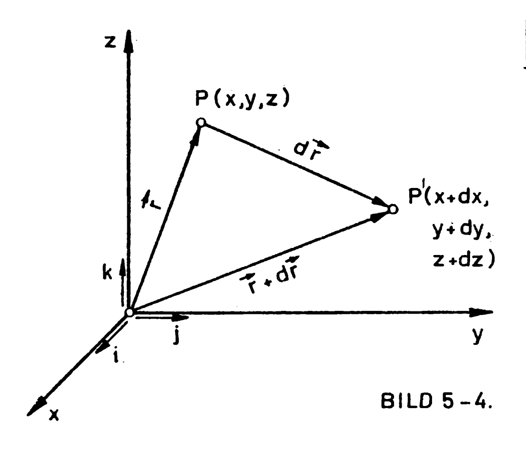


BILD 5-4.

$$\boxed{\vec{dr} = dx.i + dy.j + dz.k} \quad (5\text{-}8),$$

so erkennt man im rechten Ausdruck der Gl.(5-7a) das Skalarprodukt zweier Vektoren : $\vec{f} . \vec{dr}$!
Vereinfachend läßt sich nunmehr schreiben:

$$\boxed{\frac{dp}{\rho} = \vec{f} . \vec{dr}} \quad (5\text{-}9).$$

5.4.3. Bedeutung der Potentialfunktion

Die rechte Gleichungsseite von Gl.(5-9) ist von der Art einer mechanischen Arbeit.Da aber im Zustand der Ruhe am Kontrollraum keine Arbeit verrichtet werden kann,handelt es sich offenbar um eine virtuelle (scheinbare,nur gedachte) Arbeit.Sie könnte aber (in Gedanken) auch nur verrichtet werden,wenn ein Energiereservoir - hier im Zustand der Ruhe handelt es sich natürlich um potentielle Energie - vorhanden wäre!-Allgemein gilt,daß bei Arbeitsverrichtung das Energieangebot abnimmt.In Bezug auf das anstehende Problem kann man schreiben:

$$\boxed{\vec{f} . \vec{dr} = - de_p = \frac{dp}{\rho}} \quad (5\text{-}10).$$

Die kartesische Entwicklung dieser Gleichung führt zu:

$$f_x.dx+f_y.dy+f_z.dz = (-\frac{\partial e_p}{\partial x}).dx + (-\frac{\partial e_p}{\partial y}).dy + (-\frac{\partial e_p}{\partial z}).dz \quad .$$

Daraus folgt:

$$\boxed{f_x = -\frac{\partial e_p}{\partial x} \quad ; \quad f_y = -\frac{\partial e_p}{\partial y} \quad ; \quad f_z = -\frac{\partial e_p}{\partial z}} \quad (5\text{-}11).$$

Bildet man aus diesen drei Komponentengleichungen zwei Vektoren, so erhält man die äußerst interessante und wichtige Beziehung:

$$\boxed{\vec{f} = - \text{grad } e_p = -\nabla e_p} \quad (5\text{-}12).$$

Im Zuge der Ableitung von Gl.(5-10) hat man die spezifische potentielle Energie e_p eingeführt (vgl.Gl.1-12).-Der negative Ausdruck: $-e_p$ wird in der Sprache der mathematischen Strömungslehre POTENTIAL genannt.In diesem Buch wird darauf verzichtet,für die Potentialfunktion ein zusätzliches Symbol einzuführen.Der Leser soll nicht durch eine weitere physikalische Größe irritiert werden,sondern ständig an die zentrale Rolle der potentiellen Energie erinnert werden!

Die Gl.(5-12) läßt sich folgendermaßen interpretieren:

Die Wegableitung von $-e_p$ ergibt den massenspezifischen Feldvektor $\vec{f}$.

Es ist gezeigt worden,daß die auf einen ruhenden Fluidbereich einwirkenden äußeren Kräfte durch ein Potential beschrieben werden können. (Diese Überlegungen gelten auch für den Fall des relativen Gleichgewichts,vgl. Abschn. 9.3.)

5.5. Allgemeine Druckformel

Die Integration der Gl.(5-9) führt zur allgemeinen Druckformel der Fluidstatik,und zwar unter Verwendung von Gl.(5-10):

$$\int_1^2 \frac{dp}{\varrho} = \int_1^2 \vec{f}.d\vec{r} = -\int_1^2 de_p = -(e_{p2} - e_{p1}) \quad ;$$

man erhält somit:

$$\boxed{\int_1^2 \frac{dp}{\varrho} = e_{p1} - e_{p2}} \qquad (5\text{-}13).$$

Sonderfälle hierzu lassen sich beispielsweise in der Hydrostatik anführen.

6. DRUCKFORMEL IN DER HYDROSTATIK

6.1. Sonderfall für inkompressible Flüssigkeiten

Ist die Dichte einer Flüssigkeit an jeder Stelle des Bereiches bzw. Kontrollraumes gleich groß,also identisch konstant: $\varrho\,(x,y,z) \equiv \text{const}$, so läßt sich die linke Seite der Gl.(5-13) einfach integrieren:

$$\int_1^2 \frac{dp}{\varrho} = \frac{1}{\varrho} \int_1^2 dp = \frac{p_2 - p_1}{\varrho}$$, weil der Druck

eine Zustandsgröße ist.Damit lautet die integrierte Gl.(5-13):

$$\boxed{\frac{p_1}{\varrho} + e_{p1} = \frac{p_2}{\varrho} + e_{p2} = \frac{p}{\varrho} + e_p = \text{const}} \qquad (6\text{-}1).$$

Diese Gleichung läßt sich folgendermaßen interpretieren: Die Summe der spezifischen Druckenergie p/ϱ (Gl. 1-10) und der spezifischen potentiellen Energie e_p ,hervorgerufen durch die Einwirkung einer äußeren Kraft,ist konstant.Das entspricht aber dem Energieerhaltungssatz bezüglich eines in Ruhe befindlichen Flüssigkeitsbereiches bzw. Kontrollraumes.

Die Gleichung $p(x,y,z) = \text{const}$ entspricht einer Fläche,auf welcher überall der gleiche Druck vorherrscht;deshalb wird auch von einer Isobarfläche gesprochen.Die Gleichung $p(x,y,z) \equiv \text{const}$ bedeutet darüberhinaus,daß der Druck im ganzen Bereich und nicht nur in einer Fläche konstant ist!

Aus Gl.(6-1) folgt zudem für den Fall $p/\varrho = \text{const}$,daß auch die spezifische potentielle Energie $e_p = \text{const}$ und $-e_p = -\text{const} = \text{konst}$, das sogenannte Potential,konstant sind.Aus diesem Grunde sind Isobarflächen auch Äquipotentialflächen!

Abschließend sei hierzu vermerkt,daß Niveauflächen sowohl Isobar- als auch Äquipotentialflächen sind.

6.2. Sonderfall für inkompressible und schwere Flüssigkeiten

Die massenspezifische Feldkraft des Erdschwerefeldes ist die allbekannte Erdbeschleunigung $\vec{g}$,Bild 6-1.Die Beziehungen der Gl.(5-11) werden nun zur Berechnung der Potentialfunktion des Erdschwerefeldes herangezogen.Das Erdschwerefeld muß sich nach den Überlegungen von Abschn. 5.4.3 durch ein Potential beschreiben lassen.

Gl.(5-12): $\vec{f} = -\nabla e_p$.

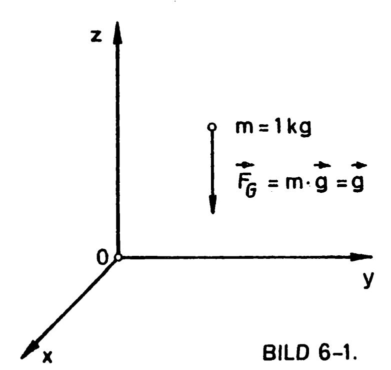


BILD 6-1.

Im Falle des Erdschwerefeldes sind

$f_x = f_y = 0$ und $\qquad f_z = -\dfrac{\partial e_p}{\partial z} = -g$! - Die unbestimmte Integration von $-de_p = -g.dz$ ergibt für die Potentialfunktion des Erdschwerefeldes:

$$\boxed{-e_p = -g.z + \text{konst}} \qquad (6\text{-}2).$$

Führt man jetzt Gl.(6-2) in Gl.(6-1) ein, so erhält man nach vorangegangener Multiplikation mit (-1) den Energieerhaltungssatz bezüglich einer in Ruhe befindlichen inkompressiblen Flüssigkeit:

$$\boxed{\frac{p}{\varrho} + g.z = \text{Konst}} \qquad (6\text{-}3).$$

Hierbei sind die Isobarflächen waagerechte Ebenen mit der Gleichung $z = \text{const}$. Analoges gilt für die Äquipotentialflächen. Damit ist auch die Aussage in Abschn. 6.1 ,Niveauflächen seien gleichbedeutend mit Isobarflächen und Äquipotentialflächen, erhärtet worden.

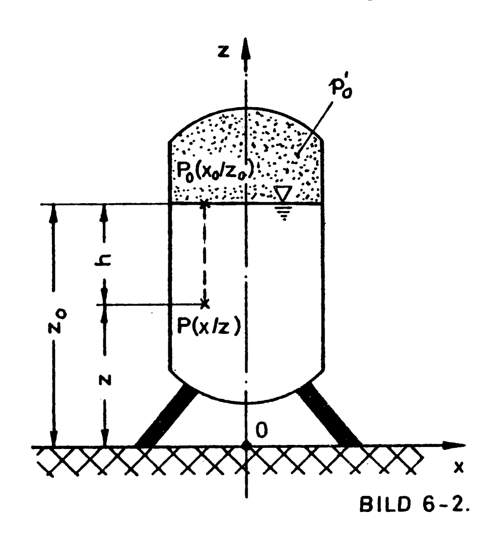


BILD 6-2.

Die Ermittlung der Integrationskonstanten in Gl.(6-3) wird an Hand eines allgemein gültigen Beispiels, Bild 6-2, durchgeführt. Für den Punkt $P_0(x_0;z_0)$ gilt:

$$\frac{p_0'}{\varrho} + g.z_0 = \text{Konst} \quad ;$$

für den Punkt $P(x;z)$ gilt:

$$\frac{p}{\varrho} + g.z = \text{Konst} \quad .$$

Durch Gleichsetzen und Umformen ergibt sich:

$$\frac{p}{\varrho} - \frac{p_0'}{\varrho} = g.(z_0 - z) \quad .$$

Kürzt man $(z_0 - z)$ mit der Tiefenangabe h ab, so schreibt sich die Druckformel speziell für inkompressible und schwere Flüssigkeiten folgendermaßen an:

$$\boxed{p = p_0' + \varrho.g.h} \qquad (6\text{-}4).$$

Hier ist p_0' der auf der Oberfläche lastende Druck.-Ist der Behälter oben offen, dann entspricht p_0' natürlich dem Atmosphärendruck p_0 !-

Man nennt in dieser Beziehung p den Absolutdruck; das Produkt $\rho \cdot g \cdot h$ wird als Atmosphärenüberdruck verstanden, wenn der Absolutdruck größer als der Atmosphärendruck ist; fällt der Absolutdruck geringer aus, dann heißt $\rho . g . h$ Atmosphärenunterdruck, Bild 6-3.

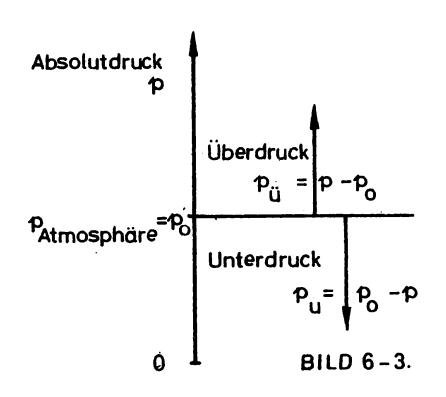


BILD 6-3.

$$p_{ü} = p - p_o = \rho . g . h$$
$$p_u = p_o - p = \rho . g . h \qquad (6\text{-}5).$$

6.3. Zweiter Pascalscher Hauptsatz

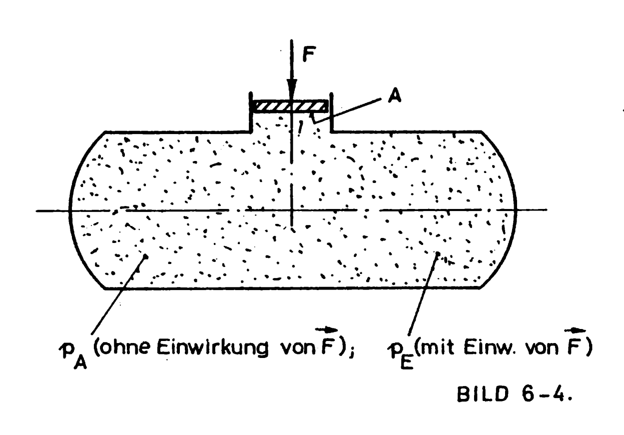


BILD 6-4.

Wird über einen Kolben von der Fläche A, Bild 6-4, eine Kraft $\vec{F}$ in einen flüssigen Bereich (Kontrollraum) eingeleitet, so entsteht ein Zusatzdruck $\Delta p = F/A$ (vgl. auch Gl. 1-3 und 1-4), welcher sich im ganzen Bereich ausbreitet und an jeder Stelle (x;y;z) zum Vordruck p_A dazukommt:

$$p_E = p_A + \Delta p \qquad (6\text{-}6).$$

Das aber ist die Aussage des zweiten Pascalschen Hauptsatzes.

6.4. Sonderfall für inkompressible Flüssigkeiten unter Vernachlässigung der Erdschwere

Ein einfaches Zahlenbeispiel soll zeigen, von welcher Grenze an man u.U. den Einfluß der Erdschwere gegenüber den Druckkräften wird ver-

nachlässigen können.
Das Gewicht eines Wasserwürfels von 1 m Kantenlänge beträgt bekanntlich $F_G = m \cdot g = 1000.1.9{,}81 = 9810$ N .-Ein aufgeprägter Zusatzdruck betrage $\Delta p = 10$ bar, weshalb beispielsweise die Bodenfläche des Wasserwürfels von der Größe 1 m^2 mit einer zusätzlichen Druckkraft $F_{\Delta p} = 1.10.10^5 = 10^6$ N belastet wird. Das Verhältnis $F_G/F_{\Delta p} = 0{,}00981$ besagt doch, daß der Gewichtskrafteinfluß noch etwa 1 % beträgt.-Man sieht also, daß bei noch höheren Zusatzdruckkräften der Schwereeinfluß immer mehr ins Hintertreffen gerät. Vernachlässigt man die Schwere, dann vereinfacht sich die Gl.(6-4) zu $p = p_o'$, was zudem noch präziser als $p\,(x;y;z) = p_o' \equiv$ const angeschrieben werden kann: Der Kontrollraum ist danach ein isobarer Raum!

6.5. Beispiele

1.Beispiel

Wie groß ist der absolute Druck in einer Meerestiefe von 200 m ?- Die Dichte des Meerwassers betrage $\varrho = 1035$ kg/m^3 und der Atmosphärendruck sei $p_o = 1{,}015$ bar.

Lösung:

Nach Gl.(6-4) folgt einfach: $p = 1{,}015.10^5 + 1035.9{,}81.200$

$$p = 2{,}132.10^6 \text{ Pa} = 21{,}32 \text{ bar.}$$

2.Beispiel

Wie tief befindet sich ein Punkt P(x,y,z) unter dem Wasserspiegel (Wasserdichte $\varrho_W = 1000$ kg/m^3), wenn ein Überdruck von $p_ü = 0{,}4$ bar an dieser Stelle gemessen wird?

Lösung:

Nach Gl.(6-5) ergibt sich sofort:

$$p_ü = 1000.9{,}81.h = 40\ 000 \text{ Pa}$$

$$h = 4{,}0775 \text{ m.}$$

3.Beispiel

In einer Wasserleitung wird ein Unterdruck von $p_u = 0{,}4$ bar gemessen. Wie hoch ist der absolute Druck, wenn der Atmosphärendruck mit p_o = 1020 mbar angegeben wird?

Lösung:

Mit Gl.(6-5) erhält man: $\underline{\underline{p}} = p_o - p_u = 1{,}02-0{,}4 = \underline{\underline{0{,}62 \text{ bar}}}$.

4.Beispiel

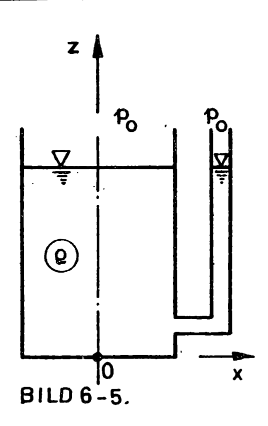


BILD 6-5.

Ein nach oben offener Behälter ist mit Wasser gefüllt und mit einem seitlichen Steigrohr versehen,Bild 6-5.-Warum kann das Steigrohr als Niveauanzeiger Verwendung finden?

Lösung:

Nach Gl.(6-3) folgt bezüglich der freien Oberfläche,welche ja die Kontaktfläche zwischen der Luft und dem Wasser darstellt:

$p_o/\varrho + g.z =$ Konst .Daraus folgt:

$$\underline{\underline{z = \text{const}}} \quad .$$

Demnach gilt für die gesamte freie Oberfläche diese Beziehung,weshalb auch in dem Steigrohr die Flüssigkeit gleich hoch wie im Behälter steht.-Hinter diesem Beispiel verbirgt sich das"Prinzip kommunizierender Röhren".Es besagt:

> Untereinander in Verbindung stehende offene Behälter zeigen bei eingefüllter inkompressibler Flüssigkeit in jedem Gefäß den gleichen Flüssigkeitsstand!
> (Die Niveaufläche z = const ist Isobar- und Äquipotentialfläche!)

5.Beispiel

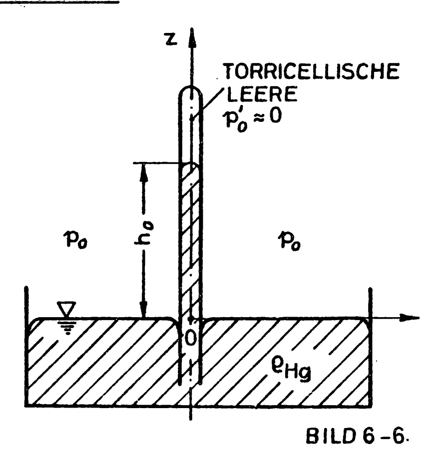


BILD 6-6.

Über- und Unterdrücke werden mit Mano- und Vakuummetern gemessen.Die Instrumente zur Messung des Absolutdruckes heißen Barometer.Der Atmosphärendruck ist beispielsweise ein Absolutdruck.-
Als einfaches Gerät wird das Torricelli-Barometer vorgestellt:
Man fülle ein etwas mehr als 1 m langes Glasrohr mit Quecksilber an, bis die gesamte Luft entwichen ist. Dann verschließe man das Rohr mit einem Finger,drehe das Rohr um 180°

herum und tauche es in ein Quecksilberbad ein, Bild 6-6. Dabei stellt man fest, daß die Quecksilbersäule auf h_0 zurückfällt.-Der Raum über der Quecksilbersäule wird Torricellische (auch barometrische) Leere genannt. Der Druck p_0' im Sinne der Gl.(6-4) ist praktisch null, wenn man von ein paar verdampften Quecksilbermolekülen einmal absieht.- Im Fußpunkt O in der Quecksilbersäule liegt der Druck $p = \varrho_{Hg} \cdot g \cdot h_0$, der auch gleich dem gesuchten Atmosphärendruck ist, denn O liegt in gleicher Höhe wie die freie Oberfläche, welche mehrfach schon als Isobarfläche erkannt worden ist.-Hier sei hervorgehoben, daß eine Druckmessung gegen das Vakuum als Absolutdruckmessung bezeichnet wird.-In der Meteorologie ist der Normaldruck der Atmosphäre mit h_0 = 760 mm Hg festgelegt, was mit ϱ_{Hg} = 13 590 kg/m^3 einen Normaldruck von

$p_0 = 13\,590 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}76 = 1{,}0132 \cdot 10^5$ Pa = 1013,2 mbar ergibt.

Man nehem nun an, daß beim Einfüllen des Quecksilbers etwas Wasser wegen der nassen Rohrwand in die Torricellische Leere gelangt ist.- Wie wird hierdurch die Messung des Atmosphärendrucks verfälscht bzw. mit welcher Korrektur müßte man arbeiten?

Lösung:

Jede Flüssigkeit besitzt für ihre Momentantemperatur einen individuellen Dampfdruck. Das Wassertröpfchen wird also verdampfen, d.h.: der Druck im Fußpunkt O setzt sich aus $p_0' = p_{Dampf}$ und $\varrho_{Hg} \cdot g \cdot h_0$ zusammen:

$$p_0 = p_D + \varrho_{Hg} \cdot g \cdot h_0 \quad .$$

Damit man eine Vorstellung von der Größenordnung der Meßkorrektur bekommt, werden einige Dampfdruckdaten angegeben:

t in ^oC	0	10	20	30	40
p_0' in mbar	6,108	12,27	23,37	42,43	73,75
" " mm Hg	4,581	9,203	17,53	31,81	55,31

Fazit: Beim Einfüllen des Quecksilbers muß auf eine trockene Rohrinnenwand besonders geachtet werden!

6. Beispiel

Auf der Flüssigkeit, die sich in einem geschlossenen Behälter befindet, lastet ein Gaspolster vom Absolutdruck p_0'.-Das Gefäß weist neben einem Standglas auch ein Steigrohr auf, Bild 6-7.
Man ermittle den absoluten Gasdruck, wenn folgende Meßdaten vorliegen:
ϱ_W = 1000 kg/m^3 ; h = 2 m ; p_0 = 1 bar .

Lösung:

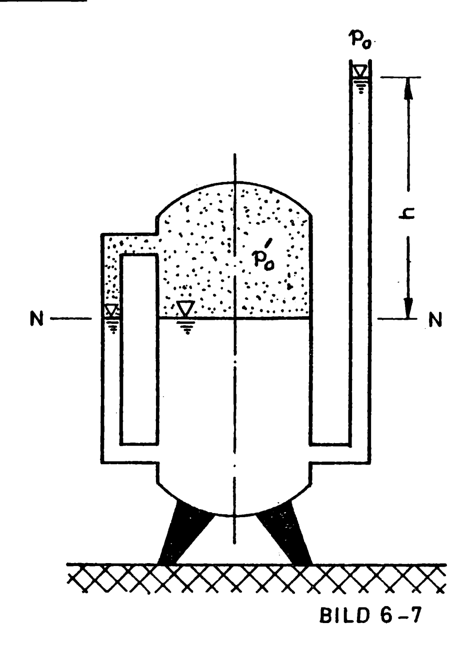


BILD 6-7

Die Ebene N-N erfüllt als erste, von oben her betrachtet, die Bedingung der vollständigen Berührung mit der Flüssigkeit. Alle weiteren Ebenen darunter erfüllen natürlich ebenfalls diese Bedingung. - Die Ebene N-N ist eine Isobarebene; man wählt sie deshalb als Referenzebene, weil dort der gesuchte Druck p_o' vorherrscht.

$p_o' = \varrho_W \cdot g \cdot h + p_o$

$p_o' = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 2 + 1 \cdot 10^5$

$p_o' = 0{,}11962 \cdot 10^6$ Pa

$p_o' = 1{,}1962$ bar.

Die Wassersäule mißt übrigens gerade den Atmosphärenüberdruck $\varrho_W \cdot g \cdot h$.

7.Beispiel

In Bild 6-8 wird eine Differenzdruck-Meßanordnung gezeigt. In der Kuppe der Leitung, welche die beiden Behälter meßtechnisch verbindet, wird Preßluft eingegeben, und zwar über den Hahn Ha.

a) Welche Rolle spielt der Hilfsdruck p_x bezüglich der Auswertung der Meßwerte?

b) Welcher Differenzdruck besteht zwischen den beiden Gasdrücken p_1 und p_2, wenn man folgende Werte kennt:

$$\varrho_1 = 1000 \text{ kg/m}^3 \;;\; \varrho_2 = 900 \text{ kg/m}^3 \;;\; h_1 = 0{,}9 \text{ m} \;;\; h_2 = 0{,}5 \text{ m} ?$$

c) Wie ändert sich die Säulendifferenz Δh bei Variation des Sperrluftdruckes p_x ?

d) Was geschieht, wenn der Hahn Ha so lange geöffnet bleibt, bis die Luft verdrängt ist, und wenn er danach wieder verschlossen wird?

Lösungen:

a) Rolle von p_x:

Für die beiden Gasdrücke erhält man mit dem bisher Gesagten:

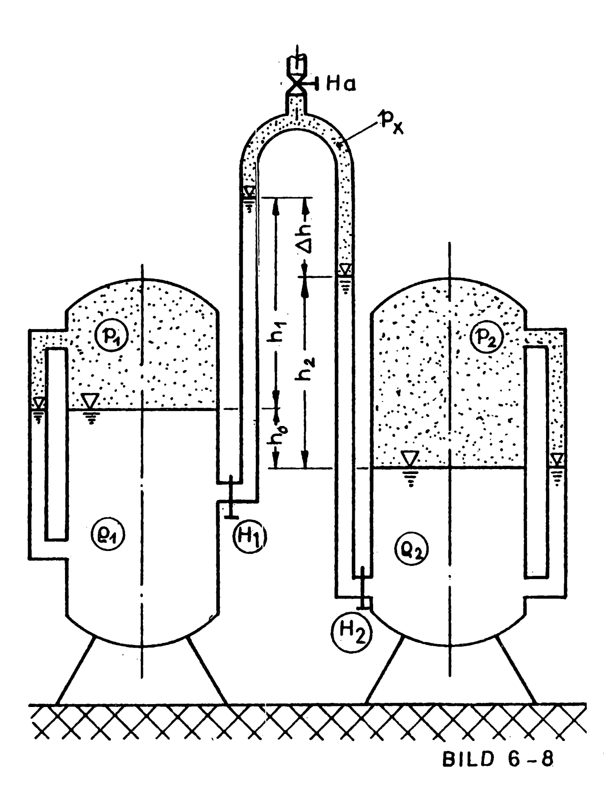


BILD 6-8

$$p_1 = p_x + \varrho_1 \cdot g \cdot h_1 \; ;$$

$$p_2 = p_x + \varrho_2 \cdot g \cdot h_2 \; .$$

Durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt sich für den angestrebten Druckunterschied:

$$\underline{\Delta p = p_1 - p_2 = g \cdot (\varrho_1 \cdot h_1 - \varrho_2 \cdot h_2)} .$$

Diese Ergebnisgleichung enthält den Hilfsdruck p_x nicht mehr. Das heißt doch: Für die Auswertung der Meßergebnisse ist die Größe von p_x nicht erforderlich!

b) $\underline{\Delta p}$:

Mit den Zahlenwerten bekommt man aus dem oben ermittelten Zusammenhang:

$$\underline{\underline{\Delta p}} = 9{,}81 \cdot (1000 \cdot 0{,}9 - 900 \cdot 0{,}5) = 4{,}4145 \cdot 10^3 \text{ Pa} = \underline{\underline{0{,}044 \text{ bar}}}.$$

c) $\underline{\Delta h = f(p_x)}$: Geometrische Beziehungen lauten: $h_0 + h_1 = h_2 + \Delta h$; mit den Druckgleichungen aus Position a) folgt:

$$\Delta h = h_0 + h_1 - h_2 = h_0 + \frac{p_1 - p_x}{g \cdot \varrho_1} - \frac{p_2 - p_x}{g \cdot \varrho_2} = h_0 + \frac{p_1}{g \cdot \varrho_1} - \frac{p_2}{g \cdot \varrho_2} + \frac{p_x}{g} \cdot \left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Hierin sind alle Größen bis auf Δh und p_x konstant. Die Säulendifferenz Δh ändert sich also linear mit dem Hilfsdruck p_x! -Mit größerem p_x wächst wegen der höheren Meßempfindlichkeit auch die Meßgenauigkeit. Übrigens ist bei Gleichheit der Dichten Δh von p_x unabhängig.

d) Bei geöffnetem Hahn Ha wird die Luft, von jeder Behälterseite ausgehend, verdrängt, bis Flüssigkeit herausgepreßt wird. Schließt man nun den Hahn, dann wird so lange Medium 1 von links nach rechts (Bild 6-8) fließen, bis es zum Druckausgleich in den beiden Behäl-

tern gekommen ist.Zur Vermeidung dieses Umstandes verwende man die beiden unteren Hähne H_1 und H_2.

8.Beispiel

Zwei Meßapparaturen gestatten die Bestimmung der Dichte einer Lösung ρ_L im Vergleich mit destilliertem Wasser ρ, Bild 6-9.-In Pos. a wird mit Luftüberdruck- und in Pos. b mit Luftunterdruck gearbeitet. Angaben: $h = 0{,}2$ m ; $h_L = 0{,}15$ m; $\rho = 1000$ kg/m^3.-Man bestimme:

a) die Dichte einer Salzlösung ρ_L mit dem Überdruckverfahren;

b) ebenso, aber mit dem Unterdruckverfahren.

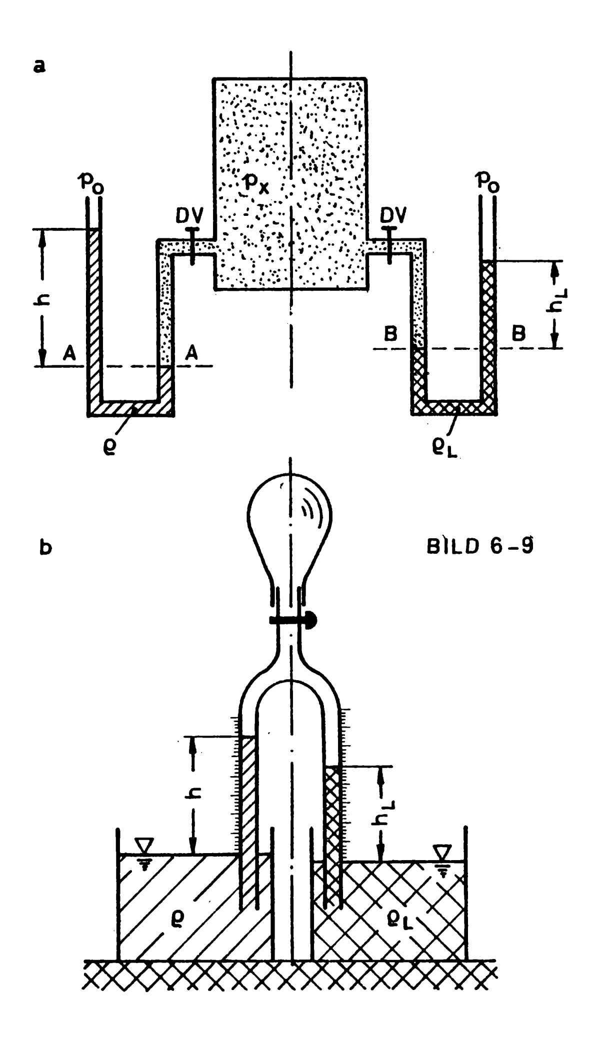


BILD 6-9

Lösungen:

a) $\rho_{L,ü}$: Bei geschlossenen Hähnen DV gieße man links Wasser und rechts die Salzlösung ein. Bringt man nun den Behälter in Verbindung mit den U-Rohren, dann steigen wegen des Überdruckes p_x die Flüssigkeitssäulen verschieden hoch. Es gilt:

$p_{AA} = p_x = p_o + \rho \cdot g \cdot h$ und

$p_{BB} = p_x = p_o + \rho_L \cdot g \cdot h_L$,woraus sich ergibt:

$$\rho_L = \rho . h/h_L = 1000.0{,}20/0{,}15 = 1333{,}3 \text{ kg/m}^3.$$

b) $\rho_{L,u}$: Zum gleichen Ergebnis gelangt man, indem man mit der Gummiblase (Bild 6-9, Pos. b) einen Unterdruck erzeugt und die

Flüssigkeiten hochsteigen läßt.Diese Meßmethode ist praktischer.

9.Beispiel

Das Schema eines Druckverstärkers wird in Bild 6-10,Pos. a,gezeigt.

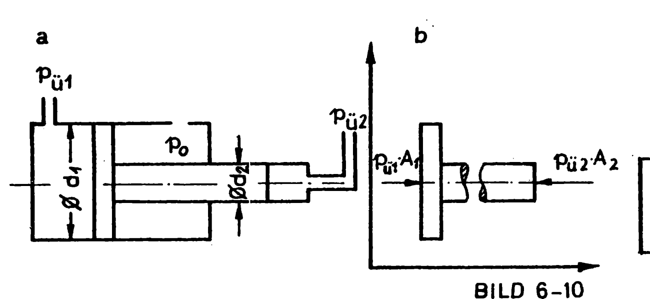


BILD 6-10

Der Wirkungsgrad wird auf Grund quasi-statischer Arbeiten folgendermaßen definiert:

$$\eta = \frac{F_2 \cdot s}{F_1 \cdot s} = \frac{p_{ü2} \cdot A_2}{p_{ü1} \cdot A_1} \qquad (6\text{-}7).$$

Man bestimme für d_1= 100 mm und d_2= 20 mm bei $p_{ü1}$ = 10 bar:

a) im verlustlosen Fall den Überdruck am Ausgang $p_{ü2}$;

b) den Überdruck $p_{ü2}$ für den Fall,daß die Verluste mit η= 0,9 berücksichtigt worden sind.-Der Einfluß der Erdschwere darf vernachlässigt werden (vgl. Abschn. 6.4).

Lösungen:

a) $p_{ü2}$ bei η= 1 : Das Kräftegleichgewicht am freigemachten Kolben (Bild 6-10,Pos. b) führt zu:

$$p_{ü2} = p_{ü1} \cdot \frac{A_1}{A_2} = 10.(100/20)^2 = 250 \text{ bar} .$$

b) $p_{ü2}$ bei η= 0,9 :

$$p_{ü2} = \eta \cdot p_{ü1} \cdot \frac{A_1}{A_2} = 0{,}9.250 = 225 \text{ bar} .$$

10.Beispiel

Das Schema einer hydraulischen Presse (Bramah,1796) ist aus Bild 6-11 zu ersehen.Beim Aufwärtshub des Tauchkolbens 1 öffnet Ventil V_1,und der Atmosphärendruck p_o drückt Öl in die rechte Pressenkammer.Beim Abwärtshub schließt Ventil V_1;der Öldruck öffnet Ventil V_2,durch welches das Öl unter den Lastkolben gelangt.-Üblicherweise gibt man den

Wirkungsgrad in der Art an:

$$\eta = \frac{(F_L/F_H)_{real}}{(F_L/F_H)_{theoretisch}} \quad (6\text{-}8).$$

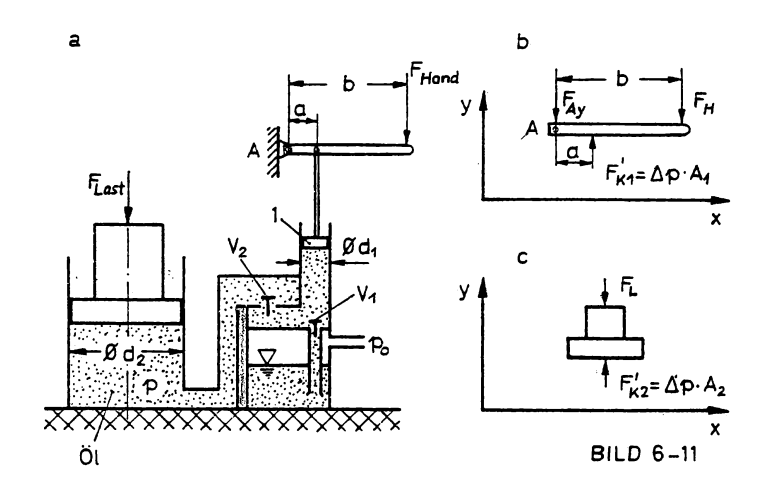


BILD 6-11

a) Man bestimme das Kräfteverhältnis F_L/F_H ohne Verluste;

b) im Falle mit Verlusten;

c) man vergleiche die Kraftverstärkung auf Grund der Hebelwirkung mit derjenigen der hydraulischen Übersetzung,und zwar im theoretischen Fall.Die Daten hierzu lauten: $d_1 = 20$ mm; $d_2 = 160$ mm; $a/b = 1 / 5$; $\eta = 0{,}8$.

d) Das gleiche Funktionsprinzip liegt beim hydraulischen Wagenheber vor.-Wie groß muß die Handkraft F_H sein,wenn bei einer PKW-Reifenpanne näherungsweise ein Viertel des PKW-Gewichtes überwunden werden muß?Die Gesamtmasse des PKWs beträgt m = 2000 kg.

Lösungen:

a) $(F_L/F_H)_{theoretisch}$: Das Momentengleichgewicht am freigemachten Hebelarm lautet:

$$\sum M_i = -F'_{K1} \cdot a + F_H \cdot b = 0$$

$$F'_{K1} = \frac{b}{a} \cdot F_H \quad . \qquad (1).$$

Die Kraft $-F'_{K1} = F_{K1}$ wirkt über den Kolben 1 auf die Flüssigkeit ein, so daß sich im Flüssigkeitsraum ein Zusatzdruck Δp aufbaut (vgl.Abschn. 6.3):

$$\Delta p = F_{K1}/A_1 \quad . \qquad (2).$$

Der Druck Δp baut sich übrigens nur deshalb auf, weil durch den Widerstand F_L der Flüssigkeitsverschiebung entgegengewirkt wird. Nach dem zweiten Pascalschen Hauptsatz breitet sich, hier im quasi-statischen Zustand, der Druck Δp aus bis unter den Lastkolben. Die anzuhebende Last beträgt demnach: $F_L = \Delta p \cdot A_2$. (3).

Aus den drei Bestimmungsgleichungen erhält man für das Kräfteverhältnis:

$$\left[\frac{F_L}{F_H}\right]_{th} = \frac{b}{a} \cdot \left(\frac{d_2}{d_1}\right)^2 \qquad (6\text{-}9).$$

Mit den Zahlenangaben folgt:

$$(F_L / F_H)_{th} = 5.(160/20)^2 = 320 \ .$$

b) $(F_L/F_H)_{real}$: Mit Gl.(6-8) folgt:

$$(F_L / F_H)_{real} = 0{,}85.320 = 272 \ .$$

c) Vergleich der Verstärkerwirkungen:

Die Hebelübersetzung bewirkt eine Kraftverstärkung von 5:1; die hydraulische Verstärkung liegt im Quadrat des Durchmesserverhältnisses begründet und ist deshalb viel wirksamer : 64:1.-Die gesamte theoretische Verstärkung beträgt 5.64 = 320 !

d) F_H:

Das PKW-Gewicht berechnet sich mit Gl.(2-8) zu:

$$F_G = m.g = 2000.9{,}81 = 19{,}62.10^3 N.$$

Ein Viertel davon geht als F_L weiterhin in Rechnung. Mit den Realdaten aus Aufgabenposition b) erhält man für die notwendige Handkraft:

$$F_{H,real} = 19{,}62.10^3 / (272.4) = 18{,}033 \text{ N} \ .$$

11.Beispiel

Ein mit Öl gefülltes Spurzapfenlager, Bild 6-12, wird axial mit F=20kN belastet. Die Dichtmanschette wird durch den sich einstellenden Öldruck auf einer Länge von h = 50 mm an den Zapfen angepreßt (d=100 mm).-Der Reibwert zwischen Ledermanschette und Stahlzapfen betrage μ= 0,2 !- Man ermittle:

a) den Zusatz- bzw. Überdruck im Lager bei Vernachlässigung des

Schwereeinflusses;

b) das bei Drehbewegung zu überwindende Reibmoment, wobei auf die Bremswirkung zwischen Stirnzapfenfläche und Öl verzichtet wird.

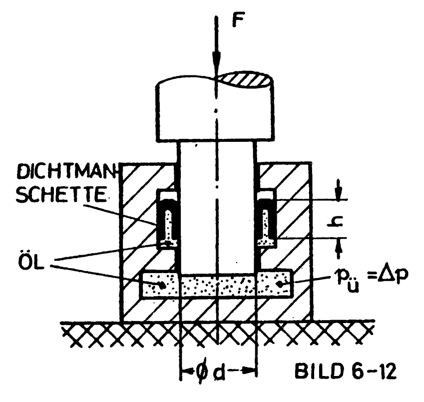


BILD 6-12

Lösungen:

a) Δp: Die Gesamtkraft in Wellenachse wird durch $\Delta p.A$ im Gleichgewicht gehalten. Damit folgt:

$\Delta p = 20.10^3.4(\pi.0,1)^2 = 25,46$ bar.

b) M_R : Das Reibmoment berechnet man mit:

$$M_R = F_R.\frac{d}{2} = \mu.F_n.\frac{d}{2} = \mu.\Delta p.\pi.d.h.\frac{d}{2} \qquad (6\text{-}10).$$

$M_R = 0,2.25,46.10^5.\pi.0,1.0,05.0,05 = 400$ Nm .

12. Beispiel

Differenzdrücke lassen sich mit der Ringwaage messen, Bild 6-13.-Man

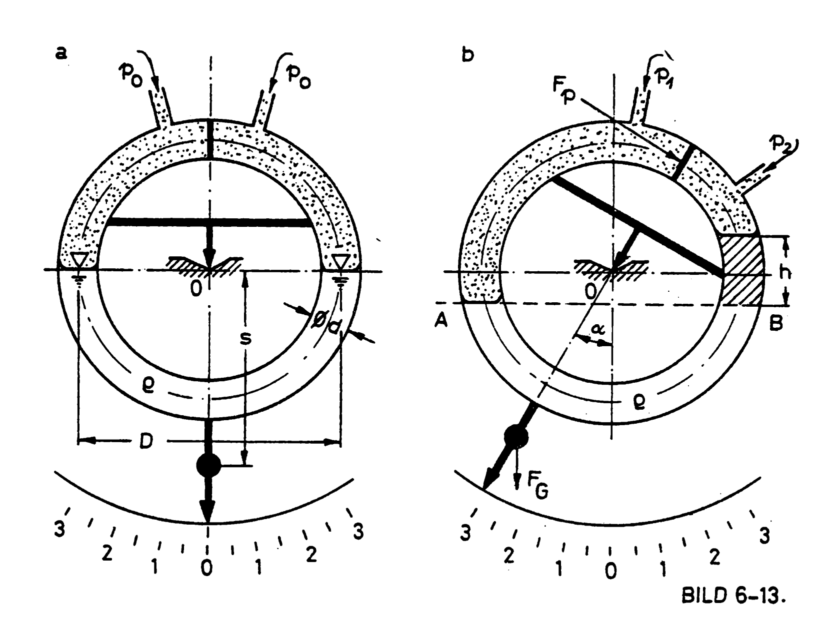


BILD 6-13.

bestimme den Schwenkwinkel α,wenn folgende Angaben gemacht werden:
$D = 80$ mm; $d = 6$ mm; $s = 70$ mm; $F_G = 1$ N; $p_1 = 1$ bar; $p_2 = 0{,}7$ bar.

Lösung:

Zur Eichung läßt man das Gerät unter gleichen Drücken $p_1=p_2=p_o$ (Atmosphärendruck) stehen und macht Zeiger und Skalennullpunkt deckungsgleich (Bild 6-13,Pos. a).-Sind die beiden Drücke verschieden,dann dreht sich der ringförmige Glaskörper der Ringwaage (Bild 6-13,Pos. b).Die Ebene AB ist eine Isobarfläche,weil sie in jedem Schenkel des kommunizierenden Systems die Flüssigkeit trifft.Dafür gilt die Druckgleichheit:

$$p_1 = p_2 + \rho.g.h \quad . \qquad (1).$$

Das Momentengleichgewicht bezüglich des Drehpunktes 0 lautet:

$$\sum M_i = F_G.s.\sin\alpha - F_p.\frac{D}{2} = 0 \quad ; \qquad (1a).$$

das Gewicht der schraffierten Flüssigkeitssäule errechnet sich zu:

$$F_G' = (\pi/4).d^2.\rho.g.h \quad . \qquad (2).$$

Das entspricht aber gerade der Differenzdruckkraft F_p.-Mit den Beziehungen (1) und (2) folgt aus der Momentenbeziehung (1a) :

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{\pi.d^2.D.(p_1 - p_2)}{8.s.F_G}} \qquad (6\text{-}11).$$

Unter Verwendung der genannten Zahlenwerte folgt aus dieser Gleichung:

$$\sin\alpha = (\pi.0{,}006^2.0{,}08.0{,}3.10^5)/(8.0{,}07.1) = 0{,}4847$$

$$\underline{\underline{\alpha = 29^o}} \quad .$$

Die Dichte hat auf die Messung keinen direkten Einfluß,nur auf die Baugröße.

13.Beispiel

Das Krellsche Mikromanometer ist in Bild 6-14 zu sehen.-Man ermittle den Differenzdruck,wenn man vom Gerät und der Messung folgende Werte kennt: $D = 100$ mm; $d= 6$ mm; $s_g= 187$ mm; $\alpha= 15^o$; als Meßflüssigkeit ist Äthanol eingefüllt mit einer Dichte von $\rho_1 = 794$ kg/m^3 bei 288 K und einem Ausdehnungskoeffizienten $\beta =1{,}1.10^{-3}$ 1/K;die Temperatur im Labor beträgt 298 K.-Man ermittle:

a) den Druckunterschied und gebe einen Hinweis bezüglich

b) der Ablesemethode und

c) der Ablesegenauigkeit.

Lösungen:

a) Δp:

Über die Stellschrauben S bringt man das Gerät in Horizontallage und das Meßlineal in Nullposition auf dem Niveau AB, solange die Druckanschlüsse gleichen Druck führen, hier den Atmosphärendruck p_0. Werden nun die Druckmeßleitungen angeschlossen, dann kann die Messung beginnen: Der größere Druck p_1 läßt Flüssigkeit im Schrägrohr aufsteigen, und man liest die Meßlänge s_g ab. Die Isobarfläche CD läßt folgende Druckgleichheit zu:

$$p_1 = p_2 + \rho . g . h \qquad (1).$$

Hierbei läßt sich der effektive Spiegelunterschied mit

$$h = s_w . \sin \alpha \qquad (2)$$

bestimmen, wobei zudem gilt:

$$\frac{\pi . D^2}{4} . (s_w - s_g) . \sin \alpha = \frac{\pi . d^2}{4} . s_g \qquad (3) \quad ,$$

was aus der Gleichheit der verdrängten Volumina folgt. Damit ergibt

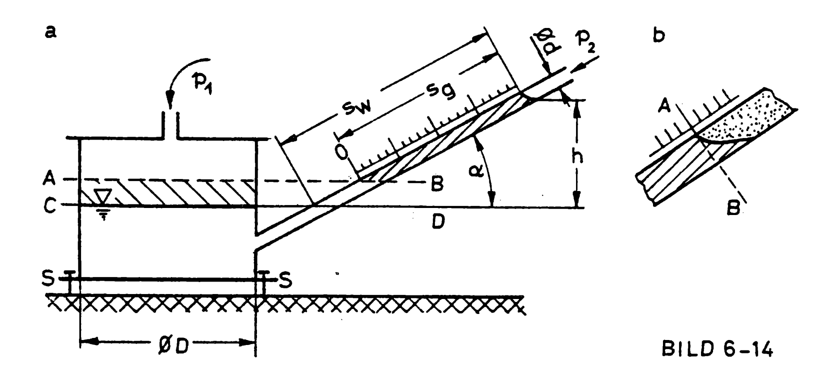


BILD 6-14

sich nun die wirkliche Säulenlänge zu:

$$s_w = s_g . \left(1 + \frac{d^2}{D^2 . \sin \alpha} \right) \qquad (4).$$

Mittels der Beziehungen (1) und (2) ergibt sich ein geschlossener Ausdruck:

$$\Delta p = \rho . g . \left(1 + \frac{d^2}{D^2 . \sin\alpha} \right) . s_g . \sin\alpha \qquad (6\text{-}12).$$

Zieht man zudem den Temperatureinfluß in Betracht, so kann man unter Verwertung der Erkenntnisse in Beispiel 1 aus Abschn. 2.9.2 angeben:

$$\Delta p = \frac{g \cdot \rho_1}{1+\beta . \Delta T} . \left(1 + \frac{d^2}{D^2 . \sin\alpha} \right) . s_g . \sin\alpha \qquad (6\text{-}13).$$

Das Einsetzen der Zahlenwerte ergibt:

$$\underline{\underline{\Delta p}} = \frac{9{,}81 . 794}{1+110 . 10^{-5} . 10} . \left(1+ \frac{0{,}006^2}{0{,}1^2 . \sin 15^o}\right) . 0{,}187 . \sin 15^o = \underline{\underline{378 \text{ Pa}}}.$$

b) Ablesemethode:

Um den Fehler des Kapillaritätseinflusses am geringsten zu halten, ist es empfehlenswert, senkrecht zur Rohrwand, also in Richtung AB, abzulesen (Bild 6-14, Pos. b).

c) Ablesegenauigkeit:

Je kleiner der Neigungswinkel α ist, desto genauer werden die Meßlängen s_g abgelesen. Der relative Fehler $\Delta s/s_g$ reduziert sich, wobei Δs den absoluten Ablesefehler bedeutet.

14. Beispiel

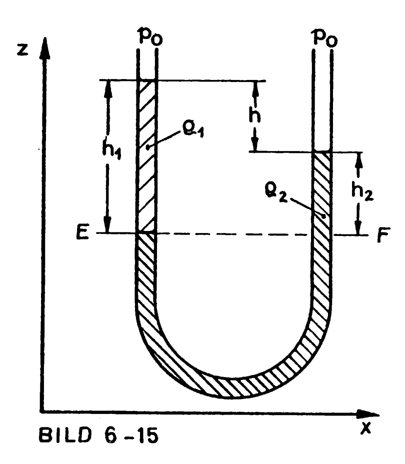


BILD 6-15

In einem U-Rohr, Bild 6-15, befinden sich zwei nicht mischbare Flüssigkeiten von den Dichten $\rho_1 = 900$ kg/m^3 und $\rho_2 = 1100$ kg/m^3. Man bestimme den Höhenunterschied der beiden Oberflächen, wenn die Säulenlänge der leichten Flüssigkeit $h_1 = 0{,}5$ m beträgt.

Lösung:

Die waagerechte Ebene EF ist eine Niveaufläche (z=const) und gleichzeitig auch eine isobare Fläche (p=const). Eine Isobarfläche ist u.a.

auch dadurch gekennzeichnet, daß sie unter sich nur gleichartige Flüssigkeit kennt! - Die Druckgleichheit in EF lautet: $p_E = p_F$. Also gilt:

$$p_0 + g \cdot \rho_1 \cdot h_1 = p_0 + g \cdot \rho_2 \cdot h_2 \quad ; \quad h_2 = h_1 \cdot (\rho_1/\rho_2) .$$

Damit läßt sich für den Höhenunterschied anschreiben:

$$\underline{\underline{h = h_1 - h_2}} = 0{,}5 \cdot (1 - 900/1100) = 0{,}0909 \text{ m} = \underline{\underline{90{,}9 \text{ mm}}} .$$

15. **Beispiel**

Ein U-Rohrmanometer werde nach der Art des Bildes 6-16 mit zwei nicht mischbaren Flüssigkeiten gefüllt. - Es ist eine einfache Beziehung

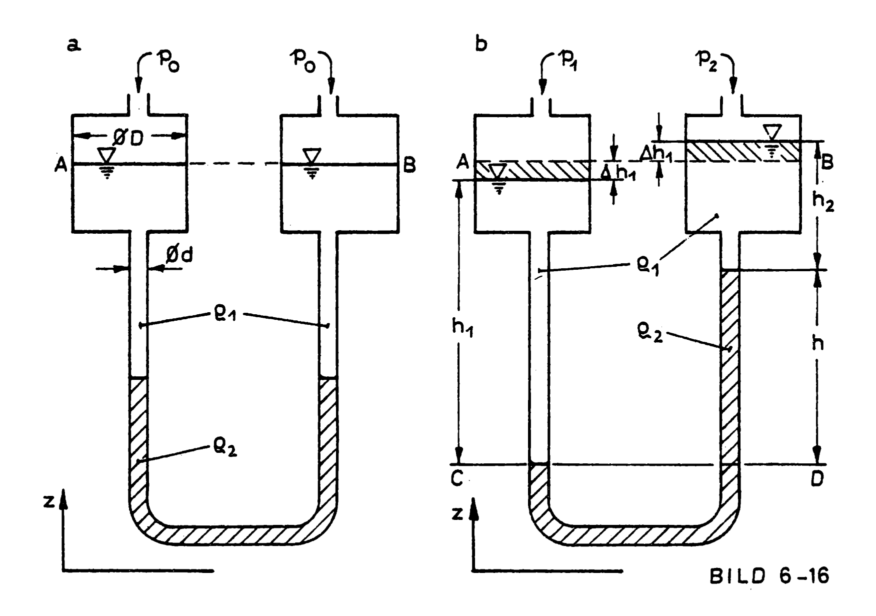


BILD 6-16

zwischen den Gerätegrößen, der Säulendifferenz h der schweren Flüssigkeit und dem Druckunterschied Δp herzuleiten! - Folgende Angaben werden gemacht: $\rho_1 = 900 \text{ kg/m}^3$; $\rho_2 = 1000 \text{ kg/m}^3$; $\Delta p = p_1 - p_2 = 200$ Pa; D = 100 mm; d = 8 mm [28] .

Lösung:

Die Eichung wird bei Atmosphärendruck in jedem Gerätezweig vorgenommen; sie führt zum Niveau AB, wonach sich dann die folgenden Zusammenhänge ergeben (Bild 6-16, Pos. a):

Nach der Eichung werden die beiden Meßleitungen angeschlossen.Da man voraussetzt,daß $p_1 > p_2$ sei,stellen sich die Verhältnisse ein, wie sie in Bild 6-16,Pos. b,festgehalten sind.Mit CD als Isobarfläche stellt sich folgende Druckgleichheit ein:

$$p_1 + g.\rho_1.h_1 = p_2 + g.\rho_2.h + g.\rho_1.h_2 \quad ;$$

$$p_1 - p_2 = g.(\rho_2.h + \rho_1.h_2 - \rho_1.h_1) \qquad (1).$$

Zur Verminderung der Anzahl der Unbekannten: $h;h_1;h_2$ wird eine Volumenbilanz herangezogen:

$\pi.D^2.\Delta h_1/4 = \pi.d^2.h/4$; damit ergibt sich:

$$\Delta h_1 = (d/D)^2.h \qquad (2).$$

Weiter folgt: $h + h_2 = h_1 + 2.\Delta h_1$ und

$$h_1 - h_2 = h - 2.\Delta h_1 \qquad (3).$$

Man eliminiere die zusätzliche Unbekannte Δh_1 mittels der Beziehung (2),und man erhält:

$$h_1 - h_2 = h-2.(d/D)^2.h = h.\left[1-2.(d/D)^2\right] \quad (4) \;,$$

was zusammen mit der Beziehung (1) zu folgender Gleichung führt:

$$\boxed{h = \frac{\Delta p}{g.\left[\rho_2 - \rho_1.(1-2.d^2/D^2)\right]}} \qquad (6\text{-}14).$$

Die Zahlenangaben führen zu folgendem Ergebnis:

$$h = \frac{200}{9{,}81.\left[1000-900.(1-2.0{,}008^2/0{,}1^2)\right]}$$

$$\underline{\underline{h = 182{,}8 \text{ mm}}} \;.$$

Zu diesem Meßinstrument sollen noch ein paar Bemerkungen gemacht werden:

- Obwohl hier die Druckdifferenz sehr klein ist,wird sie doch mit einer relativ großen Flüssigkeitssäule gemessen.Das Meßinstrument ist also sehr empfindlich.
- Worauf ist diese Empfindlichkeit zurückzuführen?-Die Säulendifferenz ist umso größer bei einer gegebenen Druckdifferenz,je kleiner die Differenz der Dichten ρ_1 und ρ_2 ist,und je größer der Durchmesser D gegenüber dem Durchmesser d ist.

- Um eine noch größere Genauigkeit des Meßinstruments zu erlangen, werden Meßrohre nicht mehr vertikal angeordnet, sondern schräg (Bild 6-14).
- Für alle Differentialmanometer gilt: Der Druckunterschied $p=p_1-p_2$ kann auch als Unterschied der Überdrücke gemessen werden.

$$p_{ü1}-p_{ü2} = (p_1-p_o)-(p_2-p_o) = p_1-p_2 = \Delta p \qquad (6-15).$$

- Ebenso gilt: Der negative Druckunterschied ist gleich der Differenz der Unterdrücke:

$$p_{u1}-p_{u2} = (p_o-p_1)-(p_o-p_2) = -(p_1-p_2) = -\Delta p \qquad (6-16).$$

16. Beispiel

Zur Meßbereichserweiterung eines Manometers werden U-Rohrmanometer in Serie geschalten, wie es Bild 6-17 zeigt. Die Konzeption verlangt

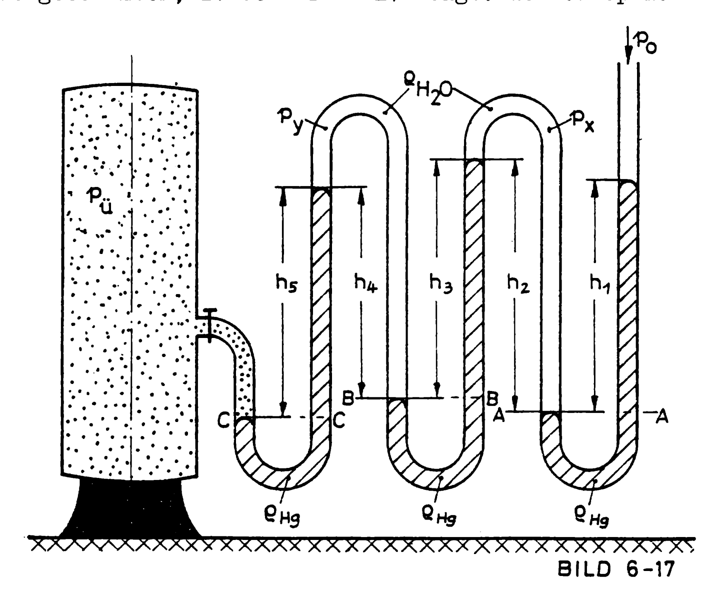


BILD 6-17

die Verwendung unterschiedlich schwerer Flüssigkeiten. Im vorliegenden Beispiel verwendet man Quecksilber und Wasser.
Wie groß ist der Überdruck in einem Gasbehälter, wenn mit einem solchen Serienmanometer gemessen wird? - Angaben: $\rho_{Hg} = 13\,590$ kg/m^3; $\rho_W = 1000$ kg/m^3; $h_1 = 1{,}1$ m; $h_2 = 1{,}2$ m; $h_3 = 1{,}3$ m; $h_4 = 1{,}4$ m; $h_5 = 1{,}5$ m.

Lösung:

Bezüglich der drei Isobarflächen kann man folgende drei Druckgleichheiten aufstellen:

$$p_{AA} = p_o + g \cdot \varrho_{Hg} \cdot h_1 = p_x + g \cdot \varrho_W \cdot h_2 \qquad (1);$$

$$p_{BB} = p_x + g \cdot \varrho_{Hg} \cdot h_3 = p_y + g \cdot \varrho_W \cdot h_4 \qquad (2);$$

$$p_{CC} = p_{ü} + p_o = p_y + g \cdot \varrho_{Hg} \cdot h_5 \qquad (3).$$

Durch Elimination der unbekannten Drücke p_x und p_y aus diesen drei Beziehungen erhält man:

$$\boxed{p_{ü} = g \cdot \varrho_{Hg} \cdot (h_1 + h_3 + h_5) - g \cdot \varrho_W \cdot (h_2 + h_4)} \qquad (6\text{-}17).$$

Die Zahlenrechnung führt zu dem Ergebnis:

$\underline{\underline{p_{ü}}} = 9{,}81.13590.(1{,}1+1{,}3+1{,}5)-9{,}81.1000.(1{,}2+1{,}4) = \underline{\underline{4{,}944 \text{ bar}}}$.

Diese Meßvorrichtung ist deshalb so praktisch, weil die Höhe eines einzelnen Meßrohres stark verkleinert wird!

17. Beispiel

Zur Messung vieler relativ geringer Über- und Unterdrücke (z.B. bei

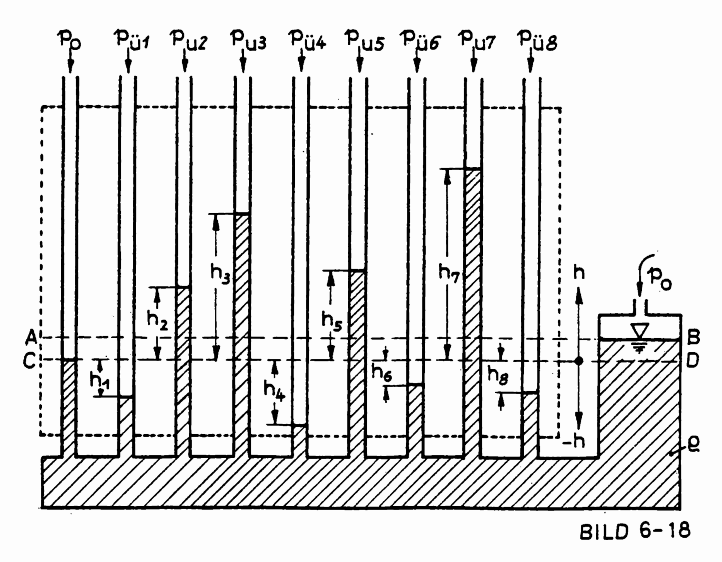


BILD 6-18

Windkanalmessungen) eignet sich das Vielfachmanometer, Bild 6-18.

Nullniveau ist die Ebene AB,auf der überall der Atmosphärendruck lastet.-Beim Meßvorgang ändert sich das Vergleichsniveau auf CD als Referenzebene.Das kommunizierende System erlaubt eine einfache Ermittlung der Differenzdrücke.-Man bestimme die Über- und Unterdrücke zu folgenden Messungen:

ϱ = 800 kg/m^3; h_1= 150 mm; h_2= -200 mm; h_3= -350 mm; h_4= 180 mm; h_5= -220 mm; h_6= 70 mm; h_7= -430 mm; h_8= 140 mm.

Diese Messung möge fotografisch festgehalten worden sein!

Lösungen:

Für jedes Meßrohr gilt entweder $p_ü = g.\varrho.h$ oder $p_u = g.\varrho.(-h)$.

$p_{ü1}$ = 9,81.800.0,15 = 1 177 Pa; p_{u2} = 9,81.800.(+0,2) = 1 570 Pa;

p_{u3} = 9,81.800.(+0,35)= 2 747 Pa; $p_{ü4}$ = 9,81.800.0,18 = 1 413 Pa;

p_{u5} = 9,81.800.(+0,22) = 1 727 Pa; $p_{ü6}$ = 9,81.800.0,07 = 549 Pa;

p_{u7} = 9,81.800.(+0,43) = 3 375 Pa; $p_{ü8}$ = 9,81.800.0,14 = 1099 Pa.

7. BERECHNUNG DER DRUCKKRÄFTE IN DER HYDROSTATIK

7.1. Allgemeines

In Gl.(4-4) ist gezeigt worden,wie man eine Druckkraft zu berechnen hat.Der Betrag des Normalenvektors ist die dimensionslose arithmetische Einheit.Das Integrationsgebiet (A) ist ein beliebiger Teil derjenigen Fläche,die insgesamt von der Flüssigkeit beaufschlagt wird. Die Gestalt dieser Fläche wird durch ihre Gleichung angegeben:

$$\boxed{f\,(\,x,y,z\,) = \text{const}} \qquad (7\text{-}1).$$

Durch Gradierung der Flächenfunktion ergibt sich der Gradientvektor der Fläche,welcher bekanntlich senkrecht auf der Fläche steht.Dividiert man ihn durch seinen Betrag,dann ergibt sich der Normalenvektor als Einheitsvektor!

$$\boxed{\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}.i + \frac{\partial f}{\partial y}.j + \frac{\partial f}{\partial z}.k}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}} \qquad (7\text{-}2).$$

p (x,y,z) ist der absolute Druck als stetige und eindeutige Funktion. Gl.(4-4) läßt sich nun folgendermaßen entwickeln:

$$\vec{F}_p = \int_{(A)} \frac{i.\frac{\partial f}{\partial x} + j.\frac{\partial f}{\partial y} + k.\frac{\partial f}{\partial z}}{\sqrt{(\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2 + (\frac{\partial f}{\partial z})^2}} .p(x,y,z).dA \qquad (7\text{-}3).$$

Im kartesischen Koordinatensystem läßt sich die Druckkraft nunmehr in Komponentenform darstellen:

$$\vec{F}_p = i.F_{px} + j.F_{py} + k.F_{pz} \qquad (7\text{-}4).$$

In den nachfolgenden Abschnitten werden einige Sonderfälle zur Druckkraftbestimmung gezeigt.

7.2. Druckkräfte auf ebene offene Flächen

7.2.1. Theorie

Da der Normalenvektor einer ebenen Fläche eine konstante Größe ist, kann man ihn aus dem Integranden der Gl.(4-4) herausziehen:

$$\vec{F}_p = \vec{n} \int_{(A)} p(x,y,z).dA \qquad (7\text{-}5).$$

7.2.2. Beispiele

1.Beispiel

Es ist die Überdruckkraft auf den Seitenwandausschnitt A einer schrägen Behälterwand gesucht,Bild 7-1.Die Orientierung wird mittels eines x,y-Koordinatensystems vorgenommen.Die wahre Größe von A ergibt sich durch Umklappen der Seitenwand in die Bildebene.

Lösung:

Der Überdruck $p_ü = p - p_o = g.\varrho.h$ führt mit der Tiefenlage $h = y.\sin\alpha$ zur Überdruckkraft in der Form:

$$\vec{F}_{pü} = \vec{n} \int_{(A)} g.\varrho.y.\sin\alpha .dA \quad .$$

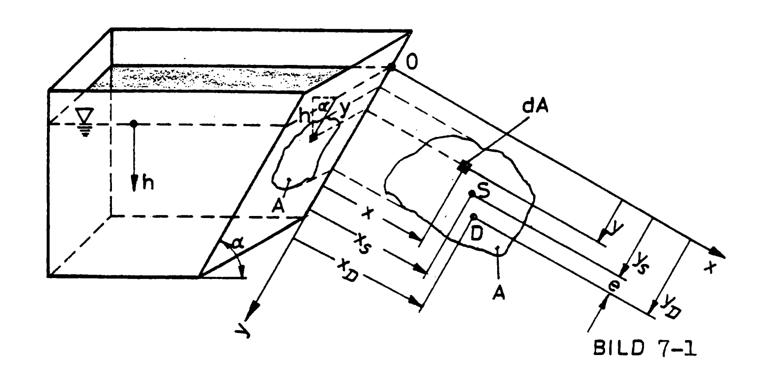


BILD 7-1

Zieht man noch weitere konstante Größen vor das Integral,dann folgt:

$$\vec{F}_{pü} = \vec{n} .g. \rho .\sin\alpha \int_{(A)} y.dA \qquad (7\text{-}6).$$

Der Ausdruck:

$$S_x = \int_{(A)} y.dA = y_S \ . \ A \qquad (7\text{-}7)$$

stellt das statische Moment der Fläche A bezüglich der x-Achse dar. Hierbei versteht man unter y_S die Ordinate des Flächenschwerpunktes. Mit seiner Tiefenlage $h_S = y_S.\sin\alpha$ erhält man für die Überdruckkraft

$$\vec{F}_{pü} = \vec{n} \ . \ g. \ \rho .h_S.A \qquad (7\text{-}8).$$

Zur Richtung dieser Kraft ist zu sagen,daß sie senkrecht zur ebenen Fläche steht;die Kraft ist übrigens von der Flüssigkeit zur Fläche hin orientiert.Der Betrag der Überdruckkraft lautet:

$$F_{pü} = g. \ \rho .h_S.A = p_{üS}.A \qquad (7\text{-}8a)$$

mit $p_{üS}$ als dem Überdruckwert im Flächenschwerpunkt. - Der Angriffspunkt der Kraft ist nicht im Flächenschwerpunkt zu suchen,und zwar wegen der Druckverteilung auf Grund des Schwereeinflusses.Der Momentensatz von Varignon hilft hier weiter:

Das statische Moment der Resultierenden ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte!

Wendet man den Momentensatz einmal bezüglich der x-Achse und einmal

für die y-Achse an,dann erhält man zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten x_D und y_D,die beiden Koordinaten des Druckmittelpunktes,wie der Angriffspunkt auch noch genannt wird.

$$F_{pü} \cdot y_D = \int_{(A)} y \cdot g \cdot \rho \cdot \sin\alpha \cdot y \cdot dA = y_D \cdot g \cdot \rho \cdot y_S \cdot \sin\alpha \cdot A = \rho \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \int_{(A)} y^2 \cdot dA$$

$$F_{pü} \cdot x_D = \int_{(A)} x \cdot g \cdot \rho \cdot \sin\alpha \cdot y \cdot dA = x_D \cdot g \cdot \rho \cdot y_S \cdot \sin\alpha \cdot A = \rho \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \int_{(A)} x \cdot y \cdot dA$$

Die Ausrechnung dieser beiden Gleichungen führt zu folgenden Ausdrücken:

$$x_D = \frac{\int_{(A)} x \cdot y \cdot dA}{y_S \cdot A} = \frac{I_{xy}}{y_S \cdot A} \quad ; \quad y_D = \frac{\int_{(A)} y^2 \cdot dA}{y_S \cdot A} = \frac{I_x}{y_S \cdot A} \qquad (7\text{-}9),$$

womit sich die gesuchten Koordinaten bestimmen lassen.Unter I_{xy} ist das Zentrifugalmoment der Fläche A zu verstehen; I_x gibt das Flächenträgheitsmoment bezüglich der x-Achse ab.- Die Berechnung von I_{xy} und I_x wird durch Anwendung des Steinerschen Satzes erleichtert.Er stellt eine Beziehung her zwischen dem bereits eingeführten xy-Koordinatensystem und einem dazu achsparallelen Schwerpunktssystem mit den Achsenbezeichnungen x' und y',Bild 7-2.Damit kann man die Gl.(7-9) umformen zu:

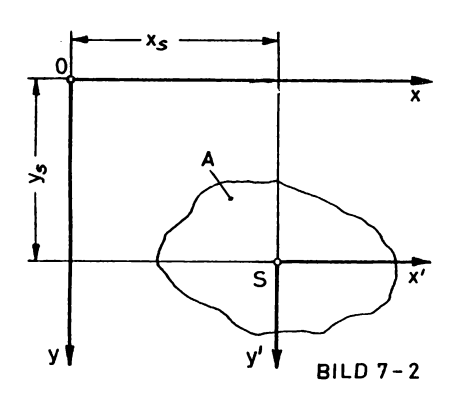


BILD 7-2

$$x_D = x_S + \frac{I_{x'y'}}{y_S \cdot A} \quad ; \quad y_D = y_S + \frac{I_{x'}}{y_S \cdot A} \qquad (7\text{-}10).$$

Daß man nur die Überdruckkraft bestimmt hat und nicht die Absolutdruckkraft,hat seinen Grund darin,daß der Absolutdruckkraft

$\vec{F}_p = \vec{n}\int(p_o+p_ü)dA = \vec{n}\int p_o \cdot dA + \vec{n}\int p_ü \cdot dA$, die ja von innen auf die Wand wirkt,eine Atmosphärendruckkraft von $\vec{F}_{po} = -\vec{n}\int p_o \cdot dA$ entgegen-

wirkt. Somit bleibt als Resultierende dieser beiden Druckkräfte nur $\vec{F}_{pü}$ übrig!

2. Beispiel

Man berechne die Kraftwirkung auf eine ebene Wand in einem isobaren Raum!

Lösung:

Da für das vorgelegte Kontrollgebiet nunmehr die Identität $p(x,y,z) \equiv$ const gilt, läßt sich die Gl. (4-4) noch weiter vereinfachen, indem man nämlich auch p vor das Integralzeichen setzen darf:

$$\vec{F}_p = \vec{n} \cdot p \int_{(A)} dA = \vec{n} \cdot p \cdot A \qquad (7\text{-}11).$$

Der Betrag ist das einfache Produkt p.A; die Richtung wird selbstverständlich durch den Normalenvektor vorgegeben und ist aus dem Fluid heraus auf die Wand hin gerichtet; interessant ist hier die Feststellung, daß der Druckmittelpunkt mit dem Flächenschwerpunkt zusammenfällt. Fazit: Auf diese Weise werden alle Gasdruckkräfte und alle Flüssigkeitsdruckkräfte, sofern man hier den Schwereeinfluß vernachlässigen darf, berechnet!

3. Beispiel

Es ist die Überdruckkraft für die ebene vertikale Seitenwand eines Wasserbehälters auszurechnen. Die rechnerische Lösung, die mit den Angaben $\rho = 1000\ kg/m^3$, $h_o = 3$ m und $b = 4$ m anzustreben ist, soll anschließend noch grafisch ausgewertet werden. In beiden Fällen ist auch der Druckmittelpunkt zu bestimmen, Bild 7-3.

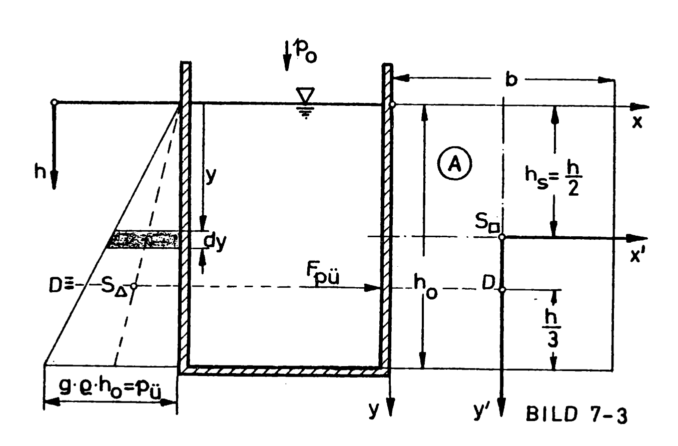


BILD 7-3

Lösungen:

a) Rechnerische Lösung:

Mit Hilfe von Gl.(7-8) läßt sich der Betrag der Überdruckkraft auf die Seitenwand ermitteln:

$F_{pü} = g.\varrho.h_S.A = 9{,}81.1000.1{,}5.3{,}4 = 176{,}58\ kN$.

Aus Symmetriegründen ist $x_D = x_S = 2\ m$; dies folgt direkt aus Gl. (7-10).

Die zweite Beziehung dieser Gleichung liefert die Ordinate des Druckmittelpunktes:

$$y_D = y_S + \frac{I_{x'}}{y_S.A} = \frac{h_o}{2} + \frac{b.h_o^3}{12} . \frac{2}{h_o.b.h_o} = 1{,}5 + \frac{3}{6} = 2\ m .$$

b) Grafische Lösung:

Das links am Behälter angegebene Dreieck (Bild 7-3) deutet den linearen Druckverlauf an. Die Dreiecksfläche entspricht gerade der Überdruckkraft bei einer Breite von b = 1 m, wenn man bedenkt, daß gilt:

$F_{pü} = \int_{(A)} p_ü.dA = g.\varrho.b\int_0^{h_o} y.dy$; $F_{pü} = g.\varrho.b.h_o^2/2$. – Was den Druckmittelpunkt angeht, so kann gesagt werden, daß er in einer Tiefe von $2/3 . h_o$ liegt, wonach er auf dem gleichen Niveau liegt wie der Schwerpunkt der Dreiecksfläche. Zur Erinnerung ist angedeutet, daß man den Schwerpunkt eines Dreiecks als den Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden erhält.

4. Beispiel

Eine Reihe verschiedener Gefäße gleicher Bodenfläche ist mit einer Flüssigkeit von der Dichte ϱ bis zur Höhe h angefüllt, Bild 7-4. Wie unterscheiden sich die einzelnen absoluten Bodendruckkräfte?

Lösungen:

Der Einsatz von Gl.(7-4) ergibt:

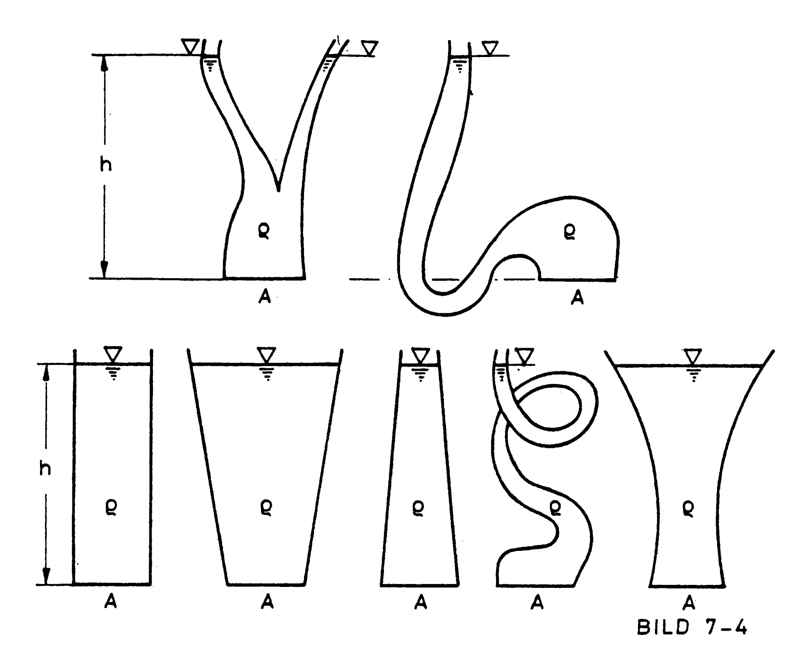


BILD 7-4

Daraus folgt mit den gemachten Annahmen, daß die Bodendruckkräfte hier alle gleich groß sind, obwohl die Gewichtskräfte des jeweiligen flüssigen Inhalts verschieden sind. Man spricht hier vom hydrostatischen Paradoxon (auch Stevinus-Paradoxon genannt).

5. Beispiel

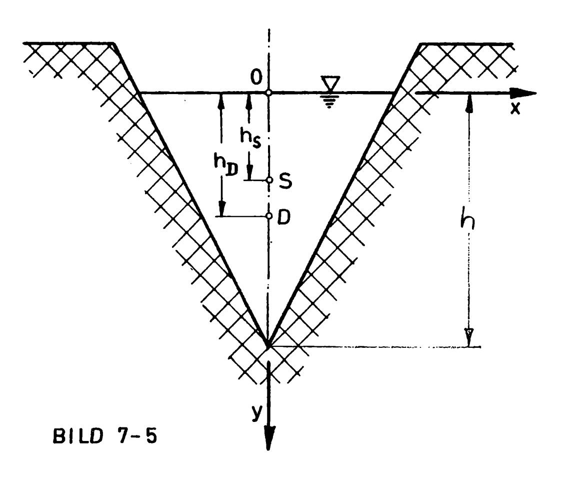


BILD 7-5

Man bestimme die Überdruckkraft auf ein senkrechtes Wehr, das einen Kanal von dreieckigem Querschnitt versperrt, Bild 7-5, und zwar der Größe und Lage nach. Angaben: ϱ = 1000 kg/m^3; b = 2 m; h = 3 m .

Lösungen:

Die Gl. (7-8) führt zum Betrag der Kraft:

$$F_{pü} = 9{,}81 . 1000 . 1 . \frac{2.3}{2}$$

Die Ausrechnung ergibt $\underline{\underline{F_{pü} = 29,43 \text{ kN}}}$. - Aus Symmetriegründen gilt nach Gl.(7-10): $\underline{\underline{x_D = x_S = 0}}$. - Für y_D erhält man:

$$\underline{\underline{y_D}} = \frac{h}{3} + \frac{b.h^3/36}{\frac{h}{3} \cdot \frac{b.h}{2}} = \frac{h}{2} = \underline{\underline{1,5 \text{ m}}} \quad .$$

6.Beispiel

Ein zylindrisches Gefäß wird bis zum Rand mit Wasser gefüllt,durch eine Glasplatte verschlossen und dann umgestülpt.-Unter welcher Bedingung fließt das Wasser nicht aus,Bild 7-6 ?

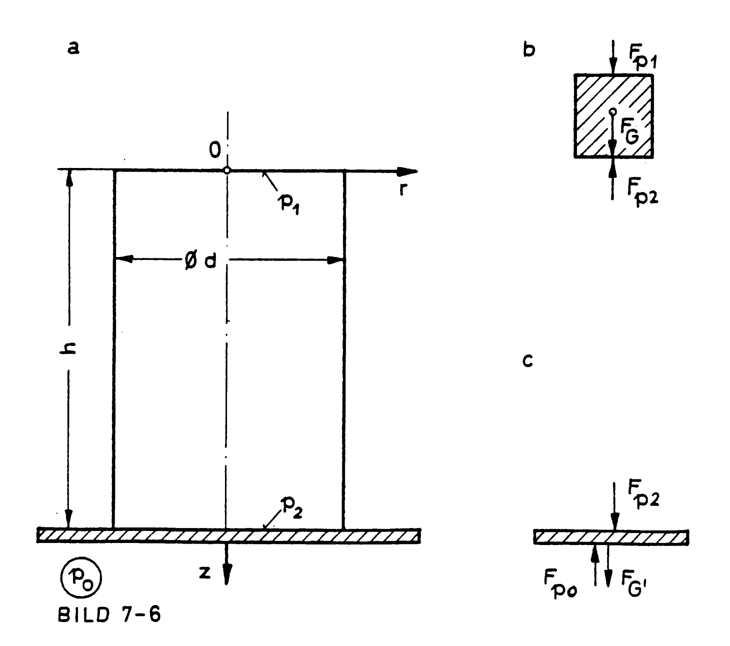


BILD 7-6

Lösung:

Im Gleichgewichtsfall gilt folgende Druckbilanz:

$$\underline{p_2 = p_1 + g \cdot \rho \cdot h} \qquad (1);$$

desgleichen gilt für den freigemachten flüssigen Körper (Bild 7-6, Pos. b):

$$\sum F_{iz} = F_{p1} + F_G - F_{p2} = 0 \quad ;$$

mittels der Datenbeschaffung folgt:

$\frac{\pi . d^2}{4} \cdot p_1 + g \cdot \rho \cdot \frac{\pi . d^2}{4} . h - \frac{\pi . d^2}{4} . p_2 = 0$, was zunächst das obige Druckgleichgewicht bestätigt!- Das Gleichgewicht an der freigemachten Glasplatte führt zu folgender Gleichung (Bild 7-6,Pos. c) :

$$\sum F_{iz} = F_{G'} + F_{p2} - F_{po} = 0 \quad ,$$

wenn man unter $F_{G'}$ das Gewicht der Glasplatte versteht.Nach der Datenverwertung folgt:

$$F_{G'} = \frac{\pi . d^2}{4} . (p_o - p_2) \qquad (2).$$

Wenn man normalerweise das Plattengewicht $F_{G'}$ und die Behälterhöhe vorgibt,dann ist mit Beziehung (2) der Absolutdruck p_2 zu ermitteln, welcher mit der Beziehung (1) den Wert für den Absolutdruck p_1 verursacht.Wenn $p_1 \leq p_{Kavitation}$(Bild 2-3) ,dann ist der Grenzfall des Plattenabfalls gekommen!-Bei dieser Systembetrachtung sind Plattengewicht,Gefäßdurchmesser,Gefäßhöhe und der Atmosphärendruck von Einfluß.

7. Beispiel

Ein rechteckiger Gleitschütz vom Gewicht F_G = 5 kN soll hochgezogen werden,Bild 7-7.Die Wassertiefe wird mit h = 1,5 m und die Kanalbreite mit b = 3 m angegeben.Der Reibungskoeffizient zwischen Gleitschütz und Laufbahn beträgt μ=0,3.- Man bestimme die notwendige Hubkraft F_z !

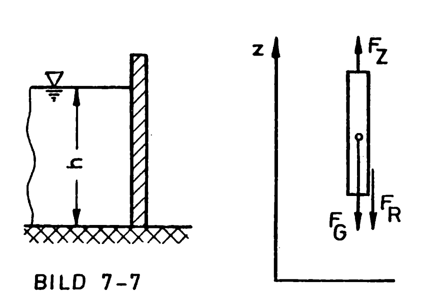


BILD 7-7

Lösung:

Das Gleichgewicht des freigemachten Schützen ist in nachstehender Gleichung gegeben:

$$\sum F_{iz} = - F_G - F_R + F_z = 0 \quad ;$$

das Coulombsche Reibungsgesetz liefert $\boxed{F_R = \mu . F_N}$,wobei F_N die normale Anpreßkraft ist,und zwar von der Größe der hydraulischen Überdruckkraft $F_{pü}$.Diese Kraft ergibt sich mit Gl.(7-8) zu:

$F_{pü} = 9{,}81.1000.0{,}75.1{,}5.3 = \underline{\underline{33{,}109\ kN}}$.-Mit diesem Zwischenwert kann man dann für F_z notieren:

$$\underline{\underline{F_z}} = 5 + 0{,}3.33{,}109 = \underline{\underline{14{,}93\ kN}} \quad .$$

8.Beispiel

Ein Staudamm,dessen Querschnitt ein rechtwinkliges Dreieck ist,wird aus Beton gebaut ($\varrho_B = 2250\ kg/m^3$).-Man bestimme das Verhältnis h/c,Bild 7-8,so daß das Standmoment mindestens zweimal so groß ist wie das Kippmoment.

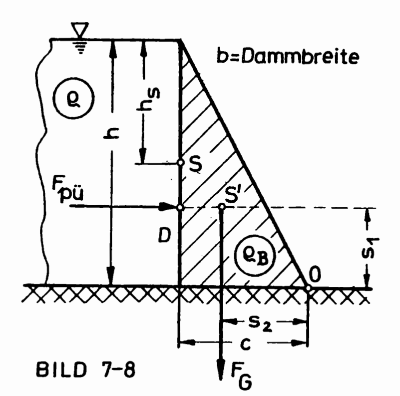


BILD 7-8

Lösung:

Mit Hilfe der Seitenwanddruckkraft $F_{pü} = g.\varrho.h_S.A$ (Gl.7-8) läßt sich das Kippmoment bezüglich des Punktes 0 angeben zu:

$M_K = F_{pü}.s_1 = g.\varrho.\frac{h}{2}.h.b.\frac{h}{3}$.Über das Staudammgewicht $F_G = g.\varrho_B.\frac{c.h}{2}.b$ erhält man für das Standmoment:

$$M_{St} = F_{pü}.s_2 = g.\varrho_B.\frac{c.h}{2}.\ b.\frac{2}{3}.c \quad .$$

Die vorgeschriebene Sicherheitsbedingung lautet demnach:

$S = \frac{M_{St}}{M_K} \geqq 2$, was unter Verwendung der Zwischenresultate ergibt:

$$S = \frac{g.\varrho_B.c^2.h.b.6}{3.g.\varrho.h^3.b} \geqq 2 : \quad \underline{\underline{\frac{h}{c}}} \leqq \sqrt{\frac{\varrho_B}{\varrho}} = \sqrt{\frac{2250}{1000}} = \underline{\underline{1{,}5}} \quad .$$

9.Beispiel

Eine vertikale rechteckige Wand trennt zwei Flüssigkeiten voneinander,Bild 7-9.Die Höhen werden mit $h_1 = 6$ m, $h_2 = 4$ m,die Breite mit b = 8 m und die Dichten mit $\varrho_1 = 1000\ kg/m^3$ und $\varrho_2 = 850\ kg/m^3$ angegeben.-Man bestimme das Einspannmoment M_o.

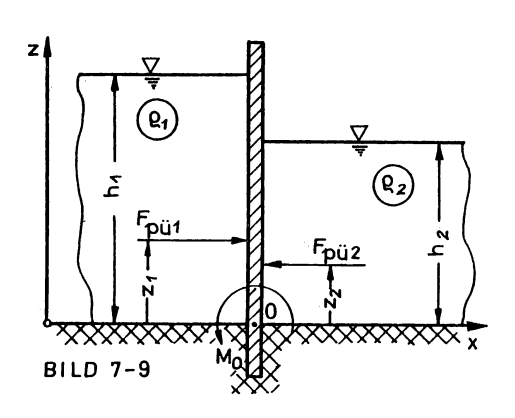


BILD 7-9

Lösung:

Mit Hilfe der Überdruckkräfte

$F_{pü1} = g \cdot \varrho_1 \cdot h_{S1} \cdot A_1 = g \cdot \varrho_1 \cdot b \cdot \frac{h_1^2}{2}$

$F_{pü2} = g \cdot \varrho_2 \cdot h_{S2} \cdot A_2 = g \cdot \varrho_2 \cdot b \cdot \frac{h_2^2}{2}$

und den vereinfachten Angaben zu den Druckmittelpunkten:

$z_1 = h_1/3$ und $z_2 = h_2/3$ ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht bezüglich des Einspannpunktes 0 folgende Beziehung:

$\sum M_i^{(o)} = M_0 - F_{pü1} \cdot z_1 + F_{pü2} \cdot z_2 = 0$. Der Drehsinn des unbekannten Einspannmomentes ist beliebig herum angenommen worden. Das Zahlenergebnis bestätigt oder verneint die Annahme durch ein positives oder negatives Vorzeichen.-Das Einsetzen der Zahlenwerte ergibt aus der Momentengleichung:

$M_0 = 9{,}81.1000.3.6.8.2 - 9{,}81.850.2.4.8.\frac{4}{3}$; $\underline{\underline{M_0 = 2{,}1.10^6 \text{ Nm}}}$.

Der Drehsinn war zufällig richtig gewählt worden.

10. Beispiel

In einem Behälter mit ebener schrägen Seitenwand befinden sich Wasser ($\varrho_1 = 1000$ kg/m^3) und Erdöl ($\varrho_2 = 900$ kg/m^3) mit den Schichtdicken $h_1 = 1$ m und $h_2 = 0{,}5$ m, Bild 7-10.

Man bestimme die gesamte Überdruckkraft auf die Seitenwand der Grösse nach, wenn folgende Abmessungen bekannt sind: Breite b= 2 m und $\alpha = 60^o$.

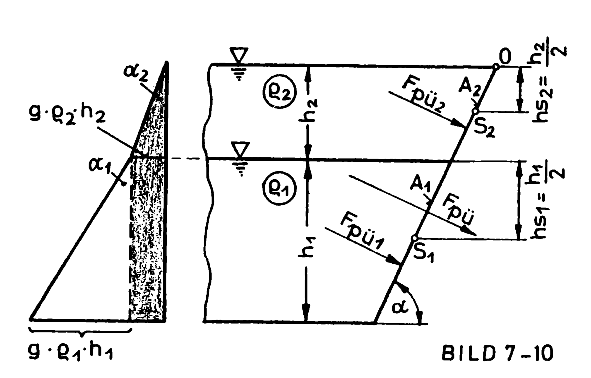


BILD 7-10

Lösung:

Die einzelnen Überdruckkräfte lauten:

$F_{pü2} = p_{üS2} \cdot A_2$ mit $p_{üS2} = g \cdot \rho_2 \cdot h_{S2}$;

$F_{pü1} = p_{üS1} \cdot A_1$ mit $p_{üS1} = g \cdot \rho_1 \cdot h_{S1} + g \cdot \rho_2 \cdot h_2$;

für die Einzelflächen findet man sofort:

$A_1 = b \cdot h_1 / \sin\alpha$ und $A_2 = b \cdot h_2 / \sin\alpha$.

Da die beiden Einzelkräfte parallel zueinander wirken, gilt für ihre Resultierende einfach:

$$F_{pü} = F_{pü1} + F_{pü2} = (9,81 \cdot 1000 \cdot 0,5 + 9,81 \cdot 900 \cdot 0,5) \cdot 2/\sin 60^\circ + 9,81 \cdot 900 \cdot 0,25 \cdot 2 \cdot 0,5/\sin 60^\circ$$

$$F_{pü} = 24,07 \text{ kN} .$$

Bemerkungen:

a) Zum Überdruckdiagramm: Der Steigungswinkel im oberen Abschnitt lautet α_2, wobei $tg\,\alpha_2 = g \cdot \rho_2$ ist.-Für die Flüssigkeit ρ_1 gilt ein anderer Steigungswinkel: α_1 mit $tg\,\alpha_1 = g \cdot \rho_1$. Die Gerade beginnt hier bei einem $p_ü = g \cdot \rho_2 \cdot h_2$!

b) Zum Angriffspunkt der Gesamtkraft $F_{pü}$: Zuerst ermittelt man mit Gl.(7-10) die Druckmittelpunktslagen der Einzelkräfte und zum Schluß mittels des Varignonschen Momentensatzes die Lage der Resultierenden.

11.Beispiel

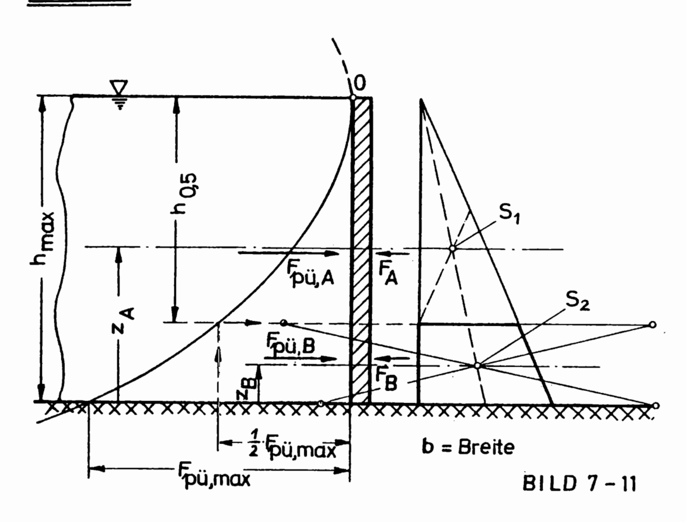


BILD 7-11

Die vertikale Seitenwand eines Wasserbehälters soll auf zwei Balken derart abgestützt werden, daß die Stützkräfte F_A und F_B, Bild 7-11, gleich groß ausfallen.-Man ermittle im einzelnen:

a) die gesamte Seitenwanddruckkraft;
b) die Höhenlagen der Wirkungslinien z_A und z_B ; die Lösung dieses Problems soll zuerst grafisch und dann rechnerisch unternommen werden.

Lösungen:

a) $F_{pü}$: Nach Gl.(7-8) folgt: $F_{pü,max}=g.\varrho.h_S.A=g.\varrho.b.h_{max}^2/2$; der Kräfteverlauf läßt sich offensichtlich durch eine Parabel

$$\boxed{F_{pü} = g.\varrho.b.h^2/2} \qquad (7\text{-}12)$$

beschreiben.Der Schnittpunkt dieser Parabel mit dem Behälterboden deutet den Wert $F_{pü,max}$ an.Die Halbierung dieses Kraftwertes gibt den Hinweis ab,welche beiden Zonen zur gleich großen Seitenwandkraft $F_{pü,A}$ und $F_{pü,B}$ führen.

b) z_A und z_B (grafisch): Das Belastungsdreieck in Bild 7-11 wird über die Parabel in zwei äquivalente Flächen aufgeteilt: in ein oberes Dreieck und in ein unteres Trapez!- Durch den Schwerpunkt des Dreiecks S_1,der sich als Schnittpunkt zweier Seitenhalbierenden einstellt,verläuft die horizontale Wirkungslinie von F_A.-Analoges gilt für den Trapezschwerpunkt S_2: durch ihn verläuft die Wirkungslinie von F_B.
Diese Aufteilungsmethode eignet sich auch dafür,wenn noch weitere gleich belastete Seitenwandstützen vorgeschrieben wären.

z_A und z_B (rechnerisch): Die Tiefenlage der Trennungsebene errechnet sich folgendermaßen mittels Gl.(7-12):

$$0{,}5.F_{pü,max} = g.\varrho.b.h_{0,5}^2\,/2 \; ; \quad h_{0,5}=\sqrt{F_{pü,max}/(g.\varrho.b)} \; .$$

Damit ergibt sich:

$$z_A = (h_{max}-h_{0,5}) + h_{0,5}/3 \; ;$$

$$z_A = h_{max} - 2.h_{0,5}/3 \; .$$

Mit Hilfe der Schwerpunktsformel für ein Trapez ergibt sich für z_B:

$$z_B = \frac{1}{3}.\ \frac{h_{max} - h_{0,5}}{h_{max} + h_{0,5}}.\ (h_{max} + 2.h_{0,5}) \; .$$

7.3. Druckkräfte auf gekrümmte offene Flächen

7.3.1. Theorie

Die allgemein gültigen Berechnungsvorschriften für Druckkräfte von Gl.(7-3) und (7-4):

$$\vec{F}_p = \int \vec{n}.p.dA = i.F_{px} + j.F_{py} + k.F_{pz}$$

werden bezüglich der Komponenten der Druckkräfte weiterentwickelt:

$$\boxed{F_{px} = \int_{(A_{yz})} p(x,y,z).dA_{yz} \quad ; \quad F_{py} = \int_{(A_{xz})} p(x,y,z).dA_{xz} \quad F_{pz} = \int_{(A_{xy})} p(x,y,z).dA_{xy}} \quad (7\text{-}13).$$

Das Flächendifferential dA_{yz} bedeutet dabei die Projektion von dA auf eine Normalebene zur x-Achse;Entsprechendes gilt auch für die Flächendifferentiale dA_{xz} und dA_{xy} .Der Beweis für die Richtigkeit dieser Aussagen ergibt sich im Verlauf des ersten Beispiels im nachfolgenden Abschnitt (vgl.auch Abschn. 5.3.1).

7.3.2. Beispiele

1.Beispiel

Die Ecke eines Wasserbehälters wird durch einen Kugelausschnitt gebildet,Bild 7-12.-
Man ermittle die Überdruckkraft auf den Kugeloktanten der Größe und Richtung nach.Der Kugelradius beträgt r = 1 m,und der Wasserstand wird mit h_o = 3 m angegeben.

Lösung:

Die Gleichung einer Kugel lautet im Sinne der Gl.(7-1):

$$f\ (x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = \text{const} .$$

die Gradierung der Flächenfunktion ergibt:

$$\nabla f = i.\frac{\partial f}{\partial x} + j.\frac{\partial f}{\partial y} + k.\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\underline{\nabla f = 2.\ (\ i.x + j.y + k.z\ )}\ ;$$ den Betrag des Gradientvektors erhält man zu:

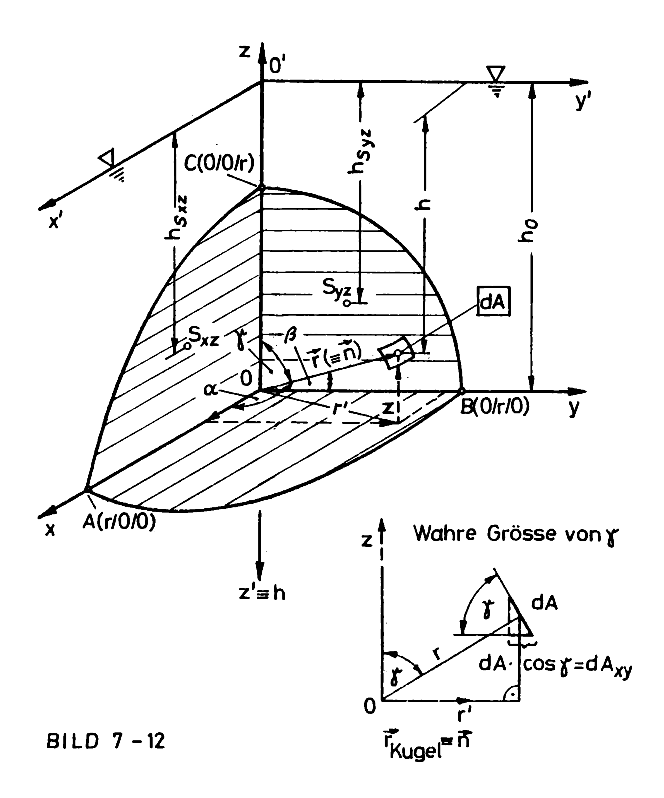


BILD 7-12

$$|\nabla f| = \sqrt{\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^2 + \left[\frac{\partial f}{\partial z}\right]^2} = 2.\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2.r \quad .$$

Somit notiert man für den Normalenvektor nach Gl.(7-2):

$$\vec{n} = \frac{\nabla f}{|\nabla f|} = i.\frac{x}{r} + j.\frac{y}{r} + k.\frac{z}{r} \quad .$$

Da es sich um einen oben offenen Behälter handelt und man nur die Überdruckkraft bestimmen möge,vereinfacht sich die Druckfunktion in Gl.(7-3) mit $p_ü = g.\varrho.(h_o-z)= g.\varrho.h$ zu:

$$\vec{F}_{pü} = \int_{(A)} (i.\frac{x}{r} + j.\frac{y}{r} + k.\frac{z}{r}).g.\varrho.h.dA \quad .$$

Für die x-Komponente der Überdruckkraft $F_{pü}$ folgt beispielsweise:

$$F_{p\ddot{u}x} = \int_{(A)} \frac{x}{r} \cdot g \cdot \rho \cdot h \cdot dA = g \cdot \rho \cdot \int_{(A_{yz})} h \cdot dA_{yz} \quad , \text{ weil } \frac{x}{r} \cdot dA = \cos\alpha \cdot dA = dA_{yz}$$

ist.Das Integral stellt das statische Moment der projizierten Fläche A_{yz} dar,und zwar bezüglich der y'-Achse.
Mit Hilfe der beiden anderen Richtungswinkeln: $y/r = \cos\beta$ und $z/r = \cos\gamma$ lassen sich die zwei noch fehlenden Komponenten der gesuchten Überdruckkraft anschreiben:

$$F_{p\ddot{u}y} = \int_{(A)} \frac{y}{r} \cdot g \cdot \rho \cdot h \cdot dA = g \cdot \rho \cdot \int_{(A_{xz})} h \cdot dA_{xz}$$

; das Integral stellt das statische Moment der projizierten Fläche A_{xz} bezüglich der x'-Achse dar.
Die Ergebnisse für die statischen Momente der projizierten Flächen lauten in Anlehnung an Gl.(7-7):

$$\underline{S_{y'} = A_{yz} \cdot h_{Syz}} \quad \text{und} \quad \underline{S_{x'} = A_{xz} \cdot h_{Sxz}} \quad .$$

Für die z-Komponente folgt:

$$F_{p\ddot{u}z} = \int_{(A)} \frac{z}{r} \cdot g \cdot \rho \cdot h \cdot dA = g \cdot \rho \cdot \int_{(A_{xy})} h \cdot dA_{xy}$$

. Der Integrand des letzten Integrals läßt sich anschaulich als das Volumenelement dV interpretieren,das sich als Säule zwischen dem Oberflächenelement dA und der Spiegeloberfläche erstreckt,Bild 7-13. Das Integral liefert damit das Volumen V_{xy} , welches sich über der bespülten Fläche befindet. Damit lassen sich die drei Komponenten zusammenstellen:

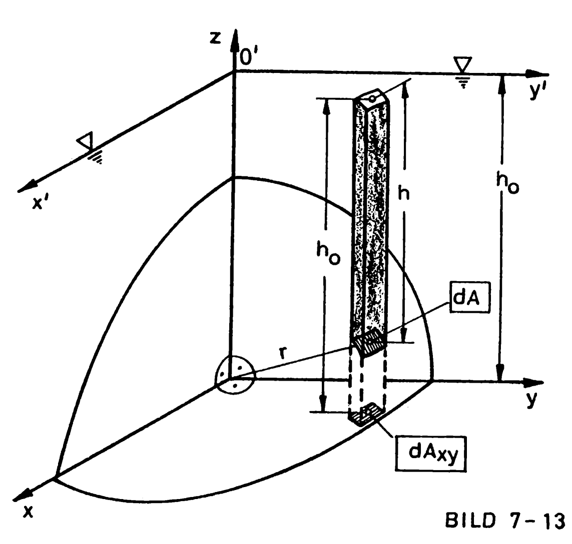


BILD 7-13

$$F_{p\ddot{u}x} = g\cdot\varrho\cdot A_{yz}\cdot h_{Syz}\ ;\ F_{p\ddot{u}y} = g\cdot\varrho\cdot A_{xz}\cdot h_{Sxz}\ ;\ F_{p\ddot{u}z} = g\cdot\varrho\cdot V_{xy} \qquad (7\text{-}14).$$

Die Vertikalkomponente einer Überdruckkraft auf eine von oben oder unten bespülten gekrümmten Fläche ist betragsmäßig gleich dem darüber lastenden Flüssigkeitsgewicht,und zwar gerechnet bis zur freien Oberfläche.

In Zahlen folgt nun:

$$F_{p\ddot{u}x} = g\cdot\varrho\cdot\pi\cdot r^2/4\cdot(0{,}4243\cdot r+h_o-r) = 9{,}81\cdot 1000\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}4243+2) = 18{,}679\ \text{kN}.$$

Aus Symmetriegründen gilt $F_{p\ddot{u}y} = F_{p\ddot{u}x} = 18{,}679$ kN.

Für die z-Komponente ergibt sich:

$$F_{p\ddot{u}z} = g\cdot\varrho\cdot V_{xy} = g\cdot\varrho\cdot\Bigg[\underbrace{\frac{\pi\cdot r^2}{4}\cdot h_o}_{\text{Zylinderviertel}} - \underbrace{\frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3}_{\text{Kugelachtel}}\Bigg]$$

$$F_{p\ddot{u}z} = 9{,}81\cdot 1000\cdot\left(\frac{\pi\cdot 1^2}{4}\cdot 3 - \frac{1}{6}\cdot\pi\cdot 1^3\right) = 17{,}978\ \text{kN}\ .$$

Treffen sich alle drei Kraftkomponenten in einem Punkt,dem Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien,dann erhält man nach zweimaliger Anwendung des Pythagoräischen Lehrsatzes die Gesamtkraft:

$$F_{p\ddot{u}} = \sqrt{F^2_{p\ddot{u}x} + F^2_{p\ddot{u}y} + F^2_{p\ddot{u}z}} \qquad (7\text{-}15).$$

Selbst wenn im allgemeinen Fall die Wirkungslinien windschief zueinander sind,kann man nach Parallelverschiebung der Kraftkomponenten eine analoge Zusammenfassung vornehmen;nur führen dann die zusätzlichen Verschiebungsmomente zu einem gesamten Verwölbungsmoment.

Da im vorliegenden Beispiel alle elementaren Druckkräfte durch den Kugelmittelpunkt verlaufen,geht auch die Wirkungslinie der gesamten Überdruckkraft

$$F_{p\ddot{u}} = \sqrt{18{,}679^2 + 18{,}679^2 + 17{,}978^2} = 31{,}953\ \text{kN}$$

durch den Kugelmittelpunkt.

Abschließend sei noch vermerkt,daß auf Grund der vorgenommenen Ableitung die Beziehungen in Gl.(7-14) Allgemeingültigkeit besitzen.Somit ist die Beweisführung für die Gl.(7-13) erbracht.

Bemerkungen:

Zusammenfassend kann gesagt werden,daß man die Druckkraft auf eine einfach gekrümmte Fläche bei Bespülung durch eine schwere Flüssigkeit mit Hilfe ihrer Horizontal- und ihrer Vertikalkomponente berechnen kann.

- Die Horizontalkomponente wirkt als Druckkraft auf eine Vertikalebene,die als Projektionsebene der krummen Fläche auf eine Normalebene zur Horizontalrichtung zu verstehen ist.-Angriffspunkt ist der Druckmittelpunkt der Projektionsfläche.
- Die Vertikalkomponente ist gleichwertig (äquivalent) der Schwerkraft desjenigen Flüssigkeitsvolumens,das sich zwischen der von oben bespülten,gekrümmten Fläche und der freien Oberfläche befindet.Bei von unten bespülten krummen Flächen handelt es sich um die Schwerkraft der virtuellen (gedachten) Volumina,die sich zwischen den gekrümmten Flächen und den freien Oberflächen befinden.-Angriffspunkt der Vertikalkomponente ist der geometrische Schwerpunkt des über der krummen Fläche befindlichen realen oder virtuellen Volumens.
  Bei von oben bespülten krummen Flächen verläuft der Wirkungssinn der Vertikalkomponente nach unten;wird eine Fläche von unten bespült, dann kehrt sich der Wirkungssinn gerade um.-Es mag nochmals hervorgehoben werden,daß die Vertikalkomponente keine Gewichtskraft,sondern eine Druckkraft ist.Es ergibt sich nur eine betragsmäßige Übereinstimmung.

2.Beispiel

Man beschaffe Berechnungsvorschriften für den Fall,daß die Überdruckkraft ermittelt werden soll,wenn eine gekrümmte Fläche einem Gleichdruckgebiet ausgesetzt ist.

Lösung:

Die Gl.(7-13) vereinfacht sich wegen des überall konstanten Druckes sofort zu:

$$\boxed{F_{\text{püx}} = p.A_{yz} \;;\quad F_{\text{püy}} = p.A_{xz} \;;\quad F_{\text{püz}} = p.A_{xy}} \qquad (7\text{-}16).$$

Der Druckmittelpunkt ist in diesem Fall jeweils der Schwerpunkt der projizierten Fläche.Diese Beziehungen gelten allgemein für Gase,Dämpfe und Flüssigkeiten,die unter sehr hohem Druck stehen,wo man also den Schwereeinfluß vergessen kann;denn es gilt ja $p(x,y,z) \equiv \text{const}$!

3.Beispiel

Eine Wasserrohrleitung aus Stahl ($\sigma_{z,zul}$ = 800 bar) steht unter einem Überdruck von $p_ü$ = 100 bar.
Wie groß muß die Wandstärke s sein, wenn die Nennweite mit d=1 m angegeben wird?-Man vernachlässige den Einfluß der Erdschwere. Eine Übersicht zeigt Bild 7-14, Pos. a .

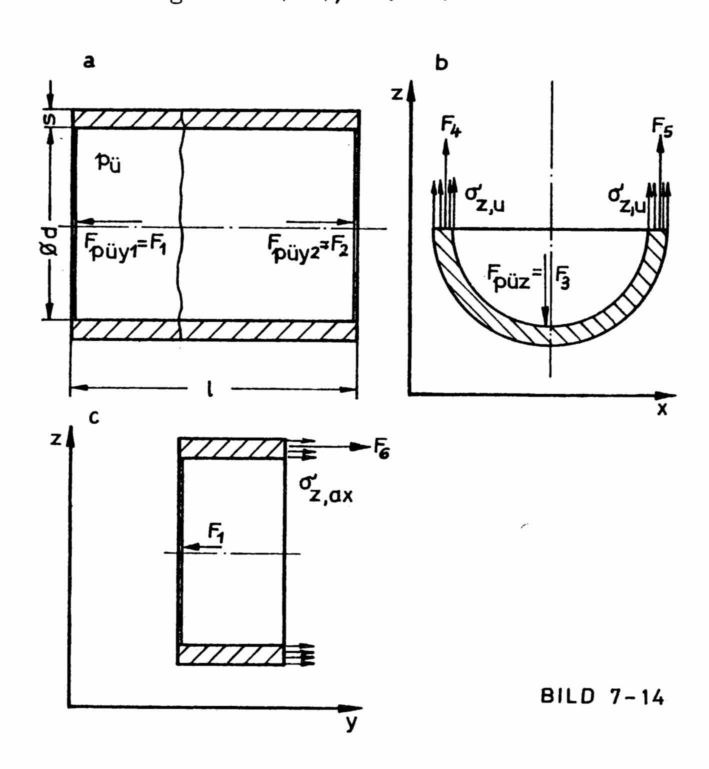


BILD 7-14

Lösung:

Die Angabe, daß die Erdschwere vernachlässigbar sei, deutet einen isobaren Raum an, wonach die Kraftkomponenten nach den Erkenntnissen des letzten Beispiels (Gl.7-16) -vgl. auch Abschn.6.1- berechnet werden mögen.
Denkt man sich die gerade Rohrleitung an den Enden abgeschlossen, dann stellt man fest, daß das Rohr nicht nur in Umfangsrichtung, sondern auch in Längsrichtung gezogen wird.
Das Gleichgewicht der Kräfte in z-Richtung (die Rohrleitung ist abgestützt, so daß das Rohrgewicht nicht in Erscheinung tritt) ergibt (Bild 7-14, Pos. b):

$\sum F_{iz} = F_4 + F_5 - F_3 = 2.F_4 - F_3 = 0$. Mit $F_4 = \sigma_{z,u}.s.l$,wobei konstante Spannungsverteilung als Näherung angenommen worden ist, folgt für die Wandstärke s, wenn man $F_3 = p_ü.d.l$ verwendet:

$2.\sigma_{z,u}.s.l - p_ü.d.l = 0$;

$$\boxed{s = \frac{p_ü.d}{2.\sigma_{z,u}} = \frac{p_ü.d}{2.\sigma_{z,zul}}} \qquad (7\text{-}17).$$

Mit Hilfe der Zahlenwerte folgt: $\underline{\underline{s}}=100.10^5.1/(2.800.10^5) = \underline{\underline{62,5\ mm}}$.

Das Kräftegleichgewicht in y-Richtung lautet:

$\underline{\sum F_{iy} = -F_1 + F_6 = 0}$; die Datenbeschaffung lautet:

$$F_1 = p_{ü}\cdot\pi\cdot d^2/4 \quad \text{und} \quad F_6 = \sigma_{z,zul\,(ax)}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left[(d+2.s)^2 - d^2\right] \quad .$$

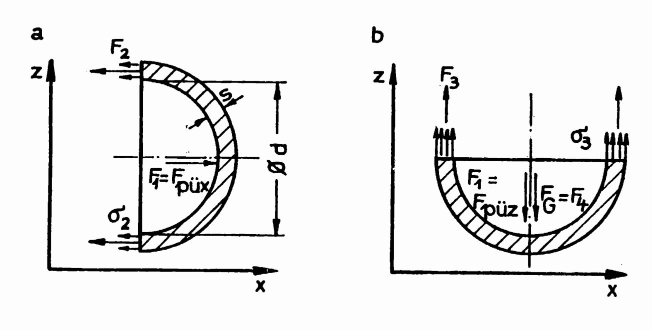
Die Gleichheit dieser beiden Kräfte führt schließlich zur Lösung einer quadratischen Gleichung:

$$\underline{\underline{s}}=-\frac{d}{2}\pm\sqrt{\frac{d^2}{4}+\frac{p_{ü}\cdot d^2}{4.\sigma_{z,zul}}} \doteq -\frac{1}{2}+\sqrt{0,25+\frac{100.10^5.1}{4.800.10^5}} = \underline{\underline{30,33\ mm}} \quad .$$

Dieses Ergebnis besagt,daß die Materialanstrengung durch die Zugspannung in Umfangsrichtung größer ist,weshalb insgesamt die größere Wandstärke s = 62,5 mm zu verwenden ist.-Bemerkung: Gl.(7-17) ist in der Festigkeitslehre auch als Kesselformel bekannt.

4.Beispiel

Für einen kugelförmigen Wasserbehälter (d= 1 m; s= 63 mm; $p_{ü}$= 100 bar) soll eine Druckprobe vorgenommen werden.Die zulässige Spannung ist zu σ_{zul}= 800 bar angegeben.Das Wassergewicht ist zu vernachlässigen; Stahldichte ρ_{St}=7850 kg/m^3. Die Spannungswerte sind für folgende Belastungsfälle zu ermitteln:



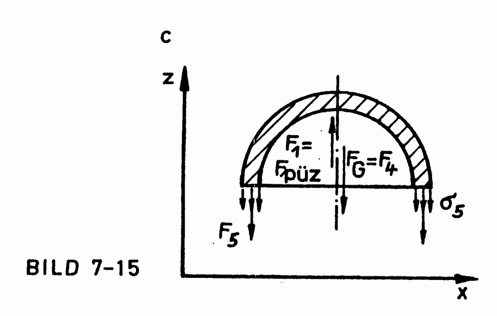


BILD 7-15

a) ohne Einfluß des Behältergewichtes;

b) mit Berücksichtigung des Kugelbehältergewichtes, und zwar bei aufgehängter Kugel;

c) genauso bei liegender Kugel.-Weitere Angaben siehe Bild 7-15.

Lösungen:

a) Effektivspannung ohne Kugelgewicht σ_2 :

Das diesbezügliche Kräftegleichgewicht lautet (Bild 7-15,Pos. a):

$\sum F_{ix} = -F_2 + F_1 = 0$; die Datenbeschaffung ergibt: $F_1 = p_ü \cdot \pi \cdot d^2/4$ und $F_2 = \sigma_2 \cdot (\pi/4) \cdot \left[(d+2 \cdot s)^2 - d^2\right]$. Damit berechnet sich die effektive Spannung in diesem Belastungsfall mit:

$$\sigma_2 = \frac{100 \cdot 10^5 \cdot 1^2}{(1+2 \cdot 0{,}063)^2 - 1^2} = 373{,}3 \text{ bar} < 800 \text{ bar} \quad !$$

b) Effektivspannung mit Kugelgewicht und aufgehängtem Behälter σ_3 :

Nach Bild 7-15,Pos. b,ergibt sich aus dem Kräftegleichgewicht

$\sum F_{zi} = F_3 - F_1 - F_4 = 0$ mit Hilfe der Einzeldaten:

$F_3 = \sigma_3 \cdot (\pi/4) \cdot \left[(d+2 \cdot s)^2 - d^2\right]$; $F_1 = (\pi/4) \cdot d^2 \cdot p_ü$ und

$F_4 = F_G = 2 \cdot (\pi/3) \cdot \left[\left(\frac{d}{2} + s\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3\right] \cdot g \cdot \rho_{St}$ für die gesuchte Spannung σ_3 :

$$\sigma_3 = \frac{2 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \left[(0{,}5+0{,}063)^3 - 0{,}5^3\right] \cdot 7850 \cdot 9{,}81 + \frac{\pi}{4} \cdot 1^2 \cdot 100 \cdot 10^5}{\frac{\pi}{4} \cdot \left[(1 + 2 \cdot 0{,}063)^2 - 1^2\right]}$$

$$\sigma_3 = 313{,}7 \text{ bar} \; .$$

Analog folgt für σ_5 (Bild 7-15,Pos. c) :

$$\sigma_5 = 372{,}9 \text{ bar} \; .$$

Bemerkungen:

Der Einfluß des Gewichts der Halbkugelschale ist vernachlässigbar. Aus einem Rohrstück von Beispiel 3 und zwei Böden,dargestellt durch zwei Halbkugelschalen nach Beispiel 4,kann man einen Behälter konzipieren,der sich ohne weiteres nach der Kesselformel (Gl. 7-17) berechnen läßt,da die höchste Spannung ja in Umfangsrichtung des zylindrischen Behälterteiles zu suchen ist.

5. Beispiel

Ein kugelförmiger, zweigeteilter Wasserbehälter hängt an einem Seil. Angaben: Durchmesser d = 1 m; Wandstärke s = 40 mm; $\varrho_{Stahl} = 7850\ kg/m^3$; Atmosphärendruck p_o = 1,015 bar.
Wie groß ist der Absolutdruck in der Trennungsebene des Kugelbehälters, Bild 7-16, damit die beiden Behälterhälften ohne Flanschschrauben zusammengehalten werden? - Die Abdichtung geschieht mittels einer sehr schmalen Dichtlippe am Kugelinnendurchmesser.

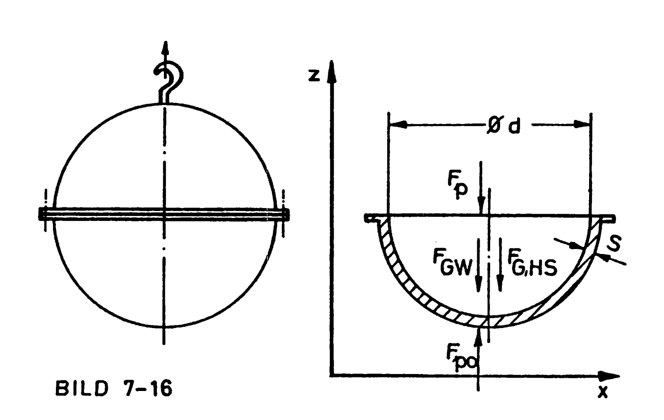


BILD 7-16

Lösung:

Das Kräftegleichgewicht an der freigemachten unteren Kugelhalbschale lautet:

$$\sum F_{zi} = -F_p - F_{G,W} - F_{G,HS} + F_{po} = 0$$

. Datenbeschaffung:

Absolutdruckkraft: $F_p = p.(\pi/4).d^2$;

Gewicht der Wasserkugel, die in voller Größe sich auf der unteren Kugelhalbschale abstützt:

$$F_{G,W} = \varrho_W . g . (4/3) . \pi . (d/2)^3 \quad ;$$

Gewicht der Halbkugelschale:

$$F_{G,HS} = \varrho_{St} . g . (2/3) . \pi . \left[\left(\frac{d}{2} + s\right)^3 - \left(\frac{d}{2}\right)^3 \right] \quad ;$$

Absolutdruckkraft der Atmosphäre:

$$F_{p_o} = p_o . (\pi/4) . d^2 \quad .$$

Setzt man diese Detailausdrücke in die Gleichgewichtsgleichung ein, so ergibt sich für den gesuchten Absolutdruck:

$$p = \frac{1,015.10^5.(\pi/4).1^2-10^3(4/3).\pi.9,81}{(\pi/4).1^2} - \frac{7850.9,81.(2/3).\pi.(0,54^3-0,5^3)}{(\pi/4).1^2}$$

$$\underline{\underline{p = 0,883 \text{ bar}}} \quad .$$

Bemerkung:

Dieses Beispiel lehnt sich an den berühmten Versuch mit den Magdeburger Halbkugeln an, den Otto von Guericke 1654 durchführte.

6. Beispiel

Ein oben offener Wasserbehälter mit zylindrischer Seitenwand, Bild 7-17, erfährt eine resultierende Seitenwandkraft F_r, die der Größe, Richtung und Lage nach zu ermitteln ist.-Angaben: Radius der zylindrischen Seitenwand r = 3 m; Behälterbreite b = 5 m; ρ_W = 1000 kg/m³.

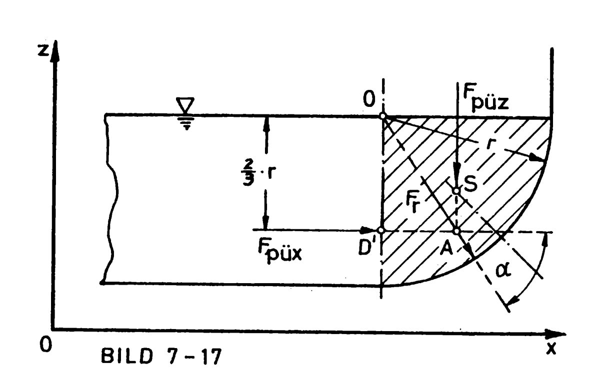


BILD 7-17

Lösungen:

a) Betrag der Seitenwandkraft:

Den Gl.(7-8) und (7-13) und den Bemerkungen des ersten Beispiels zufolge berechnet man zuerst die Horizontalkomponente nach:

$$F_{püx} = g.\rho_W.h_{S'}.A' = g.\rho_W.(r/2).b.r = g.\rho_W.b.r^2/2 \quad .$$

Die gestrichenen Angaben beziehen sich auf die projizierte Seitenwand bezüglich einer Normalebene zur x-Achse!-Die Vertikalkomponente entspricht gerade dem Gewicht der schraffierten Zone in Bild 7-17:

$$F_{püz} = g.\rho_W.V = g.\rho_W.(\pi/4).r^2.b \quad .$$

- Da es sich um eine einfach gekrümmte Seitenwand handelt, fällt die zweite Horizontalkomponente $F_{püy}$ weg, so daß nach Gl.(7-15) die resultierende, auf dem Überdruck basierende Seitenwanddruckkraft sich ergibt zu:

$$F_r = F_{pü} = \sqrt{F^2_{püx} + F^2_{püz}} = g.\rho_W.b.r^2.\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\pi^2}{16}}$$

. Mit den Zahlen-

werten folgt:

$$\underline{\underline{F_r}} = 9{,}81.1000.5.3^2.\sqrt{0{,}25 + \pi^2/16} = \underline{\underline{411\ \text{kN}}} \quad .$$

b) Richtung bzw. Neigungswinkel:

Wegen der einfachen Seitenwandkrümmung dürfen die beiden Kraftkomponenten im Schnittpunkt ihrer Wirkungslinien zusammengefaßt werden;dort läßt sich dann ohne weiteres der Neigungswinkel α mittels der Beziehung $tg\alpha = F_{püz} / F_{püx} = \pi/2$ berechnen:

$$\underline{\underline{\alpha = 57{,}52^\circ}} \quad .$$

c) Lage der Wirkungslinie:

Auf jedem Seitenwandelement steht die dazugehörige differentelle Überdruckkraft senkrecht,was bei zylindrischer Wandkrümmung doch nichts anderes bedeutet,als daß die Detailwirkungslinie durch den Krümmungsmittelpunkt hindurchgeht.Da ein ebenes Problem vorliegt (in Bildtiefe ergeben sich in jedem Schnittbild gleiche Verhältnisse) und die Krümmung der Flächenelemente überall gleich ist,besitzen sie alle denselben Krümmungsmittelpunkt O .Somit ist die Gewähr gegeben,daß die resultierende Druckkraft $F_r = F_{pü}$ auch durch O verläuft !- Auf Grund dieser Feststellung entfällt die Bestimmung des Flächenschwerpunktes S sowie des Schnittpunktes A.Man darf demnach direkt im Krümmungsmittelpunkt O die Gesamtwirkungslinie unter dem bereits bekannten Neigungswinkel α eintragen!

7.Beispiel

Man bestimme die Seitenwanddruckkraft auf ein Sektorwehr der Größe, Richtung und Lage nach,Bild 7-18.
Angaben:Wasserstandshöhe $h = 4$ m; Wehrbreite $b = 6$ m; Wehrwinkel $\alpha = 45^\circ$.

Lösungen:

a) Betrag der Seitenwanddruckkraft:

Gleiartige Überlegungen wie im letzten Beispiel führen zu folgenden Gleichungen:

$$F_{püx} = g.\varrho.h_{S'}.A' = g.\varrho.0{,}5.h.b = g.\varrho.b.h^2/2 \quad ;$$

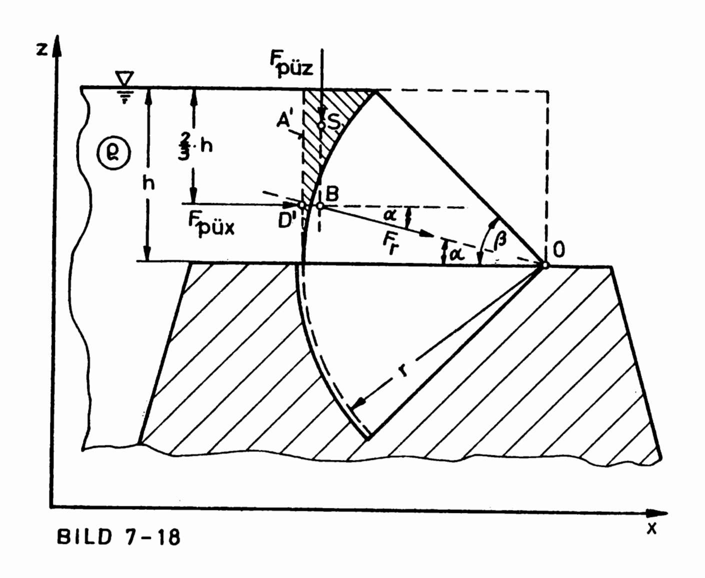


BILD 7-18

$F_{püz} = g.\rho.V = g.\rho.b.(h.r - 0{,}125.\pi.r^2 - 0{,}5.h^2)$, wobei $r=h.\sqrt{2}$ gilt.-Die Resultierende errechnet sich dann folgendermaßen:

$$F_r = \sqrt{F_{püx}^2 + F_{püz}^2} = g.\rho.b.h^2.\sqrt{0{,}25 - (\sqrt{2} - 0{,}25.\pi - 0{,}5)} \quad ;$$

$$\underline{F_r = F_{pü} = 0{,}4831.g.\rho.b.h^2} \quad . \text{ - In Zahlen folgt:}$$

$$\underline{\underline{F_r}} = 0{,}4831.9{,}81.1000.6.4^2 = \underline{\underline{454{,}96 \text{ kN}}} \quad .$$

b) Richtung bzw. Neigungswinkel:

Die Winkelbestimmung läßt sich auch hier wie im vorigen Beispiel durchführen:

$$tg\alpha = F_{püz}/F_{püx} = 0{,}2576 \quad ; \quad \underline{\underline{\alpha = 14{,}45^o}} \quad .$$

c) Lage der Wirkungslinie:

Auch in diesem Beispiel entfällt wegen der überall gleichen Seitenwandkrümmung die Bestimmung des Schwerpunktes S der schraffierten Teilfläche und die Ermittlung des Schnittpunktes B.Wiederum verläuft

die Wirkungslinie der Resultierenden durch den Krümmungsmittelpunkt bzw. hier den Drehpunkt 0 des Sektorwehres.

8. Beispiel

Zwei Wasserbehälter sind durch eine halbzylindrische Seitenwand voneinander getrennt, Bild 7-19. Daraus entnehme man auch die Wasserstands-

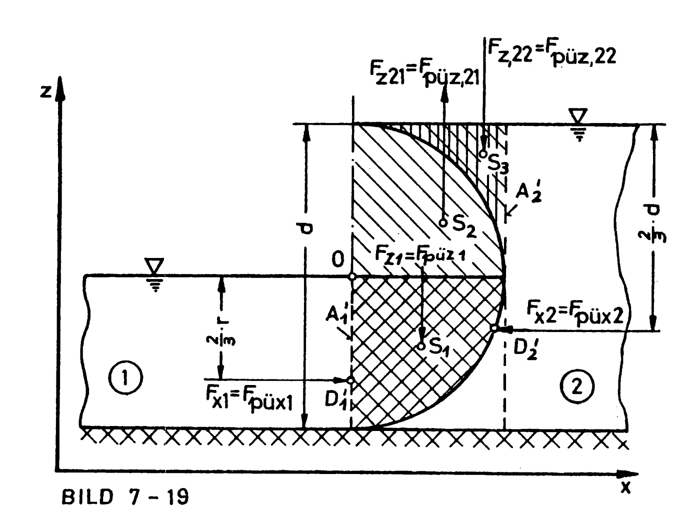


BILD 7-19

höhen.-Angaben: Durchmesser d = 2 m, Behälterbreite b = 5 m.-Man ermittle die resultierende Überdruckkraft auf die zylindrische Trennwand der Größe, Richtung und Lage nach.

Lösungen:

a) Betrag der Trennwandkraft:

Das vorgelegte, ebene Komponentensystem läßt sich folgendermaßen kommentieren:

Im Druckmittelpunkt D_1' wirkt die horizontale Druckkraftkomponente $F_{x1} = F_{püx,1}$. - Im Schwerpunkt S_1 wirkt die vertikale Druckkraftkomponente $F_{z1} = F_{püz,1}$ nach unten; sie entspricht ja gerade dem Gewicht der rechts schraffierten Zone.

Im Druckmittelpunkt D_2' wirkt die gesamte Horizontalkomponente von rechts her. Sie heißt $F_{x2} = F_{püx,2}$. – Im Schwerpunkt S_2 bezüglich der links schraffierten Zone wirkt die Aufdruckkraft $F_{z,21} = F_{püz,21}$, welche gleichen Betrag hat wie das links schraffierte Flüssigkeitsgewicht. Von unten bespülte Flächen erfahren doch eine Aufdruckkraft, die gleich ist dem Gewicht des Flüssigkeitsvolumens, das man sich aufgebracht denkt zwischen der von unten bespülten Fläche und dem Flüssigkeitsspiegel.

Im Schwerpunkt S_3 wirkt die Abdruckkraft $F_{z,22} = F_{püz,22}$. Sie entspricht dem Gewicht der vertikal schraffierten Zone.

Die linksseitigen Komponenten führen zu einer Teilresultierenden F_{r1}, die rechtsseitigen Komponenten ergeben als weitere Teilresultierende F_{r2}. Jede Teilresultierende verläuft mit ihrer Wirkungslinie durch den gemeinsamen Krümmungsmittelpunkt 0 (siehe auch die Beispiele 6 und 7), so daß sie problemlos in 0 zur Gesamtresultierenden zusammengefaßt werden können. Das erleichtert die rechnerische Ermittlung von F_r ausserordentlich: Man kann jetzt alle Komponenten schadlos parallel durch 0 verlaufen lassen. Rechnerisch läßt sich folgendermaßen vorgehen:

$$\underline{\sum F_{xi} = F_{x1} - F_{x2} = F_{rx}} \qquad (1).$$

$$\underline{\sum F_{zi} = -F_{z1} + F_{z,21} - F_{z,22} = F_{rz}} \qquad (2).$$

Nun hat die Datenbeschaffung der einzelnen Komponenten zu erfolgen:

$$F_{x1} = g.\varrho.h_{S1}'.A_1' = g.\varrho.(d/4).b.(d/2) = g.\varrho.b.d^2/8 \quad ;$$

$$F_{x2} = g.\varrho.h_{S2}'.A_2' = g.\varrho.(d/2).b.d = g.\varrho.b.d^2/2 \quad ;$$

$$F_{z1} = g.\varrho.b.0{,}25.(\pi/4).d^2 = g.\varrho.b.\pi.d^2/16 \quad ;$$

$$F_{z21} = g.\varrho.b.(0{,}25.\frac{\pi.d^2}{4} + \frac{d^2}{4}) = \frac{4+\pi}{16}.g.\varrho.b.d^2 \quad ;$$

$$F_{z,22} = g.\varrho.b.(\frac{d^2}{4} - \frac{\pi.d^2}{16}) = \frac{4-\pi}{16}.g.\varrho.b.d^2 \quad .$$

Damit erhält man für die Komponenten der Resultierenden:

$$(1): \quad \underline{F_{rx} = -\frac{3}{8}.g.\varrho.b.d^2} \quad ; \qquad (2): \quad \underline{F_{rz} = +\frac{\pi}{16}.g.\varrho.b.d^2} \quad .$$

Die Resultierende lautet danach:

$$F_r = \sqrt{F_{rx}^2 + F_{rz}^2} = \sqrt{(\frac{3}{8}.9,81.1000.5.2^2)^2+(\frac{\pi}{16}.9,81.1000.5.2^2)^2}$$

$$F_r = 83,05 \text{ kN} \quad .$$

b) Richtung bzw. Neigungswinkel:

Entsprechend der Vorzeichen der Komponentenergebnisse wirkt die Kraft in den zweiten Quadranten hinein,d.h.: nach links oben!-Der Neigungswinkel beträgt somit: $tg\alpha = F_{rz}/F_{rx} = (\pi/16)/(-3/8) = -0,5236$;

$$\alpha = -27,64^\circ .$$

c) Lage der Wirkungslinie:

Dieses Problem ist bereits in Aufgabenposition a) und b) gelöst worden: Sie verläuft durch 0 bei einem Winkel von $\alpha = -27,64^\circ$.

9.Beispiel

Ein kugelförmiger Ventilkörper wird durch eine Wassersäule von h= 15 m in seinen Ventilsitz gepreßt, Bild 7-20.-Wie groß muß der untere Überdruck sein,damit ohne Berücksichtigung von Trägheits-, Reibungs- und Adhäsionskräften der Ventilkörper angehoben wird ?

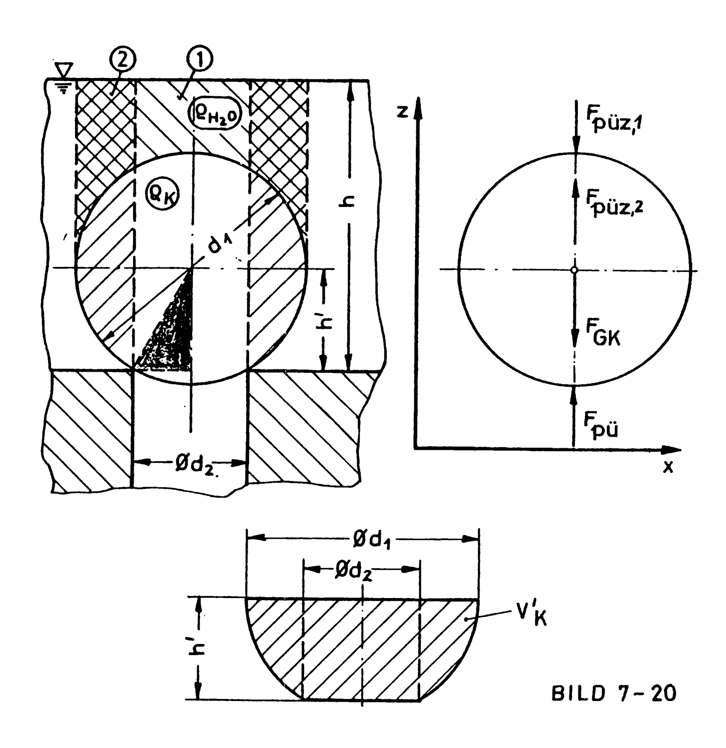


BILD 7-20

Angaben: d_1 = 50 mm; ρ_W = 1000 kg/m³; ρ_{Kugel} = 1800 kg/m³; d_2= 25 mm.

Lösung:

Im Grenzfall des Anhebens der Kugel gibt es keine Auflagerkraft, vom Ventilsitz herkommend. Deshalb lautet das Kräftegleichgewicht an der freigemachten Kugel:

$\sum F_{zi} = + F_{pü} - F_{GK} - F_{püz,1} + F_{püz,2} = 0$. - Datenbeschaffung:

Gewicht der Ventilkugel: $F_{GK} = g \cdot \rho_K \cdot \pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot g \cdot \rho_K \cdot d_1^3$;

unbekannte Überdruckkraft: $F_{pü} = p_ü \cdot (\pi/4) \cdot d_2^2$;

Abdruckkraft der von oben bespülten Kugelfläche:

$$F_{püz,1} = g \cdot \rho_W \cdot \left[\frac{\pi}{4} \cdot d_1^2 \cdot (h-h') - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^3\right]$$

mit $h' = \sqrt{(d_1/2)^2 - (d_2/2)^2}$.

Aufdruckkraft der von unten bespülten Kugelfläche:

$$F_{püz,2} = g \cdot \rho_W \cdot \left[\frac{\pi \cdot d_1^2}{4} \cdot (h-h') + V_K' - \frac{\pi \cdot d_2^2}{4} \cdot h\right]$$

mit dem Volumen der Kugelschicht:

$$V_K'' = \frac{\pi}{6} \cdot h' \cdot \left[3 \cdot (d_1/2)^2 + 3 \cdot (d_2/2)^2 + h'^2\right] .$$

Mit den Zahlenwerten erhält man schließlich folgende Einzelergebnisse:

$F_{GK} = (\pi/6) \cdot 9{,}81 \cdot 1800 \cdot 0{,}05^3 = 1{,}156$ N ;

$F_{pü} = p_ü \cdot (\pi/4) \cdot 0{,}025^2 = 4{,}909 \cdot 10^{-4}$ N ;

$h' = \sqrt{0{,}025^2 - 0{,}0125^2} = 21{,}65$ mm ;

$$F_{püz,1} = 9{,}81 \cdot 1000 \cdot \left[\frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} \cdot (15-0{,}02165) - 0{,}5 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 0{,}025^3\right] = 288{,}19 \text{ N};$$

$$V_K' = \frac{\pi}{6} \cdot 0{,}02165 \cdot \left[3 \cdot 0{,}025^2 + 3 \cdot 0{,}0125^2 + 0{,}02165^2\right] = 3{,}1882 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3;$$

$$F_{püz,2} = 9{,}81 \cdot 1000 \cdot \left[\frac{\pi \cdot 0{,}05^2}{4} \cdot (15-0{,}02165) + 3{,}1882 \cdot 10^{-5} - \frac{\pi \cdot 0{,}0125^2}{4} \cdot 15\right]$$

$F_{püz,2} = 216{,}59$ N.

Setzt man diese Zwischenergebnisse in die anfängliche Gleichgewichtsgleichung ein,dann folgt:

$$4{,}909.10^{-4}.p_{ü} - 1{,}156 - 288{,}19 + 216{,}59 = 0 \quad ;$$

$$p_{ü} = 1{,}482 \text{ bar} \quad .$$

7.4. Druckkräfte auf geschlossene Flächen

7.4.1. Bei isobarer Umgebung

Bei geschlossenen Flächen handelt es sich selbstverständlich nur um gekrümmte oder polyedrische Flächen.Unter einer geschlossenen Fläche verstehe man beispielsweise die Oberfläche eines Körpers oder Kontrollraumes.

Aus den Bemerkungen zu Gl.(7-16) läßt sich sofort schlußfolgern,daß die resultierende Überdruckkraft verschwindet,wenn ein Körper einem isobaren Druckfeld ausgesetzt wird.In jeder Kontrollrichtung läßt sich die Körperoberfläche auf eine Normalebene projizieren,die von beiden Seiten voraussetzungsgemäß von gleich großem Druck beaufschlagt wird,so daß sich also in jeder Richtung die Überdruckkraftwirkungen aufheben.

7.4.2. Bei schwerer Umgebung

Wird dagegen ein Körper,dessen Oberfläche eine geschlossene Fläche bildet,in eine schwere Flüssigkeit getaucht,dann wird er von einem Druckfeld umgeben,wobei der Druck mit zunehmender Tiefe wächst.Hierbei entsteht erwartungsgemäß eine resultierende Überdruckkraft.Darüber berichtet der nächste Abschnitt.

8. HYDROSTATISCHER AUFTRIEB UND SCHWIMMZUSTAND

8.1. Hauptsatz von Archimedes

In Bild 8-1 wird ein Körper gezeigt,der voll in eine schwere Flüssigkeit eingetaucht worden ist.Zur Orientierung dient ein räumliches Koordinatensystem.Es entwickeln sich an jedem Oberflächenelement Überdruckkräfte,die darauf senkrecht stehen.Wie man Überdruckkräfte mittels ihrer Komponenten berechnen kann,geben bekanntlich die Beziehungen von Gl.(7-13) an.

Parallele Geraden zur x-Achse berühren den eingetauchten Körper längs

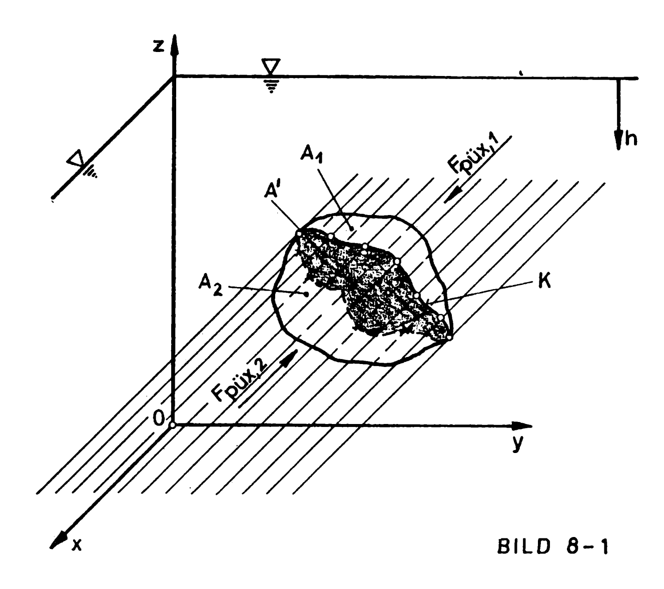


BILD 8-1

der geschlossenen Kurve K .Damit wird die geschlossene Raumfläche in zwei Teile: A_1 und A_2 getrennt.Projiziert man nunmehr die Teilflächen auf eine Normalebene zur x-Achse,dann erhält man für beide Beobachtungsseiten dieselbe im Bild 8-1 angeschwärzte Fläche A'.Die sich einstellenden Überdruckkräfte $F_{püx,1}$ und $F_{püx,2}$ sind betragsmäßig gleich,da in jeder Tiefenlage h die Überdrücke auf den Seiten A_1 und A_2 für sich gleich groß sind,obwohl ρ.g.h mit der Tiefe zunimmt!-Die beiden genannten Überdruckkräfte haben aber entgegengesetzte Richtung,weshalb sie sich gegenseitig aufheben und zu keiner resultierenden Kraftkomponente führen.Sie beanspruchen aber den Körper auf Druck,was für die festigkeitsmäßige Berechnung bedeutungsvoll ist.Die Kraftberechnung wird für den Sonderfall einer vertikal stehenden Seitenwand vorgenommen,und zwar mit Hilfe der Gleichungen (7-8) bis (7-10).Abschließend kann gesagt werden, daß die Überdruckkräfte keine Bewegung des Körpers in x-Richtung verursachen können.

Zu gleichlautenden Ergebnissen und Aussagen gelangt man auch bei den Untersuchungen in y-Richtung.

Zu einem ganz anderen Ergebnis führt die Betrachtung der Überduckkräfte in z-Richtung,Bild 8-2.-Die vertikalen Körpertangenten berühren den Körper längs der geschlossenen Kurve K und bilden die Mantelfläche eines zylindrischen Körpers.Die beiden durch K abgetrennten Teilflächen heißen A_1 und A_2.Nach der dritten Beziehung in Gl. (7-14) berechnen sich die z-Komponenten der Überdruckkräfte für von unten oder von oben bespülten Körperoberflächen betragsmäßig als das Gewicht des Flüssigkeitsvolumens,das man sich von der fraglichen Körperoberfläche (hier A_1 und A_2) bis hin zur Flüssigkeitsoberfläche S

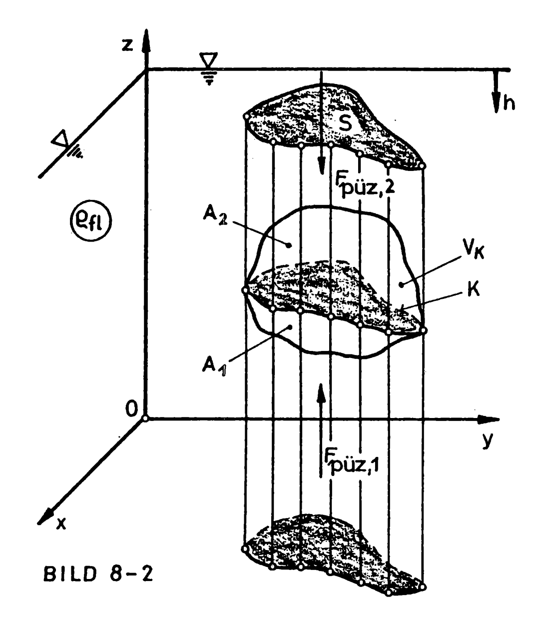


BILD 8-2

vorstellt.-Nennt man das Volumen V zwischen der Detailoberfläche A_1 und dem Flüssigkeitsspiegel S und möge das Körpervolumen V_K heißen, dann kann man für die Überdruckkräfte notieren:

$$F_{püz,1} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot (V_K + V)$$

und

$$F_{püz,2} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot V \quad .$$

Es stellt sich danach eine nach oben wirkende resultierende Druckkraft

$$\boxed{F_{püz} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot V_K = F_{A,st}} \qquad (8\text{-}1)$$

ein. Sie wird auch hydrostatischer Auftrieb $F_{A,st}$ genannt. Hierin besteht der Hauptsatz von Archimedes:

> Wenn ein Körper in eine schwere Flüssigkeit voll eingetaucht wird, dann erfährt er eine nach oben gerichtete, resultierende Überdruckkraft, die gleich ist dem Betrag des Flüssigkeitsgewichtes, welches der Körper verdrängt hat. Der Angriffspunkt des Auftriebs ist der Massenmittelpunkt M_V der verdrängten Flüssigkeit und wegen der Homogenität der Flüssigkeit gleichbedeutend mit dem geometrischen Schwerpunkt S des verdrängten Flüssigkeitsvolumens.

8.2. Vertikalbewegungen und Schwimmen

Ein vollkommen eingetauchter Körper verliert nichts von seinem Gewicht; es müssen jetzt nur zwei Kräfte berücksichtigt werden, die in z-Richtung auf ihn einwirken: die äußere Kraft F_G und die Flächenkraft $F_{A,st}$, Bild 8-3.

Die Kräftedifferenz $\underline{F_z = F_{A,st} - F_G = (\varrho_{fl} - \varrho_K) \cdot g \cdot V_K}$ gibt Auskunft über das Bewegungsverhalten des untergetauchten Körpers.

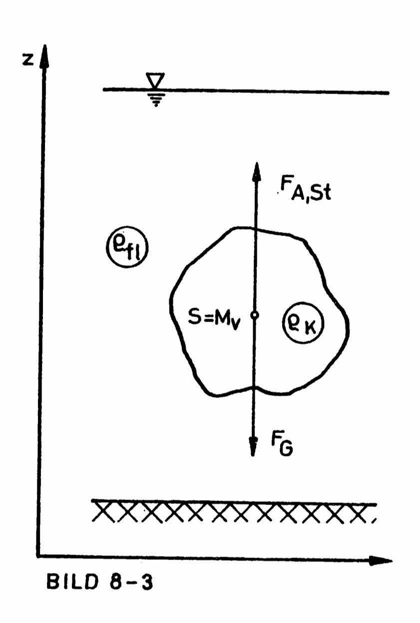


BILD 8-3

1.Fall: $F_{A,st} < F_G$; $\varrho_{fl} < \varrho_K$.
F_z wird negativ und heißt Absinkkraft. Es stellt sich so lange eine Abwärtsbewegung ein, bis der Körper auf dem Grund aufliegt.

2.Fall: $F_{A,st} = F_G$; $\varrho_{fl} = \varrho_K$.
$F_z = 0$ wegen der Gleichheit der Dichten. Der Körper bleibt irgendwo im untergetauchten Zustand "schweben". Es herrscht Kräftegleichgewicht.

3.Fall: $F_{A,st} > F_G$; $\varrho_{fl} > \varrho_K$.
F_z wird positiv und heißt Aufsteigekraft. Wenn man von der Flüssigkeitsreibung zunächst absieht, dann stellt sich wie auch bei der Sinkbewegung eine beschleunigte Bewegung ein. Der Körper überschreitet die freie Oberfläche und erfährt vertikale Schwingungen, die natürlich im Falle realer Flüssigkeit gedämpft werden und allmählich abklingen: Der Körper kommt zur Ruhe und schaut mit einem Teil seines Körpervolumens V_{K2} aus der Flüssigkeitsoberfläche heraus, Bild 8-4. Das Kräftegleichgewicht verlangt:

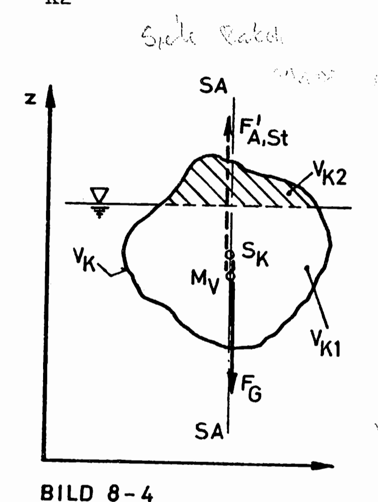


BILD 8-4

$$F'_{A,st} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot V_{K1} = F_G = \varrho_K \cdot g \cdot V_K \quad .$$

Das noch eingetauchte Volumen

$$\boxed{V_{K1} = \frac{\varrho_K}{\varrho_{fl}} \cdot V_K = V_V} \qquad (8\text{-}2)$$

heißt "Wasserverdrängung V_V", und die entsprechende Masse nennt man Wassermassenverdrängung m_V.
Die Gewichtskraft des Körpers greift im Schwerpunkt des Körpers S_K an. Der Auftrieb greift dagegen im Verdrängungsmittelpunkt M_V an, der identisch ist mit dem geometrischen

Schwerpunkt des verdrängten Flüssigkeitsvolumens S_{Vl}.
Im Zustand der Ruhe liegen beide Punkte auf einer Vertikalen, die man auch Schwimmachse nennt. Sie gilt mit dem Körper fest verbunden. Dadurch bleibt auch in geneigter Lage der Körperschwerpunkt S_K ein Punkt auf der Schwimmachse SA, Bild 8-5. Der Verdrängungsmittelpunkt M_V' (gleichbedeutend mit dem Schwerpunkt S_{Vl}' des in geneigter Körperposition verdrängten Flüssigkeitsvolumens) liegt aber nicht mehr auf der Schwimmachse, sondern ausserhalb davon. Das Verdrängungsvolumen wurde ja in seiner Form verändert.
Der Schnittpunkt der Vertikalen durch den Verdrängungsmittelpunkt M_V' mit der Schwimmachse SA heißt Metazentrum M_e; er ist kein fester Punkt. Das Metazentrum liegt zwar immer auf der Schwimmachse, es ändert seine Lage aber mit dem Neigungswinkel α.

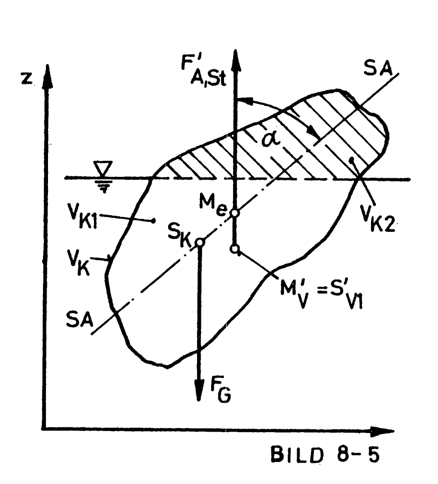


BILD 8-5

8.3. Stabilität des Schwimmzustandes (Satz von Dupin)

Allgemein kennt man drei Arten von Gleichgewicht. Man spricht von:

stabilem Gleichgewicht,
wenn nach Wegnahme eines Störeinflusses (z.B.: Drehmoment) die ursprüngliche Lage von allein (ohne Regelgerät!) wieder erreicht wird;

indifferentem Gleichgewicht,
wenn nach Wegnahme eines Störeinflusses die neue Lage gehalten wird und die ursprüngliche nicht mehr erreichbar ist;

labilem Gleichgewicht,
wenn nach Wegnahme eines Störeinflusses der Körper sich noch weiter von seiner ursprünglichen Lage entfernt, bis der Körperschwerpunkt seine tiefst mögliche Lage gefunden hat. (Satz von Torricelli oder Satz von der geringsten potentiellen Energie!).

Stabiles Gleichgewicht läßt sich bei einem schwimmenden Körper

ermöglichen,daß der untere Teil eines Schwimmkörpers eine größere Massenkonzentration aufweist als der obere. Veranschaulicht wird dieser Sachverhalt zunächst durch ein Aräometer (Senkwaage, Densimeter, Dichtemesser für Flüssigkeiten), wie in Bild 8-6 gezeigt. Das in Schräglage sich einstellende Kräftepaar ($-F_G$; $+F'_{A,st}$) bildet ein aufrichtendes Drehmoment:

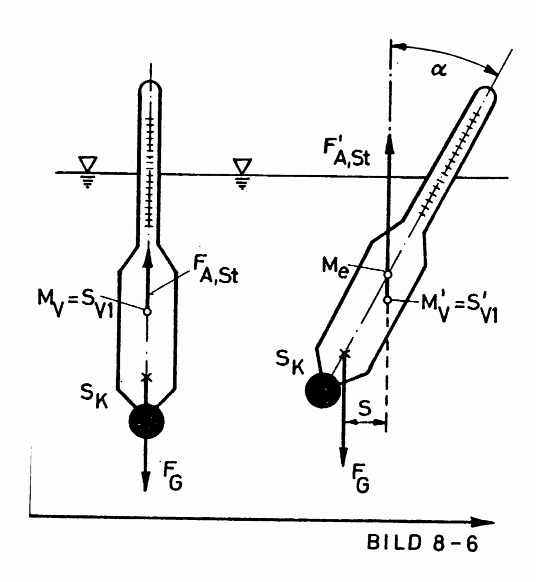


BILD 8-6

$$M = F_G \cdot s \quad ,$$

so daß die ursprüngliche Lage durch Einschwingen erreichbar wird.

Bei einem homogenen, voll tauchten Körper, der zudem schwebt, fallen Körperschwerpunkt und Verdrängungsmittelpunkt (Schwerpunkt des verdrängten Flüssigkeitsvolumens) zusammen. Dadurch ist im Falle des Schwimmens nur indifferentes Gleichgewicht möglich.

Das in Abschn. 8.2 erwähnte Metazentrum wird nun hier in Stabilitätsbetrachtungen miteinbezogen. Es kann auf der Schwimmachse bezüglich

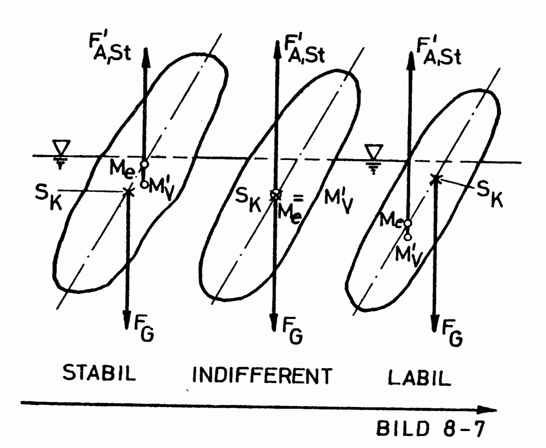


BILD 8-7

örperschwerpunktes drei besondere Lagen einnehmen, Bild 8-7:

egt oberhalb von S_K

Das aus Körpergewicht und Auftrieb sich bildende Kräftepaar richtet den Schwimmkörper wieder auf. Die beiden Kräfte sind deshalb antiparallel gleich, weil im Schwimmzustand Körperge-

wicht und Auftrieb gleich sind, gleichgültig, welche Lage eingenommen wird: stabiles Gleichgewicht!

M_e liegt in S_K

Das Kräftepaar verschwindet; die beiden Kräfte liegen in einer vertikalen Wirkungslinie, die durch $S_K = M_V'$ verläuft: indiferentes Gleichgewicht!

M_e liegt unterhalb von S_K

Das Kräftepaar wirkt nun als zusätzliches Kippmoment: labiles Gleichgewicht!

Zur Formalisierung dieser qualitativen Aussagen führt man die metazentrische Weite l_{Me}, den Abstand zwischen Verdrängungsmittelpunkt M_V in Ruhelage und dem Metazentrum M_e, sowie die Schwerpunktsweite l_S, den Abstand zwischen dem Verdrängungsmittelpunkt M_V in Ruhelage und dem Körperschwerpunkt S_K, ein, Bild 8-8. - Je nach der Neigung ändert sich die metazentrische Weite, wobei die Schwerpunktsweite jedoch konstant bleibt.

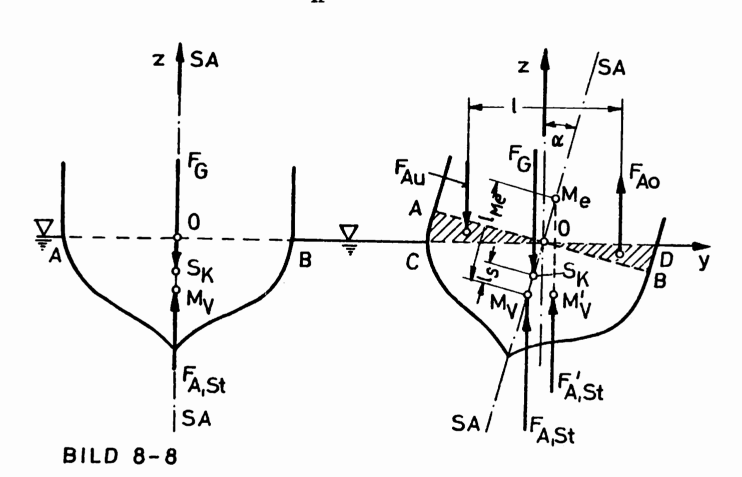


BILD 8-8

Ableitung der metazentrischen Weite:

Im Ruhezustand greifen die Gewichtskraft im Körperschwerpunkt S_K und der Auftrieb im Verdrängungsmittelpunkt M_V an. Wird die Schwimmachse SA aus der Vertikalen um den Winkel α geneigt, dann erkennt man sofort, daß im Spantquerschnitt des Schwimmkörpers der keilförmige Bereich OBD auftriebsvermehrend hinzutritt und daß andererseits die Zone OAC dem Auftrieb verloren geht.

Grundsätzlich ist hier zu sagen, daß ein Körper dann stabil schwimmt, wenn sein Körperschwerpunkt tiefer liegt als der Verdrängungsmittelpunkt. Es kann aber unter ganz bestimmten Bedingungen auch dann noch stabiles Schwimmen auftreten, wenn der Körperschwerpunkt über dem Ver-

drängungsmittelpunkt liegt (Bild 8-8): die rechte Anordnung besagt, daß hier bei Neigung der Schwimmachse sich die Gestalt des Verdrängungsvolumens ändert (nicht aber die Größe) und daß der Verdrängungsmittelpunkt von M_V nach M_V' wandert!-Man sieht,daß der Auftrieb $F_{A,st}'$ zusammen mit F_G ein rückdrehendes und aufrichtendes Kräftepaar abgeben,weshalb auch in diesem Fall stabiles Schwimmen gewährleistet ist.

Nun kann man sich,wenn der Körperschwerpunkt als Momentenbezugspunkt angesehen wird,die rücktreibende Drehmomentenwirkung von $F_{A,st}'$ ersetzt denken durch die gleich große ,aber in M_V wirkende ursprüngliche Auftriebskraft $F_{A,st}$,verstärkt durch die Auftriebswirkung F_{Ao} (Bereich OBD) und verringert durch F_{Au} (Bereich OAC).Nimmt man den Linksumsinn als positive Drehrichtung an,dann bietet sich die Gleichheit der Drehmomentenwirkungen folgendermaßen an:

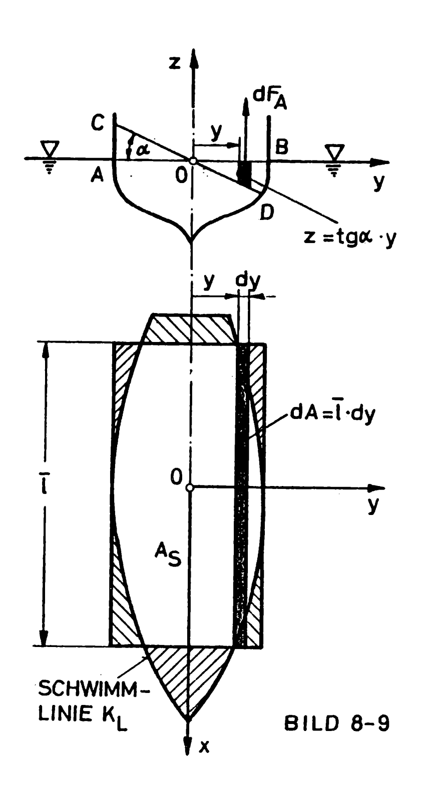


BILD 8-9

$$F_{A,st}' \cdot (l_{Me} - l_S) \cdot \sin\alpha =$$

$$- F_{A,st} \cdot l_S \cdot \sin\alpha + F_{Ao} \cdot l \quad ;$$

man erinnere sich der einfachen Anbringung der Drehmomentenwirkung eines Kräftepaares! Es stellt letzten Endes die Drehwirkung folgender Auftriebsverteilung dar,Bild 8-9.

$$F_{Ao} \cdot l = \int_A^B dF_A \cdot y = \varrho_{fl} \cdot g \cdot \int_A^B dV_V \cdot y = \varrho_{fl} \cdot g \cdot \int_A^B \bar{l} \cdot z \cdot dy \cdot y \quad .$$

Mit $z = tg\alpha \cdot y$ und $dA = \bar{l} \cdot dy$ ($\bar{l}$ = ausgeglichene Länge) folgt:

$$F_{Ao} \cdot l = \varrho_{fl} \cdot g \cdot tg\alpha \cdot \int_A^B y^2 \cdot dA = \varrho_{fl} \cdot g \cdot tg\alpha \cdot I_x \; ,$$ wo man unter I_x

das Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche A_S (Schnittfläche zwischen Wasseroberfläche und Schwimmer) bezüglich der x-Achse versteht. Setzt man dieses Zwischenergebnis in die obige Drehmomentengleichung ein,dann folgt:

$$\rho_{fl} \cdot g \cdot V_V \cdot (l_{Me} - l_S) \cdot \sin\alpha = - \rho_{fl} \cdot g \cdot V_V \cdot l_S \cdot \sin\alpha + \rho_{fl} \cdot g \cdot \mathrm{tg}\alpha \cdot I_x \quad .$$

Bei kleinen Auslenkungen gilt $\sin\alpha \approx \mathrm{tg}\alpha$,so daß man schließlich schreiben kann:

$$\boxed{l_{Me} = I_x / V_V} \qquad (8\text{-}3).$$

Das ist die Aussage des Satzes von Dupin.
Die Art des Gleichgewichtes eines Schwimmkörpers läßt sich jetzt in gedrängter Form durch den Stabilitätskoeffizienten ausdrücken:

$$\boxed{k = l_{Me} / l_S} \qquad (8\text{-}4).$$

Es gilt danach:

$k > 1$: stabiles Gleichgewicht ;
$k = 1$: indifferentes Gleichgewicht ;
$k < 1$: labiles Gleichgewicht .

Die Dupinsche Gleichung findet beim volleingetauchten Körper keine Anwendung.Übrigens fällt dabei das Metazentrum mit dem Verdrängungsmittekpunkt zusammen.
Die bisher besprochene Stabilität heißt Querstabilität (Rollen, Schlingern).-Die Längsstabilität (Nicken,Stampfen),bezogen auf die y-Achse,führt zu einer analogen Aussage:

$$\boxed{l'_{Me} = I_y / V_V} \qquad (8\text{-}5)$$

mit I_y als dem Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche A_S bezüglich der y-Achse.
In der Schiffsarchitektur ist dieses Metazentrum der Längsstabilität das "große Metazentrum" genannt,im Gegensatz zum "kleinen Metazentrum" bei der Querstabilität.
Bei verschiedenen Schiffsneigungen im Raum beschreibt das kleine Metazentrum eine räumliche "metazentrische Fläche",deren Schnittkurve mit der Quer- oder Spantebene die "metazentrische Linie des kleinen Metazentrums" heißt.-Gleichermaßen beschreibt das große Metazentrum M'_e seine "metazentrische Fläche",deren Schnittkurve mit der Längsebene "metazentrische Linie des großen Metazentrums" genannt wird.

8.4. Beispiele

1. Beispiel

Ein Eskimo (m_1 = 80 kg) sitzt auf einer Eisplatte (ρ_2 = 900 kg/m^3), deren Gesamtdicke h= 0,7 m beträgt; dabei sind h_W = 0,65 m ins Wasser (ρ_W = 1035 kg/m^3) eingetaucht, Bild 8-10. Wie groß muß die Schwimmfläche A_S mindestens sein?

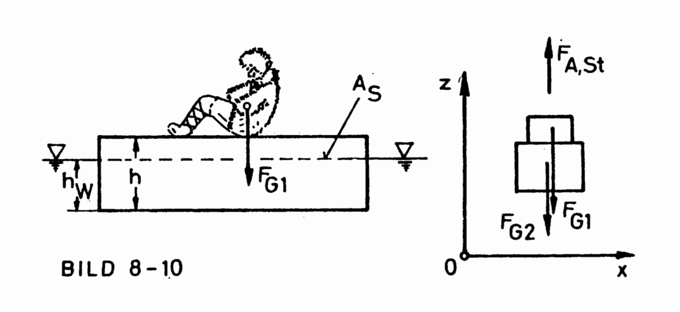


BILD 8-10

Lösung:

Das Kräftegleichgewicht an der freigemachten Platte zeigt in Bild 8-10:

$\sum zi = F_{A,st} - F_{G1} - F_{G2} = 0$; mit den Gleichungen (8-1) und (8-2) folgt:

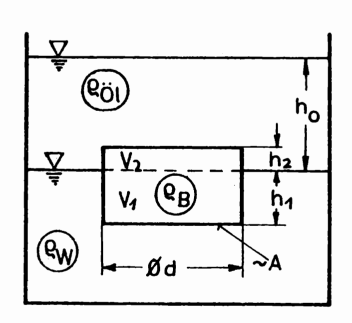
$$\rho_W \cdot g \cdot V_V = \rho_W \cdot g \cdot A_S \cdot h_W = g \cdot m_1 + \rho_2 \cdot g \cdot A_S \cdot h \; ; \qquad A_S = \frac{m_1}{\rho_W \cdot h_W - \rho_2 \cdot h} \; ;$$

mit Zahlenwerten ergibt sich:

A_S = 80 /(1035.0,65 - 900.0,7) = 1,871 m^2 .

2. Beispiel

Ein zylindrisches Stück Bienenwachs (ρ_B = 960 kg/m^3) schwebt in einem Gefäß, Bild 8-11, zwischen Wasser (ρ_W =1000 kg/m^3) und Öl ($\rho_Ö$= 900 kg/m^3). Gesucht wird der prozentuale Volumenanteil des im Wasser eingetauchten Bienenwachses.



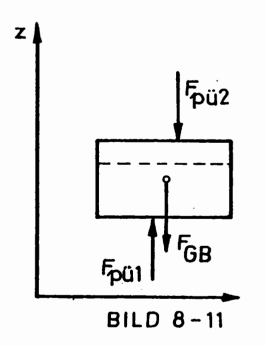


BILD 8-11

Lösung:

Es erhebt sich hier zunächst die Frage, ob der Archimedische Auftriebssatz auch dann gilt, wenn, wie hier, zwei verschiedenartige Flüssigkeiten den eingetauchten Körper umgeben. Diese Frage läßt sich über das Gleichgewicht am freigemachten Bienenwachs beantworten:

$\sum F_{zi} = F_{pü1} - F_{GB} - F_{pü2} = 0$; Datenbeschaffung:

$F_{pü1} = p_{ü1} \cdot A = (\varrho_{Ö} \cdot h_o + \varrho_W \cdot h_1) \cdot g \cdot A$; $F_{pü2} = p_{ü2} \cdot A = (h_o - h_2) \cdot \varrho_{Ö} \cdot g \cdot A$;

$F_{GB} = \varrho_B \cdot g \cdot (h_1 + h_2) \cdot A$. Durch Einsetzen erhält man:

$$\varrho_W \cdot g \cdot V_1 + \varrho_{Ö} \cdot g \cdot V_2 = \varrho_B \cdot g \cdot V_B \quad ;$$

dieses Ergebnis läßt sich dahingehend interpretieren, daß der Archimedische Auftriebssatz auch in diesem Fall gilt; V_1 stellt das Wasservolumen dar und V_2 dasjenige in Öl. -Nun wird die eigentliche Lösung angegangen: $V_1 = x \cdot V_B$; $V_2 = (1-x) \cdot V_B$;

$$\varrho_W \cdot g \cdot x \cdot V_B + \varrho_{Ö} \cdot g \cdot (1-x) \cdot V_B = \varrho_B \cdot g \cdot V_B \quad ;$$

$$x = (\varrho_B - \varrho_{Ö}) / (\varrho_W - \varrho_{Ö}) = (960-900)/(1000-900) = 60\ \% \quad .$$

3. Beispiel

Eine drehbare Verteilervorrichtung hat ein schwimmendes Axiallager bei einem Zapfendurchmesser von d = 4 m.

a) Welcher Tiefgang h, Bild 8-12, stellt sich bei Wasserfüllung ein, wenn die Drehkörpermasse m = 40 t beträgt ?

b) Welcher zusätzlicher Tiefgang muß bei einer Belastung durch eine Zusatzmasse Δm = 2 t in Kauf genommen werden ?

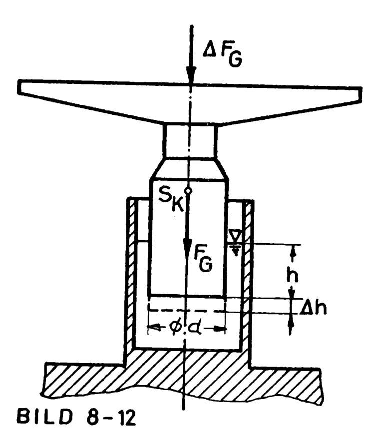


BILD 8-12

Lösungen:

a) h : Das Kräftegleichgewicht ergibt: $F_{A,st} = F_G$;

$$\underline{\underline{h}} = \frac{m}{\rho_{fl}\cdot(\pi/4)\cdot d^2} = \frac{40\ 000}{1000\cdot(\pi/4)\cdot 4^2} = \underline{\underline{3{,}183\ m}}\ .$$

b) Δh : In analoger Weise erhält man:

$$\rho_{fl}\cdot g\cdot\frac{\pi\cdot d^2}{4}\cdot(h+\Delta h) = F_G + \Delta F_G = g\cdot(m+\Delta m)$$

$$\underline{\underline{\Delta h}} = \frac{40\ 000 + 2000}{1000\cdot(\pi/4)\cdot 4^2} = \underline{\underline{0{,}159\ m}}\ .$$

4.Beispiel

Zur Dichtebestimmung eines unbekannten Stoffes wird ein Probekörper davon einmal in Luft (ρ_L = 1,293 kg/m³) und einmal unter Wasser (ρ_W = 1000 kg/m³) gewogen,Bild 8-13. Diese Ergebnisse sind:

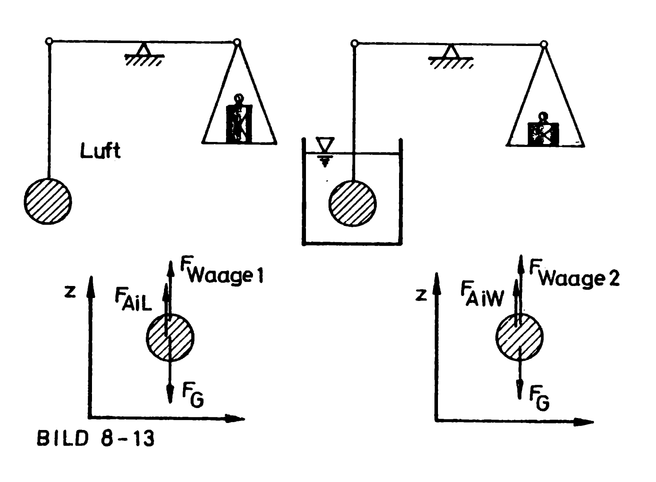


BILD 8-13

scheinbare Masse in Luft: m_{iL} = 0,2 kg ;
scheinbare Masse in Wasser: m_{iW} = 0,175 kg .

Lösung:

Die Gleichgewichtsbetrachtungen des freigemachten Probekörpers führen zu zwei Bestimmungsgleichungen für die beiden Unbekannten V_K und ρ_K :

$$\sum F_{zi} = -F_G + F_{AiL} + F_{Waage,1} = 0$$

$$-\rho_K\cdot g\cdot V_K + \rho_L\cdot g\cdot V_K + F_{Waage,1} = 0\ . \qquad (1).$$

Das Eigengewicht,der Auftrieb in Luft sowie die von der Waage herrührende Haltekraft stehen miteinander im Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_{zi} = -F_G + F_{AiW} + F_{Waage,2} = 0$$

$$-\rho_K \cdot g \cdot V_K + \rho_W \cdot g \cdot V_K + F_{Waage,2} = 0 \qquad (2).$$

Hier stehen das Eigengewicht,der Auftrieb in Wasser sowie die von der Waage herrührende Haltekraft im Gleichgewicht.-Durch Auflösung nach der gesuchten Dichte bekommt man:

$$\rho_K = \frac{m_{iL} \cdot \rho_W - m_{iW} \cdot \rho_L}{m_{iL} - m_{iW}}$$; die Zahlenrechnung

erbringt:

$$\rho_K = (0{,}2 \cdot 1000 - 0{,}175 \cdot 1{,}293)/(0{,}2 - 0{,}175) = 7990{,}95 \text{ kg/m}^3 \quad .$$

Hier ist das weltberühmte Verfahren von Archimedes angewandt worden. Damit hat Archimedes den Goldgehalt einer Legierung nachgewiesen.- Legt man bei bekanntem Körpervolumen der Dichtebestimmung die "Luftmessung" zugrunde,dann beträgt der relative Fehler:

$$\rho_L / \rho_K = 1{,}293 \ / \ 7990{,}95 = 0{,}16 \text{ ‰}$$ (vernachlässigbar).

5.Beispiel

Bei einem Eichversuch für ein Aräometer sind die beiden Grenzmarken zu bestimmen.

Einmal wird das Gerät in eine Flüssigkeit von der Dichte ρ_1= 1100 kg/m^3 eingetaucht und in eine zweite von ρ_2 = 1200 kg/m^3,Bild 8-14.

Zu bestimmen ist der Abstand Δh zwischen den beiden Niveaus AA und BB.

Der Durchmesser des schlanken Skalenteils beträgt d = 6 mm.Die Aräometermasse ist m = 0,06 kg.

Lösung:

In beiden Fällen wird das Gewicht des Aräometers durch den Auftrieb kompensiert:

$$F_G = \rho_1 \cdot g \cdot V_{V1} = \rho_2 \cdot g \cdot V_{V2} = m \cdot g \quad .$$

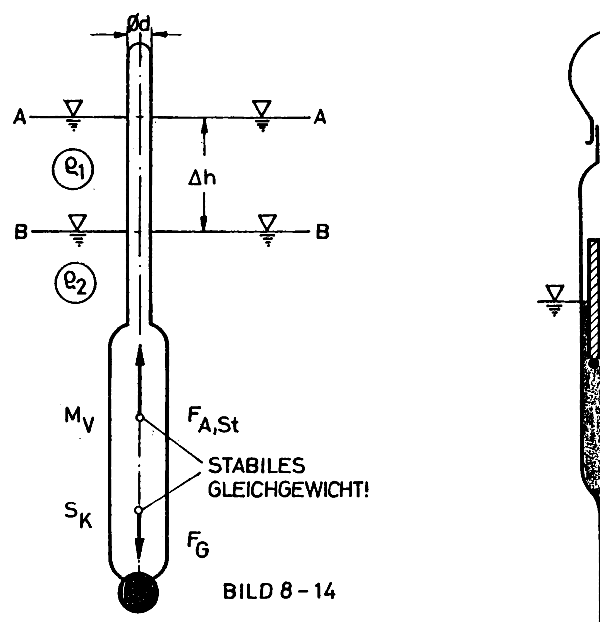
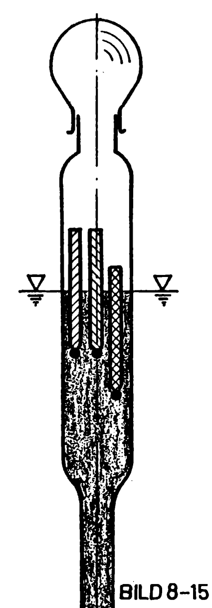


BILD 8-14


BILD 8-15

Daraus folgt für die Verdrängungsvolumina $V_{V1} = m/\rho_1$ und $V_{V2} = m/\rho_2$.
Die Differenz dieser Volumina führt dann zur Spiegeldifferenz:

$$\Delta h.(\pi/4).d^2 = V_{V1} - V_{V2} \quad ;$$

$$\underline{\underline{\Delta h}} = \frac{0{,}06/1100 - 0{,}06/1200}{(\pi/4).0{,}006^2} = \underline{\underline{0{,}161\ m}} \quad .$$

Ein praktisches Aräometer zur Ermittlung der Säuredichte in einem Akku zeigt Bild 8-15.Es handelt sich dabei um ein Pipetten-Aräometer.
Die Schwimmer haben folgende Bedeutung:

Alle drei Schwimmer oben: Lösung zu konzentriert;Sulfatierungsgefahr im Betrieb;
zwei Schwimmer oben : richtiger Ladungszustand;
ein Schwimmer oben : noch zulässiger Ladungszustand;
alle drei Schwimmer unten: Batterie ist unverzüglich aufzuladen wegen Sulfatierungsgefahr beim Laden.

6.Beispiel

Ein Ponton,dessen Querschnitt ein gleichschenkliges Trapez ist,besitzt

eine Leermasse von m_o = 6000 kg und kann eine maximale Zuladung von Δ m = 1000 kg aufnehmen, Bild 8-16.-Weitere Angaben: Anfangstiefgang h_o = 1 m; Länge L = 3 m; Meerwasserdichte ρ = 1035 kg/m^3; Basisbreite b_o = 1,5 m.

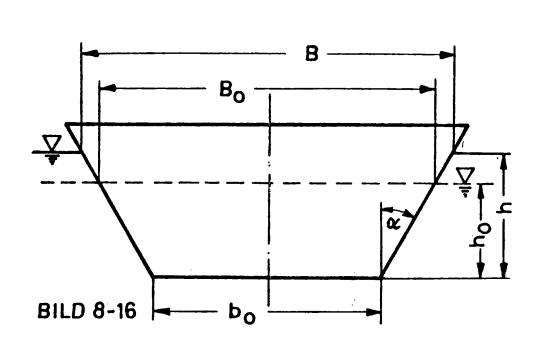


BILD 8-16

Man ermittle:

a) die Abhängigkeit der Gesamtmasse, also unter Einbeziehung der Zuladung, von der Eintauchtiefe (Tiefgang);

b) die grafische Darstellung der Funktion h = f(m).

Lösungen:

a) m = f (h) : Aus dem Kräftegleichgewicht am leeren Ponton folgt:

$$F_{Ao} = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{h_o}{2} \cdot (B_o + b_o) = F_{Go} = g \cdot m_o \; ; \quad \text{in Zahlen: } \underline{B_o = 2{,}365 \text{ m}}.$$

Bei einer größeren Gesamtmasse gilt sinngemäß:

$$F_A = F_G = \rho \cdot g \cdot L \cdot \frac{h}{2} \cdot (B + b_o) \qquad (1).$$

Mit Hilfe des Neigungswinkels α der Seitenwand:

$$\tg\alpha = (B_o - b_o)/(2 \cdot h_o) = (B - b_o)/(2 \cdot h) \qquad (2)$$

kann man ohne weiteres die Funktion B = f (h) :

$$B = b_o + \frac{h}{h_o} \cdot (B_o - b_o) \qquad (3)$$

ermitteln, so daß man mit Hilfe der beiden letzten Beziehungen aus (1) die gesuchte Größe findet:

$$m = \frac{F_G}{g} = \frac{\rho \cdot L}{2 \cdot h_o} \cdot (B_o - b_o) \cdot h^2 + \rho \cdot L \cdot b_o \cdot h \qquad (4).$$

Setzt man die bekannten Daten ein, dann erhält man die Gleichung einer Parabel:

$$\underline{\underline{m = 1342{,}9 \cdot h^2 + 4657{,}5 \cdot h}} \quad .$$

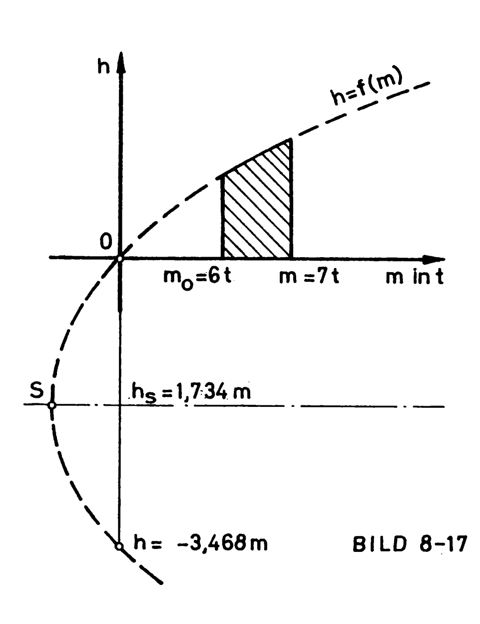


BILD 8-17

b) Grafische Darstellung von h = f (m):

Die Kurvendiskussion von (4) ergibt Nullstellen bei h_1=0 m und h_2= -3,468 m.Der Scheitel bzw. das Minimum liegt dann bei h_S = - 1,734 m; damit erhält man für m_S:

$$m_S = - 4037{,}77 \text{ kg.}$$

Spiegelt man nun diesen Funktionsverlauf an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten,dann ergibt sich der gewünschte Kurvenverlauf h = f (m),Bild 8-17. Der physikalisch in Frage kommende Wertebereich liegt zwischen
$6000 \text{ kg} \leqq m \leqq 7000 \text{ kg}$.

7.Beispiel

Ein Körper (ϱ_K = 1040 kg/m^3) schwebt in Meerwasser unter Sonneneinstrahlung.Die Dichte des Wassers in einer Tiefe von h = 1,2 m beträgt ϱ_{oW} = 1035 kg/m^3 .-Die Wasserdichte ändert sich nach folgendem Lineargesetz:

$$\varrho_{hW} = \varrho_{oW} \cdot (1 + K.h) \;.$$

Man bestimme die Konstante K.

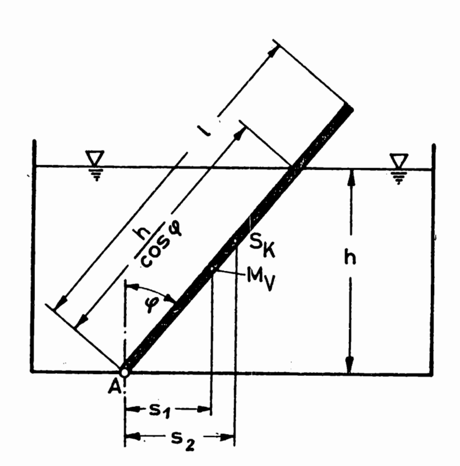
Lösung:

Im Schwebezustand gilt nach Abschn. 8.2 ,2.Fall: $\varrho_K = \varrho_{hW}$.
Also wird

$$K = \left(\frac{\varrho_K}{\varrho_{oW}} - 1 \right) . \frac{1}{h} = \left(\frac{1040}{1035} - 1 \right) / \, 1{,}2 \; = \; 0{,}004 \;\; 1/m \quad .$$

8.Beispiel

Ein dünnes Holzbrett (ϱ_H = 800 kg/m^3) ist am Boden eines Wasser-



behälters im festen Drehlager A gelagert, Bild 8-18.-Abmessungen: L = 4 m; Querschnitt A = 0,009 m^2; Wasserstand h = 2 m; ρ_W = 1000 kg/m^3.-Man ermittle:

a) den Neigungswinkel φ in der Gleichgewichtslage;
b) die Auflagerkraft F_A der Grösse und Richtung nach;
c) das Verhältnis L/h, wobei das Brett gerade die Vertikalstellung einnähme.

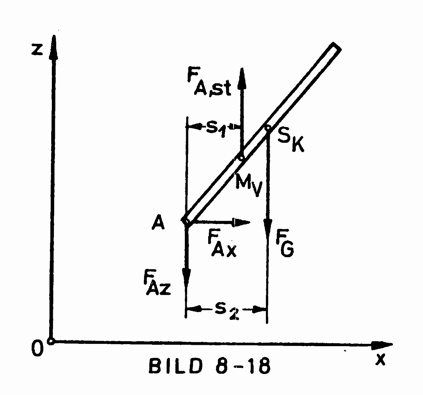


BILD 8-18

Lösungen:

a) φ :

Am freigemachten Brett sind alle bekannten und unbekannten Kräfte anzubringen. Unbekannte Kräfte werden in ihren Komponenten beliebig herum angenommen (nur die Richtung unbekannter Reibungskräfte ist mit der korrekten Richtung einzutragen). Das Vorzeichen des jeweiligen Komponentenergebnisses besagt dann, ob die Richtungsannahme richtig (positives Vorzeichen) oder falsch (negatives Vorzeichen) war. Erst nach Abschluß aller Komponenten- und Momentenrechnungen werden schließlich die Richtungen eindeutig angegeben.
Da es sich hier um ein ebenes Problem handelt, kommt man für einen ruhenden Festkörper mit folgenden drei rechnerischen Gleichgewichtsbedingungen aus:

$$(1.)\sum F_{xi} = 0 \; ; \quad (2.)\sum F_{zi} = 0 \; ; \quad (3.)\sum M_{yi} = 0 \qquad (8\text{-}6).$$

Die Kraftkomponenten in x- und z-Richtung halten sich das Gleichgewicht; ebenso kompensieren sich die Drehmomente um die y-Achse bezüglich eines beliebig gewählten Momentenbezugspunktes.

Zur Ermittlung des Neigungswinkels φ lege man nun den Momentenbezugspunkt in das zweiwertige feste Drehlager A und notiere das Momentengleichgewicht:

$\sum M_{yi}^{(A)} = +F_{A,st} \cdot s_1 - F_G \cdot s_2 = 0$; die Datenbeschaffung lautet unter Beachtung der Gleichungen (8-1) und (8-2):

$F_{A,st} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot V_V = \varrho_{fl} \cdot g \cdot A \cdot h/\cos\varphi$; $s_1 = \dfrac{h \,.\, \sin\alpha}{2 \cdot \cos\varphi}$; $F_G = \varrho_H g \cdot A \cdot L$;

$s_2 = 0{,}5 \cdot L \cdot \sin\varphi$.

Durch Einsetzen in die Momentengleichung ergibt sich schließlich:

$$\cos\varphi = \frac{h}{L} \cdot \sqrt{\frac{\varrho_{fl}}{\varrho_H}} \qquad (1).$$

Mit Zahlen folgt:

$\cos\varphi = (2/4) \cdot \sqrt{1000/800} = 0{,}559$; $\varphi = 56^\circ$.

b) F_A :

Das Kräftegleichgewicht am freigemachten Brett bezüglich der x-Richtung ergibt: $\sum F_{xi} = F_{Ax} = 0$.

Das Kräftegleichgewicht in z-Richtung lautet:

$\sum F_{zi} = -F_{Az} + F_{A,st} - F_G = 0$;

$$F_{Az} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot A \cdot \frac{h}{\cos\varphi} - \varrho_H \cdot g \cdot A \cdot L \quad ;$$

mit Zahlenwerten erhält man:

$F_{Az} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}009 \cdot 2/\cos 56^\circ - 800 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}009 \cdot 4 = +\ 33{,}249\ \text{N}$.

Das positive Vorzeichen dieses Ergebnisses besagt,daß die Richtungsannahme von F_{Az} nach unten in Ordnung ist!-Da die Horizontalkomponente null ist,entfällt die Komponentenzusammenfassung mittels des Pythagoräischen Lehrsatzes.

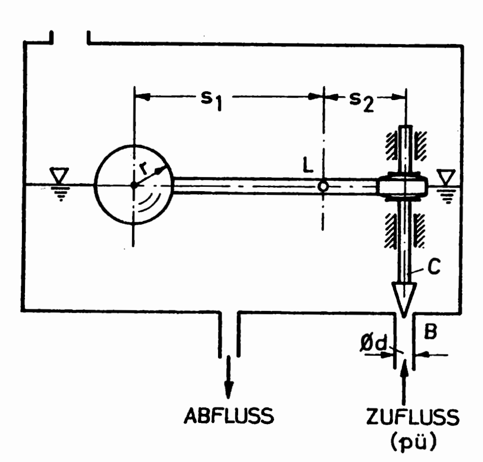
c) L/h :

Für den Grenzfall $\varphi = 0^\circ$ folgt aus der Beziehung (1):

$\cos 0^{o} = (h/L) \cdot \sqrt{1000/800} = 1$; $\underline{\underline{h/L = 0{,}8944}}$.

9.Beispiel

In der Niveaukammer eines Schwimmreglers tritt die Flüssigkeit bei B ein. Der kugelförmige Schwimmer treibt die Schließnadel C an, Bild 8-19.



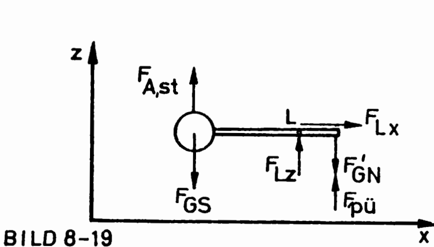


BILD 8-19

Angaben: $d = 4$ mm; $p_{ü} = 0{,}3$ bar; $s_1 = 0{,}04$ m; $s_2 = 0{,}015$ m; Schwimmergewicht $F_{GS} = 0{,}5$ N; $\varrho_{fl} = 700$ kg/m^3; relatives Gewicht der Schließnadel in der Flüssigkeit $F'_{GN} = 0{,}5$ N; das Hebelgewicht und Reibungseffekte sind zu vernachlässigen. Man ermittle den Kugelradius des Schwimmers gerade so, daß beim Sollwertdurchfluß der Schwimmer gerade zur Hälfte eingetaucht ist.

Lösung:

Das Momentengleichgewicht am freigemachten Hebelarm führt hier sofort zum Ziel:

$$\sum M_{yi}^{(L)} = +F_{GS} \cdot s_1 - F_{A,st} \cdot s_1 + F_{pü} \cdot s_2 - F'_{GN} \cdot s_2 = 0 \; .$$

Datenbeschaffung: $F_{A,st} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi \cdot r^3$; $F_{pü} = p_{ü} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2$.

Daraus folgt:

$$\underline{\underline{r}} = \sqrt[3]{\frac{F_{GS} - \frac{s_2}{s_1} \cdot \left(F'_{GN} - p_{ü} \cdot \pi \cdot d^2/4 \right)}{\varrho_{fl} \cdot g \cdot (2/3) \cdot \pi}} = \underline{\underline{0{,}0316 \text{ m}}} \; .$$

10. Beispiel

Ein zylindrisches Holzstück wird auf dem Boden eines Wasserbehälters mit einem auflösbaren Klebstoff befestigt, Bild 8-20. Nach der Auflösung des Klebstoffes setzt eine aufsteigende Bewegung ein, die untersucht werden möge. Dabei interessieren insbesondere:

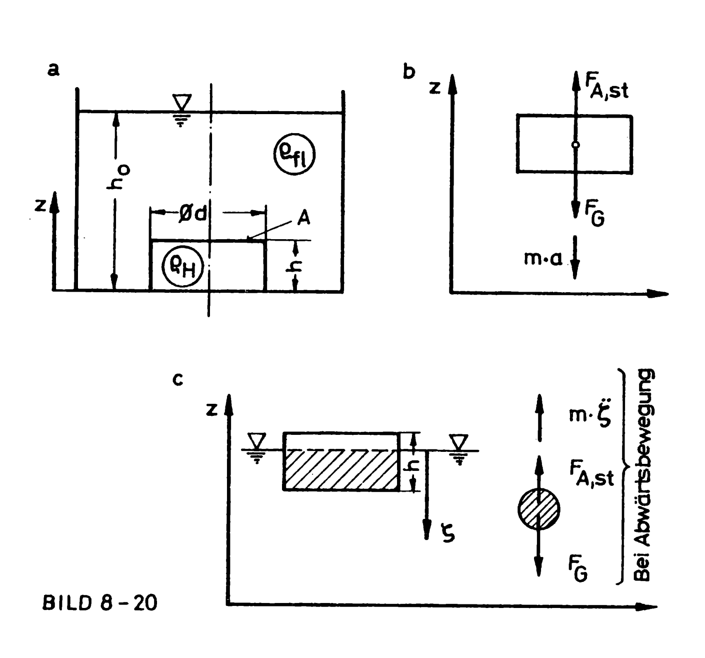


BILD 8-20

a) die Beschleunigung a;

b) die Geschwindigkeitsfunktion c = f (t);

c) die Wegfunktion z=f(t);

d) die Steigzeit bis zum Erreichen der Oberfläche t_S;

e) die Schwingungsgleichung;

f) die Schwingungsdauer T .

Weitere Angaben: h_o = 3 m; d = 0,5 m; h = 0,2 m; ϱ_{fl} = 1000 kg/m^3; ϱ_{Holz} = 600 kg/m^3.-Reibung ist zu vernachlässigen.

Lösungen:

a) a :

Da der Auftrieb größer ist als das Holzgewicht, setzt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung nach oben ein.
Das dynamische Grundgesetz von Newton, Gl.(1-5), wird nach d'Alembert folgendermaßen umgeformt:

$$\boxed{\sum \vec{F_i} - m \cdot \vec{a} = 0} \qquad (8\text{-}7).$$

Durch diesen genialen Trick werden Dynamik-Aufgaben zu quasi-statischen Aufgaben am ruhenden Ersatzkörper!-Es gelten nach Anbringung aller physikalisch nachweisbarer Kräfte,einschließlich der Massenträgheitskraft -m.a (sie wird auch d'Alembertsche Hilfskraft genannt und ist als eine die Bewegung hemmende Widerstandskraft zu verstehen), alle Gleichgewichtsüberlegungen der Statik.
Das Kräftegleichgewicht am freigemachten ruhenden Ersatzkörper lautet demnach (Bild 8-20,Pos. b) :

$$\underline{\sum F_{zi} = + F_{A,st} - F_{GH} - m_H \cdot a = 0} \quad .$$

$$a = \left(\varrho_{fl} \cdot g \cdot h \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 - {}_H \cdot g \cdot \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \right) / m_H \quad ;$$

$$a = \frac{1000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}2 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}5^2 - 600 \cdot 9{,}81 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 0{,}5^2}{600 \cdot 9{,}81 \cdot (\pi/4) \cdot 0{,}5^2} \quad ; \quad \underline{\underline{a = 6{,}54 \text{ m/s}^2}} .$$

b) $\underline{c = f\,(t)}$:

Die erste Integration der Beschleunigung führt zu:

$$\underline{c = dz/dt = a \cdot t + const} \quad ;$$

als Anfangsbedingung kennt man t = 0 und c = 0;deshalb verschwindet die Integrationskonstante,und es gilt:

$$\underline{\underline{c = 6{,}54 \cdot t}} \quad .$$

c) $\underline{z = f\,(t)}$:

Die zweite Integration der Beschleunigung führt dann zu:

$$\underline{z} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2 = \underline{3{,}27 \cdot t^2} \quad ,$$

und zwar unter Berücksichtigung des Anfangswertes t = 0 und z = 0 .

d) $\underline{t_S}$:

Für die Steighöhe $z = h_o = 3$ m erhält man aus der letzten Beziehung:

$$\underline{\underline{t_S = 0{,}958 \text{ s}}} \quad .$$

e) Schwingungsgleichung:

Schwingungen treten immer dann auf, wenn ein Wechselspiel zwischen potentieller und kinetischer Energie stattfinden kann. Das ist aber im vorliegenden Beispiel der Fall.

Taucht das Holzstück mehr aus dem Wasser auf, dann fungiert ein Mehrbetrag an Schwerkraft als rücktreibende Kraft; verschwindet das Holzstück dagegen mehr im Wasser, dann ist es der Mehrbetrag an Auftrieb, der als rücktreibende Kraft fungiert.

Für die weiteren Betrachtungen führt man eine Hilfskoordinate ζ ein (Bild 8-20, Pos. c).- Das Kräftegleichgewicht am freigemachten ruhenden Ersatz-Holzklotz lautet damit:

$$\sum F_{\xi i} = - m_H \cdot \ddot{\zeta} - F_{A,st} + F_{GH} = 0$$

. - Datenbeschaffung:

$m_H = \rho_H \cdot A \cdot h$; $F_{A,st} = \rho_{fl} \cdot g \cdot A$. ; $F_{GH} = \rho_H \cdot g \cdot A \cdot h$. - Daraus ergibt sich nachstehende Differentialgleichung:

$$\ddot{\zeta} + \underbrace{\frac{g \cdot \rho_{fl}}{\rho_H \cdot h}}_{= \omega^2} \cdot \zeta = g \quad .$$

Typ: Lineare, inhomogene Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Die Störfunktion ist ebenfalls eine Konstante.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung setzt sich aus der allgemeinen Lösung der homogenen Differentialgleichung und einer Partikulärlösung der inhomogenen Dgl. zusammen:

$$\zeta = \zeta_h + \zeta_p \quad .$$

Bei der homogenen Lösung erhält man bekanntlich die allgemeine Lösung einer harmonischen Schwingung:

$$\zeta_h = A.\sin \omega .t + B.\cos \omega .t = C.\sin (\omega .t + \varphi) \quad .$$

Dabei beträgt die Winkelgeschwindigkeit des Radiusvektors oder Phasors:

$$\omega = \sqrt{(g.\rho_{fl})/(h.\rho_H)} \quad .$$

Eine Partikulärlösung bietet sich mit

$$\zeta_p = g/\omega^2$$

an. Somit lautet die allgemeine Lösung der Dgl.:

$$\zeta = C \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi) + \frac{g}{\omega^2}$$

Die beiden Integrationskonstanten C und φ lassen sich durch entsprechende Startangaben bei t = 0 für ζ und $\ddot{\zeta}$ ermitteln !

f) T :

Die Schwingungsdauer ergibt sich aus

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{(g \cdot \rho_{fl})/(h \cdot \rho_H)}}$$

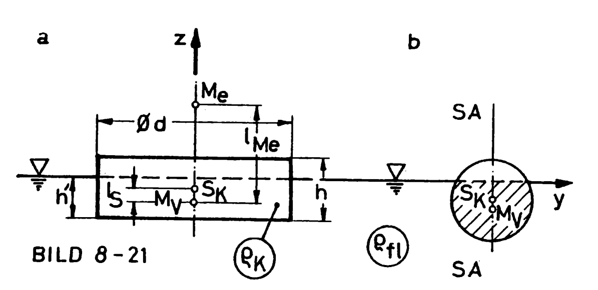
In Zahlen folgt:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\sqrt{(9{,}81 \cdot 1000)/(600 \cdot 0{,}2)}} \quad ; \quad \underline{\underline{T = 0{,}695 \text{ s}}} \quad .$$

Bemerkung:
Handelte es sich bei der Holzplatte um eine Art Floß,dann könnte man die Schwingungsdauer erträglicher gestalten durch Verdickung der Platte.Interessanterweise kommt die Plattenfläche in der Gleichung für die Schwingungsdauer nicht vor.-Die Verstärkung der Platte kann nicht beliebig fortgesetzt werden,ohne dabei die Schwimmstabilität zu stören. Darauf wird im nächsten Beispiel eingegangen.

11.Beispiel

Die Symmetrieachse eines zylindrischen Schwimmkörpers steht senkrecht, Bild 8-21.-Man bestimme den Grenzwert d/h für die Schwimmstabilität.



Angaben:
$\rho_K = 750 \text{ kg/m}^3$;
$\rho_{fl} = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Lösung:

Die Verdrängungstiefe läßt sich mit Gl.(8-2)

sofort angeben: $V_V = A.h' = (\rho_K/\rho_{fl}).A.h$;

$$h' = (\rho_K / \rho_{fl}).h \quad .$$

Der Schwerpunktsabstand $\overline{S_K M_V}$ lautet dann:

$$l_S = 0{,}5.(h-h') = 0{,}5.h.(1-\rho_K/\rho_{fl}) \quad .$$

Nach Gl.(8-3) berechnet man die metazentrische Weite :

$$l_{Me} = \frac{I_x}{V_V} = \frac{(\pi/4).(d/2)^4}{(\pi/4).d^2.h'} = \frac{d^2 \cdot \rho_{fl}}{16.h.\rho_K}$$

. Jetzt folgt mittels des Stabilitätskoeffizienten k nach Gl.(8-4):

$$k = \frac{l_{Me}}{l_S} = \frac{d^2}{8.h^2.(\rho_K/\rho_{fl}).(1-\frac{\rho_K}{\rho_{fl}})}$$

oder:

$$d/h = 2.\sqrt{2.k.\frac{\rho_K}{\rho_{fl}}.(1-\rho_K/\rho_{fl})} \quad .$$

Für den Grenzwert der Stabilität k = 1 und die angegebenen Werte erhält man:

$$d/h = 2.\sqrt{2.1.\frac{750}{1000}.(1-\frac{750}{1000})} = 1{,}225$$

. Es gilt somit:

für $k > 1$ ist $d/h > 1{,}225$: stabiles Gleichgewicht ;

für $k < 1$ ist $d/h < 1{,}225$: labiles Gleichgewicht .

Bemerkungen:

Für einen längs liegenden zylindrischen Schwimmkörper gilt immer indifferentes Gleichgewicht,da beim Drehen des Körpers um seine Längsachse die Verdrängungsverhältnisse nicht geändert werden (Bild 8-21, Pos. b).Jeder Durchmesser kann Momentan-Schwimmachse sein!

12. Beispiel

Man untersuche die Schwimmstabilität eines Quaders von quadratischem Querschnitt. Dabei beachte man drei verschiedene Schwimmlagen:

a) bei vertikaler Längsachse, Bild 8-22, Pos. a ;

b) bei horizontaler Längsachse nach Bild 8-22, Pos. c ;

c) bei horizontaler Längsachse nach Bild 8-22, Pos. d .

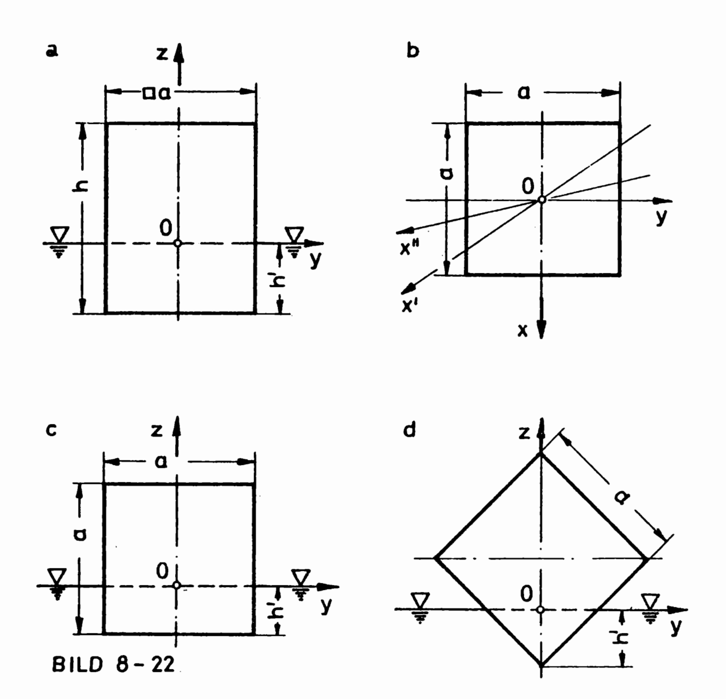


BILD 8-22

Lösungen:

a) $(a/h)_{Grenz}$:

Die Verdrängungstiefe kann formal dem letzten Beispiel entnommen werden:

$$h' = (\rho_K / \rho_{fl}).h \quad ;$$

gleicherweise läßt sich auch der Schwerpunktsabstand übernehemen:

$$l_S = 0{,}5.h.(1 - \rho_K / \rho_{fl}) \quad .$$

Die metazentrische Weite berechnet sich üblicherweise mit Gl.(8-3):

$$l_{Me} = I_x/V_V = (a^4/12)/(a^2.h') = (\rho_{fl}.a^2)/(12.\rho_K.h)$$,Bild 8-22, Pos. b.

Es ist hier bemerkenswert, daß das Flächenträgheitsmoment I_x für alle x-Achsen den gleichen Wert hat, da die Trägheitsellipse in diesem Fall ein Kreis ist. Für den Grenzwert k = 1 des Stabilitätskoeffizienten folgt nunmehr:

$$k = \frac{l_{Me}}{l_S} = \frac{\varrho_{fl} \cdot a^2}{12 \cdot \varrho_K \cdot h \cdot 0,5 \cdot h \cdot (1 - \varrho_K / \varrho_{fl})} = 1$$

. Daraus ergibt sich:

$$(a/h)_{Grenz} = \sqrt{6 \cdot \frac{\varrho_K}{\varrho_{fl}} \cdot \left(1 - \frac{\varrho_K}{\varrho_{fl}}\right)} \; .$$

Für Holz in Wasser kann man annehmen: $\varrho_K / \varrho_{fl} = 0,5 \dots 0,8$; also:

$$(a/h)_{Grenz} = 1,225 \dots 0,98 \; .$$

b) $(h'/a)_{Grenz,c}$:

Hier führt man besser das Verhältnis h'/a ein . -Datenbeschaffung:

Verdrängungstiefe: $h' = a \cdot \varrho_K / \varrho_{fl}$;

Schwerpunktsweite: $l_S = 0,5 \cdot a \cdot (1 - \varrho_K / \varrho_{fl})$;

metazentrische Weite

$$l_{Me} = \frac{h \cdot \frac{a^3}{12}}{a \cdot h' \cdot h} = a^2 / (12 \cdot h') = \frac{\varrho_{fl} \cdot a}{12 \cdot \varrho_K} \; ;$$

Stabilitätskoeffizient:

$$k = \frac{l_{Me}}{l_S} = \frac{1}{6 \cdot (\varrho_K / \varrho_{fl}) \cdot (1 - \varrho_K / \varrho_{fl})} \; .$$

Mit dem Grenzwert k = 1 folgt nach Auflösung einer quadratischen Gleichung für das Dichteverhältnis die gesuchte geometrische Beziehung:

$$0,789 < h'/a = \varrho_K / \varrho_{fl} < 0,211 \quad : \text{Stabilität !}$$

$$0,211 < h'/a = \varrho_K / \varrho_{fl} < 0,789 \quad : \text{Labilität} \; .$$

c) $(h'/a)_{Grenz,d}$:

Für diese Schwimmlage erhält man sinngemäß:

Verdrängungstiefe: Aus dem Schwimmgleichgewicht folgt nach Archimedes $\varrho_K . g . a^2 . h = \varrho_{fl} . g . h'^2 . h$; $h' = a . \sqrt{\varrho_K / \varrho_{fl}}$;

Schwerpunktsweite:
$$l_S = \frac{a . \sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} . h' = a . \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{2}{3} . \sqrt{\frac{\varrho_K}{\varrho_{fl}}} \right) ;$$

metazentrische Weite:
$$l_{Me} = \frac{I_y}{V_V} = \frac{h . (2.h')^3 / 12}{h . h'^2} = \frac{2}{3} . h' = \frac{2}{3} . a . \sqrt{\frac{\varrho_K}{\varrho_{fl}}} .$$

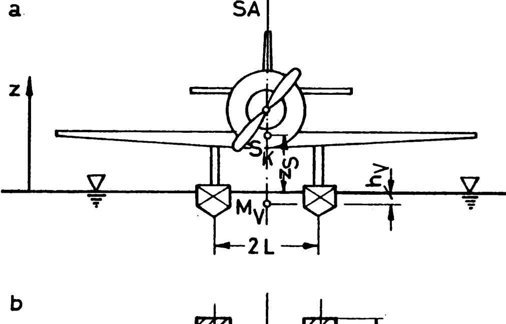
Stabilitätskoeffizient:
$$k = \frac{2}{3} . \frac{\sqrt{\varrho_K / \varrho_{fl}}}{\sqrt{2} / 2 - \frac{2}{3} . \sqrt{\varrho_K / \varrho_{fl}}} .$$

Für den Grenzfall k = 1 folgt:
$$h' / a = 0,3535 .$$

$h' / a > 0,3535$	:	Stabilität !
$h' / a < 0,3535$	:	Labilität .

13. Beispiel

Ein Seeflugzeug von der Masse m = 10 t besitzt seinen Körperschwerpunkt in einer Höhe von z_S = 1,5 m über dem Wasserspiegel. Der Abstand zwischen den Längsachsen der beiden Schwimmkörpern beträgt 2.L = 3 m. Die Schwimmfläche besteht aus zwei Rechtecken von den Abmessungen a = 0,6 m und b = 8 m, Bild 8-23. Die Tiefenlage des Verdrängungsmittelpunktes wird mit h_V = 0,3 m angegeben.- Man ermittle die Querstabilität.



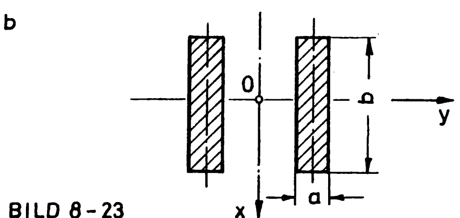


BILD 8-23

Lösung:

Das Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche bezüglich der x-Achse beträgt:

$$I_x = 2.\left(\frac{b.a^3}{12} + L^2.a.b\right)$$ nach dem Steinerschen Lehrsatz. In Zahlen:

$$I_x = 2.(\ 8.0,6^3/12 + 1,5^2.0,6.8\ ) = \underline{21,89\ m^4}\ .$$

Verdrängungsvolumen: $V_V = m\ /\ \rho_{fl} = 10^4\ /\ 1000 = \underline{10\ m^3}$.

Metazentrische Weite: $l_{Me} = I_x\ /\ V_V = 21,89\ /\ 10 = \underline{2,189\ m}$.

Stabilitätskoeffizient:

$$k = l_{Me}\ /\ l_{\delta} = 21,89\ /\ 1,8 = 1,216 > 1\ .$$

14.Beispiel

Man untersuche die Roll- bzw. Schlingerschwingungen eines Schwimmkörpers im reibungsfreien Fall, Bild 8-24.
Besonders sollen untersucht werden:

a) die Differentialgleichung der Schwingung und ihre allgemeine Lösung;
b) die Schwingungsdauer;
c) die Schwingungsdauer einer Schlingerperiode in einem realen Fall (Bild 8-24, Pos. c).
   Die Schwimmfläche wird durch ein flächengleiches Rechteck ersetzt: b = 5 m; L = 50 m ; der ausgeglichene Tiefgang beträgt h = 2,5 m; die angenäherte ausgeglichene Gesamthöhe des Schiffes sei mit H = 12 m angenommen. Effektiver Stabilitätsfaktor k = 1,5.
d) die Schwingungsdauer einer Nick- bzw. Stampfperiode; sonstige Angaben wie unter Pos. c .
e) Man vergleiche die Quer- mit der Längsstabilität !

Lösungen:

a) Dgl. und allgemeine Lösung:

Das dynamische Grundgesetz für die Drehbewegung lautet:

$$\boxed{\sum M_i = I_d \cdot \ddot{\alpha}} \qquad (8\text{-}8).$$

Es bedeuten I_d das Massenträgheitsmoment bezüglich der Drehachse und

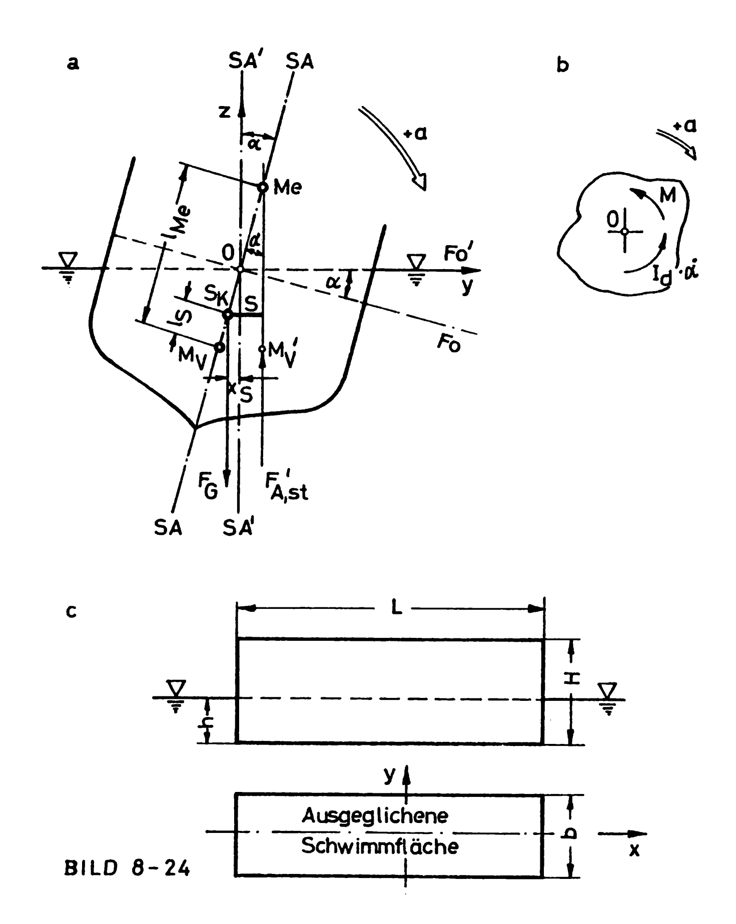


BILD 8-24

$\ddot{\alpha}$ die Winkelbeschleunigung.
Nach d'Alembert schreibt man dieses Gesetz folgendermaßen um:

$$\boxed{\sum M_i - I_d \cdot \ddot{\alpha} = 0} \qquad (8\text{-}9).$$

Wiederum werden Dynamik-Aufgaben zu quasi-statischen Aufgaben am ruhenden Ersatzkörper!-Alle einwirkenden Drehmomente $\sum M_i$ stehen mit den Drehmomenten der Trägheitskräfte $-I_d \cdot \ddot{\alpha}$ im Momentengleichgewicht. Der Ausdruck $-I_d \cdot \ddot{\alpha}$ wird am freigemachten und ruhenden Ersatzkörper immer entgegen der als positiv angenommenen Bewegungsrichtung eingetragen (Bild 8-24,Pos. b).
Jetzt lautet das Momentengleichgewicht,wenn man den Koordinatenur-

sprung mit dem Drehmomentenbezugspunkt identifiziert:

$$-F_G \cdot x_S - F'_{A,st} \cdot (s - x_S) - I_{dx} \cdot \ddot{\alpha} = 0 \quad .$$

Die Drehmomentenwirkung der beiden Kräfte F_G und $F'_{A,st}$ ist aber auch gleich derjenigen eines Kräftepaares, so daß notiert werden

$$-F'_{A,st} \cdot s - I_{dx} \cdot \ddot{\alpha} = 0 \quad .$$

Ersetzt man hierin s durch $(l_{Me} - l_S) \cdot \sin\alpha$, dann folgt:

$$-F'_{A,st} \cdot (l_{Me} - l_S) \cdot \sin\alpha - I_{dx} \cdot \ddot{\alpha} = 0 \quad .$$

Schließlich beschränke man sich auf kleine Schwingungsausschläge; dadurch ist die Lösungsvereinfachung $\alpha \approx \sin\alpha$ möglich. -Datenbeschaffung:

Gl.(8-3) : $l_{Me} = I_x / V_V$; Gl.(8-1) und (8-2): $F_{A,st} = F'_{A,st} = \varrho_{fl} \cdot g \cdot V_V$.

Nach Einsetzen und Verwerten dieser Zusammenhänge erhält man die Differentialgleichung der Querschwingungen:

$$\ddot{\alpha} + \left[\frac{I_x / V_V - l_S}{I_{dx}} \cdot \varrho_{fl} \cdot g \cdot V_V \right] \cdot \alpha = 0 \quad .$$

Typ: Lineare, homogene Dgl. zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Dgl. der harmonischen Schwingungen.

Die Winkelgeschwindigkeit des Phasors beträgt:

$$\omega = \sqrt{\frac{\varrho_{fl} \cdot g \cdot V_V}{I_{dx}} \cdot (I_x / V_V - l_S)} \quad ;$$

die allgemeine Lösung für diese Dgl. lautet in Anlehnung an Beispiel 10:

$$\alpha = A \, . \, \sin (\omega . t + \varphi)$$

mit A (Amplitude) und φ (Phasenverschiebung) als den beiden Integrationskonstanten.

b) die Schwingungsdauer T_Q :

Sie berechnet sich folgendermaßen:

$$T_Q = \frac{2.\pi}{\omega} = 2.\pi . \sqrt{\frac{I_{dx}}{\rho_{fl}.g.(I_x - l_S.V_V)}} .$$

c) $\underline{T_{Qc}}$:

Datenbeschaffung:

Verdrägungsvolumen $\underline{V_V} = b.h.L = 5.2,5.50 = \underline{625\ m^3}$ (Bild 8-24,Pos. c).

Schiffsmasse $\underline{m} = \rho_{fl}.V_V = 1000.625 = \underline{625\ 000\ kg}$.

Angenähertes Massenträgheitsmoment (Richtwert):

$$\underline{I_{dx}} = \frac{m}{12}.(b^2+H^2) = \frac{625000}{12}.(5^2+12^2) = \underline{8,802.10^6 kg.m^2}.$$

Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche bezüglich der x-Achse:

$$\underline{I_x} = \frac{b^3.\ L}{12} = \frac{5^3.50}{12} = \underline{520,83\ m^4}.$$

Schwerpunktsabstand $\underline{l_S} = l_{Me}/k = I_x\ /\ (k.V_V) = \frac{520,83}{1,5.625} = \underline{0,556\ m}$.

Mit diesen Daten folgt für die Schwingungsdauer einer Querschwingung:

$$\underline{\underline{T_{Qc}}} = 2.\pi . \sqrt{\frac{8,802.10^6}{1000.9,81.(520,83 - 0,556.625)}} = \underline{\underline{14,28\ s}} .$$

d) <u>Schwingungsdauer einer Nick- oder Stampfperiode(Längsschwingung)</u>$\underline{T_L}$:

Das gleiche Verfahren führt zur Schwingungsdauer T_L; nur müssen das Schwimmflächenträgheitsmoment bezüglich der y-Achse und das Massenträgheitsmoment mit der y-Achse als Drehachse berechnet werden:

$$T_L = \frac{2.\pi}{\omega} = 2.\pi . \sqrt{\frac{I_{dy}}{\rho_{fl}.g.(I_y - l_S.V_V)}}$$

Angenähertes Massenträgheitsmoment

$$\underline{I_{dy}} = \frac{m}{12}.(b^2+L^2) = \frac{625000}{12}.(5^2+50^2) = \underline{131,51.10^6\ kg.m^2} .$$

Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche bezüglich der y-Achse

$$\underline{I_y} = \frac{b.L^3}{12} = \frac{5.50^3}{12} = \underline{52,083\ m^4} .$$

Somit läßt sich die Schwingungsdauer T_L berechnen:

$$\underline{\underline{T_L}} = 2.\pi . \sqrt{\frac{131,51.10^6}{1000.9,81.(52083 - 0,556.625)}} = \underline{\underline{3,20\ s}} \quad .$$

Das ist aber ein unerwartetes Ergebnis,daß $T_L < T_Q$ ist !

e) Vergleich der Quer- und Längsstabilität:

Die effektive Querstabilität ist mit $k_Q = 1,5$ angegeben.Der Stabilitätsfaktor für die Längsstabilität lautet:

$$\underline{\underline{k_L}} = I_y \ / \ (l_S.V_V) = \frac{52,083.10^3}{0,556.625} = \underline{\underline{149,9}} \quad .$$

Die Längsstabilität ist etwa 100mal größer als die Querstabilität.

9. DAS RELATIVE GLEICHGEWICHT

9.1. Absolut-,Fahrzeug- und Relativbewegung

Absolutbewegung

Der Trägheitssatz:

> Jeder Körper verharrt in dem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung,wenn er nicht durch äußere Kräfte daran gehindert wird,

gilt genauso wie das dynamische Grundgesetz $\vec{F} = m.\vec{a}$ nur für ein ruhendes Koordinatensystem (Inertialsystem).Man nennt es auch Absolutsystem,Bild 9-1.
Das x,y,z-Koordinatensystem wird demnach als Absolutsystem deklariert. Die Bewegung des Punktes P(x;y;z) gegenüber diesem System heißt Absolutbewegung.-Der Geschwindigkeitsvektor hierfür lautet:

$$\boxed{\vec{c} = i.c_x + j.c_y + k.c_z = i.\frac{dx}{dt} + j.\frac{dy}{dt} + k.\frac{dz}{dt}} \qquad (9\text{-}1).$$

Der Beschleunigungsvektor für die Absolutbewegung heißt:

$$\boxed{\vec{a} = i.a_x + j.a_y + k.a_z = i.\frac{dc_x}{dt} + j.\frac{dc_y}{dt} + k.\frac{dc_z}{dt}} \qquad (9\text{-}2).$$

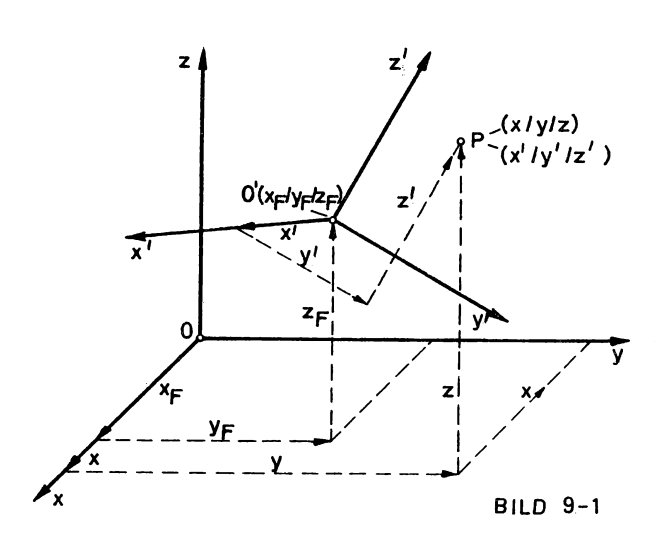


BILD 9-1

Fahrzeugbewegung

Bewegt sich ein Fahrzeug O',mit welchem das x',y',z'-Koordinatensystem fest verbunden ist, gegenüber dem Absolutsystem,so spricht man von einer Fahrzeugbewegung,die sich mittels der Fahrzeugkoordinaten (x_F, y_F, z_F) beschreiben läßt.
Der Geschwindigkeitsvektor für die Fahrzeugbewegung lautet:

$$\vec{v} = i.v_x + j.v_y + k.v_z = i.\frac{dx_F}{dt} + j.\frac{dy_F}{dt} + k.\frac{dz_F}{dt} \qquad (9\text{-}3).$$

Der Beschleunigungsvektor für die Fahrzeugbewegung heißt:

$$\vec{a}_F = i.a_{Fx} + j.a_{Fy} + k.a_{Fz} = i.\frac{dv_x}{dt} + j.\frac{dv_y}{dt} + k.\frac{dv_z}{dt} \qquad (9\text{-}4).$$

Relativbewegung

Beobachtet man die "Realbewegung" eines Punktes P von einem Fahrzeug aus,genauer gesagt: von einem bewegten Koordinatensystem O' aus,dann spricht man von einer Relativbewegung.Hierfür gilt das dynamische Grundgesetz nicht mehr ohne weiteres!
Das (x';y';z')-Koordinatensystem wird als Relativsystem deklariert. Die Bewegung des Punktes P (x';y';z') gegenüber diesem System heißt bekanntlich Relativbewegung.-Der Geschwindigkeitsvektor lautet:

$$\vec{w} = i.w_x + j.w_y + k.w_z = i.\frac{dx'}{dt} + j.\frac{dy'}{dt} + k.\frac{dz'}{dt} \qquad (9\text{-}5).$$

Der Beschleunigungsvektor für die Relativbewegung heißt:

$$\vec{a}_r = i.a_{rx} + j.a_{ry} + k.a_{rz} = i.\frac{dw_x}{dt} + j.\frac{dw_y}{dt} + k.\frac{dw_z}{dt} \quad (9\text{-}6).$$

1. Satz von Coriolis:

Die genannten drei Geschwindigkeiten setzen sich vektoriell folgendermaßen zusammen:

$$\vec{c} = \vec{v} + \vec{w} \quad (9\text{-}7).$$

2. Satz von Coriolis:

Liegen nur translatorische Bewegungskomponenten vor, dann lassen sich die Beschleunigungen folgendermaßen zusammenfassen:

$$\vec{a} = \vec{a}_F + \vec{a}_r \quad (9\text{-}8).$$

Liegt eine allgemeine Bewegung vor, bei welcher also neben der Translations- auch eine Rotationskomponente vorkommt, dann gilt zwar noch Gl.(9-7), aber nicht mehr Gl.(9-8). In diesem Fall kommt noch die Komplementär- oder Coriolisbeschleunigung hinzu!-Sie berechnet sich folgendermaßen:

$$\vec{a}_{Cor} = 2.(\vec{\omega}_F \times \vec{w}) \quad (9\text{-}9).$$

$\vec{\omega}_F$ stellt die Rotationskomponente der Fahrzeugbewegung dar. Die drei Vektoren bilden ein Rechtssystem. (Regel der rechten Hand: Der Daumen weist in Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors, wobei die gekrümmten Finger den Drehsinn verdeutlichen; der Zeigefinger gibt die Richtung der Relativbewegung an; der Mittelfinger zeigt in Richtung der Coriolisbeschleunigung.)

Für den allgemeinen Bewegungsfall ist der zweite Satz von Coriolis folgendermaßen zu erweitern:

$$\vec{a} = \vec{a}_F + \vec{a}_r + \vec{a}_{Cor} \quad (9\text{-}10).$$

Bewegt sich ein Fahrzeug (im Sonderfall kann es sich auch um einen Massenpunkt handeln) gegenüber dem Absolutsystem oder ein Massenpunkt relativ zum Fahrzeug, dann kann man im Sinne der natürlichen Koordinaten bei einer gekrümmten Bahnkurve eine Aufteilung der jeweiligen Beschleunigung in einen tangential gerichteten Anteil und in

einen zum Krümmungsmittelpunkt hin gerichteten Anteil vornehmen. Es gilt dann:

$$\vec{a}_F = \vec{a}_{Ft} + (\overrightarrow{-r_o}).a_{Fn} \quad ; \quad \vec{a}_r = \vec{a}_{rt} + (\overrightarrow{-r_o}).a_{rn} \qquad (9\text{-}11).$$

$(\overrightarrow{+r_o})$ stellt den Einheitsvektor dar; er ist, vom Krümmungsmittelpunkt aus gesehen, nach außen hin gerichtet; deshalb ist $(\overrightarrow{-r_o}).a_{Fn}$ als die Zentripetalbeschleunigung der Fahrzeugbewegung nach innen gerichtet. Gleiches gilt auch für die Relativbewegung. Ihre Beträge lauten:

$$a_{Fn} = v_t^2 / r \quad ; \quad a_{rn} = w_t^2 / r \qquad (9\text{-}12).$$

Der Index t weist auf die Tangentialkomponente der betreffenden Geschwindigkeit hin, und unter r ist der Krümmungsradius zu verstehen.

9.2. Dynamisches Grundgesetz für die Relativbewegung

Für die weitere Betrachtung der Relativbewegung ist eine andere Schreibweise der Gl. (9-10) vorteilhaft:

$$\vec{a}_r = \vec{a} - \vec{a}_F - \vec{a}_{Cor} \qquad (9\text{-}13).$$

Multipliziert man diese Gleichung mit der an der Bewegung beteiligten Masse m, deren Massenmittelpunkt mit dem in Bild 9-1 erwähnten Punkt P identifiziert werden kann, dann erhält man das angestrebte dynamische Grundgesetz für die Relativbewegung:

$$m.\vec{a}_r = m.\vec{a} - m.\vec{a}_F - m.\vec{a}_{Cor} \qquad (9\text{-}14).$$

$m.\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ ist eine physikalisch nachweisbare Kraft.
$-m.\vec{a}_F$ stellt eine erste Hilfskraft dar und wird auch d'Alembertsche Hilfskraft genannt.
$-m.\vec{a}_{Cor}$ stellt eine zweite Hilfskraft dar und wird auch Corioliskraft genannt.

9.3. Relatives Gleichgewicht

Wendet man die Philosophie des d'Alembertschen Prinzips, Gl. (8-7),

auch für die Relativbewegung an,dann schreibt sich die allgemeinste Kräftegleichgewichtsformel für den freigemachten ruhenden Ersatzkörper (nicht das Fahrzeug!) folgendermaßen an:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i - m.\vec{a}_r - m.\vec{a}_F - m.\vec{a}_{Cor} = 0} \qquad (9\text{-}15).$$

Es sei nochmals daraufhingewiesen,daß die Quasi-Ruhe gegenüber dem mit dem Fahrzeug fest verbundenen relativen Koordinatensystem hergestellt wird.Außerdem lassen sich die Fahrzeug-und Relativbeschleunigungen mittels der Gl.(9-11) aufschlüsseln!
Ein Sonderfall des relativen Gleichgewichts liegt dann vor,wenn ein mit dem Fahrzeug fahrender Beobachter keine Bewegung des Massenpunktes P feststellen kann.Die Relativgeschwindigkeit ist identisch null, so daß man vom relativen Ruhezustand spricht.
Wegen $w \equiv 0$ verschwinden Relativ- und Coriolisbeschleunigung.Die Gleichungen (9-7),(9-10),(9-14) und (9-15) vereinfachen sich zu:

$$\vec{c} = \vec{v} \quad ; \quad \vec{a} = \vec{a}_F$$

$$\sum \vec{F}_i = m.\vec{a}_F \quad ; \quad \sum \vec{F}_i - m.\vec{a}_F = 0 \qquad (9\text{-}16).$$

(d'Alembertsches Prinzip nach Gl.(8-7)

Mit diesem Gleichungspaket läßt sich das Kräftegleichgewicht im relativen Ruhezustand untersuchen.Obige etwas weitergehenden Betrachtungen sind deshalb vonnöten,weil bei Problemen der relativen Ruhe nur die Fahrzeugbewegung beschrieben wird und eine Angabe zur Absolutbewegung fehlt!

9.4. Beispiele

1.Beispiel

Die Steighöhe eines Fahrstuhls in einem Hochhaus beträgt $h = 210$ m; seine gesamte Fahrzeit beträgt $t = 38$ s.Bis zur halben Höhe wird eine lineare Beschleunigung verzeichnet;danach tritt eine lineare Verzögerung ein.
Auf dem Boden des Fahrstuhls steht ein Wassergefäß (Leermasse m_o = 4 kg),das ein Volumen von $V = 0{,}03\ m^3$ faßt,Bild 9-2.Der Atmosphärendruck ist konstant.-Man ermittle:
a) die maximale Beschleunigung am Ende der Beschleunigungsphase;

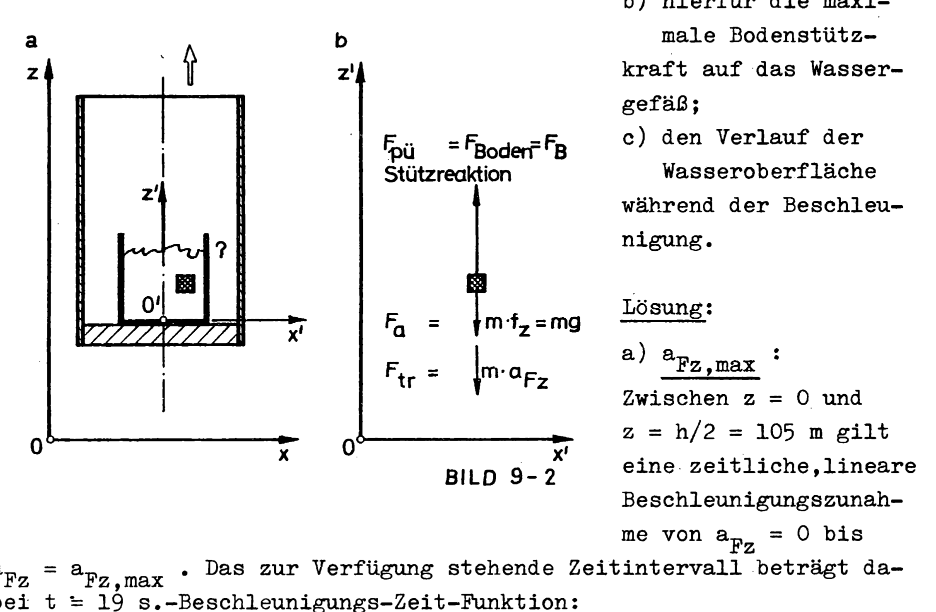


BILD 9-2

b) hierfür die maximale Bodenstützkraft auf das Wassergefäß;

c) den Verlauf der Wasseroberfläche während der Beschleunigung.

Lösung:

a) $a_{Fz,max}$:

Zwischen z = 0 und z = h/2 = 105 m gilt eine zeitliche,lineare Beschleunigungszunahme von a_{Fz} = 0 bis $a_{Fz} = a_{Fz,max}$. Das zur Verfügung stehende Zeitintervall beträgt dabei t = 19 s.-Beschleunigungs-Zeit-Funktion:

$$a_{Fz} : a_{Fz,max} = t : 19 \quad .$$

$$a_{Fz} = (a_{Fz,max}/19).t \quad .$$

Geschwindigkeits-Zeit-Funktion:

$$v_z = \int a_{Fz}.dt = (\; a_{Fz,max} \; / \; 38 \;).t^2 \quad .$$

Weg-Zeit-Funktion:

$$z = \int v_z.dt = (\; a_{Fz,max} \; / \; 114 \;) \; . \; t^3 \quad .$$

Da der Fahrstuhl anfangs in Ruhe gewesen ist,fallen die Integrationskonstanten weg.Aus der letzten Gleichung ergibt sich für die bekannte halbe Steighöhe und die entsprechende Steigzeit die gesuchte maximale Endbeschleunigung das Fahrzeugs (Fahrstuhls) zu:

$$a_{Fz,max} = 105.114/19^3 = 1{,}745 \text{ m/s}^2 \quad .$$

b) F_B :

Das Fahrzeug hat die Masse aus Wasserinhalt und Becher zu beschleunigen:

$$m = m_o + m_W = 4 + 1000.30.10^{-3} = 34 \text{ kg} \quad .$$

Das relative Gleichgewicht lautet demnach (Bild 9-2,Pos. b):

$\sum F_{zi} = F_B - m.g - m.a_{Fz} = 0$.- Es sei hier wieder einmal an die Klassifikation der Kräfte erinnert (vgl. Abschn. 4),wonach in der Fluidmechanik letztlich nur Massenkräfte (äußere Kräfte und Trägheitskräfte) und Flächenkräfte (Druck- und Tangentialkräfte) eine Rolle spielen,wenn man von den Linienkräften absieht.-Im angefangenen Beispiel liegen folgende Kräfte vor:

Äußere Kraft (Feldkraft) : $F_a = m.f_z = m.g$;

Trägheitskraft : $F_{tr} = m.a_{Fz}$;

Flächenkraft (Stützreaktion des Druckes) : F_B .

Für den Fall maximaler Fahrzeugbeschleunigung erhält man:

$$\underline{\underline{F_B}} = 34.9{,}81 + 34.1{,}745 = \underline{\underline{392{,}87\ N}} \quad .$$

c) Verlauf der Wasseroberfläche $z' = f\ (x')$:

In den Abschnitten 5.4.2 und 5.4.3 führte das Gleichgewicht zwischen den Druckkraft-Stützreaktionen und der Massenkraft (dort nur Feldkraft) geradewegs zur Potentialfunktion $(-e_p)$,einem mathematischen Ausdruck.$(+e_p)$ entspricht bekanntlich der spezifischen potentiellen Energie.Gl. (5-12) lautet: $\vec{f} = -\text{grad}\ e_p = -\nabla e_p$.

Dieser Sachverhalt läßt sich nun auf das relative Gleichgewicht im z',x'-Koordinatensystem des laufenden Beispiels übertragen.
Da in x'- und in y'-Richtung keine Massenkraftkomponenten zu verzeichnen sind,kennt man hierfür auch keine partiellen Änderungen der Potentialfunktion nach Gl.(5-11):

$$f_{x'} = -\frac{\partial e_p}{\partial x'} = 0 \quad ; \quad f_{y'} = -\frac{\partial e_p}{\partial y'} = 0 \quad .$$

Nun kann weiterhin auf das partielle Differentialzeichen verzichtet werden,da es sich nur noch um einen z'-Einfluß handeln kann!
Die gesamte z'-Komponente der massenspezifischen Kraft $f_{z'}$ setzt sich im obigen Kräfte- und Orientierungsfall zusammen aus zwei Anteilen:

- g ,dem nach unten gerichteten Anteil der Feldkraft und
- a_{Fz} , dem ebenfalls nach unten gerichteten Anteil auf Grund der Trägheitskraft,herrührend von der Fahrzeugbeschleunigung.

$f_{z'} = -g - a_{Fz} = - \frac{de_p}{dz'}$; $de_p = (g + a_{Fz}).dz'$; daraus folgt

für die massenspezifische potentielle Energie:

$$e_p = (g+a_{Fz}).z' + K_1 = (g + a_{Fz,max} .t / 19).z' + K_1 .$$

Hier spielt die Zeit sogar die Rolle eines Parameters!- K_1 ist eine Integrationskonstante.

Die Interpretation dieser Ergebnisgleichung läßt folgenden Schluß zu:

> Zu einer gewissen Zeit haben Äquipotentialflächen ($-e_p$=const) die Form einer horizontalen Fläche (z' = Konst).
> Damit folgt auch mit den Erkenntnissen von Abschn. 6.1 (Druckformel für Flüssigkeiten, Sonderfall für inkompressible Fluide), da Äquipotentialflächen auch Isobarflächen sind:
> Zu einer gewissen Zeit haben Isobarflächen (p = const) die Form einer horizontalen Fläche (z' = Konst).
> Da eine freie Oberfläche wegen p_o = const eine Isobarfläche abgibt, ist auch der gesuchte Oberflächenverlauf im beschleunigten Wasserbehälter eine Horizontalfläche.

2. Beispiel

Ein Wasserbehälter rechteckigen Querschnitts gleitet zunächst ohne Reibung eine schiefe Ebene ($\alpha = 30^o$) herunter. Die Behälterhöhe im Ruhezustand heißt an der unteren Kante h_o, Bild 9-3, Pos. a .

Man ermittle:

a) die Gleichung der freien Oberfläche $z' = f (y')$;
b) die Überdruckkraft auf den Behälterboden $F_{pü,AB}$;
c) die Überdruckkraft auf die Seitenwand $F_{pü,AC}$;
d) die Überdruckkraft auf die Seitenwand $F_{pü,BD}$;
e) die gleichen Zusammenhänge wie unter a) bis c), mit dem Unterschied aber, daß der Behälter nun unter dem Einfluß von Reibung nach unten gleitet (μ = 0,3).-Weitere Angaben: Länge L = 3 m; Breite b = 2 m ; z'_o = 1 m .

Lösungen:

a) $z' = f (y')$:

Aus dem Kräftegleichgewicht am freigemachten Fahrzeug folgt in y-Richtung , Bild 9-3, Pos. b :

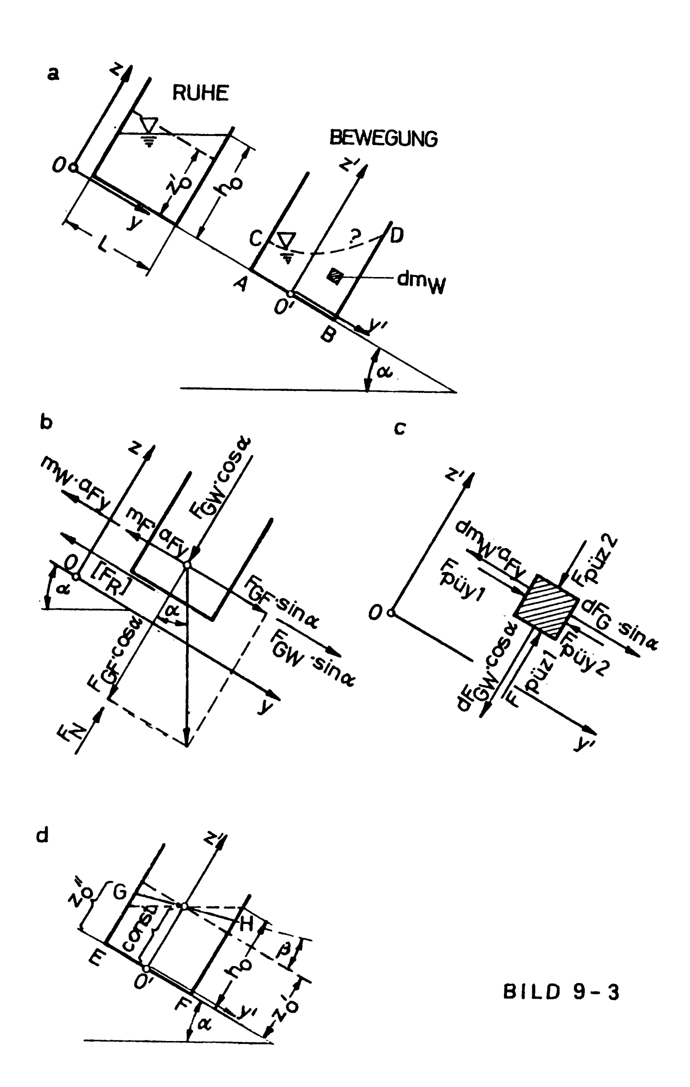


BILD 9-3

$$\sum F_{yi} = -m_F . a_{Fy} + m_F . g . \sin\alpha - m_W . a_{Fy} + m_W . g . \sin\alpha = 0$$; daraus folgt:

$$a_{Fy} = g . \sin\alpha \ .$$

Aus dem relativen Gleichgewicht an der freigemachten ruhenden Ersatzmasse dm_W(Bild 9-3,Pos. c) folgt:

$$\sum F_{y'i} = -dm.a_{Fy} + F_{püz'1} - F_{püz'2} + dm.g.\sin\alpha = 0 \quad .$$

Die zusammengefaßten Massenkräfte lassen sich wieder wie im letzten Beispiel durch die Wegableitung eines Potentials bestimmen,so daß gilt,und zwar zunächst nur in y'-Richtung:

$$f_{y'} = -\frac{\partial e_p}{\partial y'} = -a_{Fy} + g.\sin\alpha$$

; setzt man die für a_{Fy} ermittelte Beziehung ein,dann wird $f_{y'} = -\frac{\partial e_p}{\partial y'} = 0$. Die resultierende spezifische Massenkraftkomponente in x'-Richtung(senkrecht auf dem Bild stehend) entfällt,so daß sofort

$$f_{x'} = -\frac{\partial e_p}{\partial x'} = 0$$

notiert werden darf.

Schließlich lautet das relative Gleichgewicht in z'-Richtung:

$$\sum F_{z'i} = -dm_W.g.\cos\alpha + F_{püz'1} - F_{püz'2} = 0$$

; deshalb lautet die resultierende spezifische Massenkraftkomponente in z'-Richtung:

$$f_{z'} = -\frac{\partial e_p}{\partial z'} = -g.\cos\alpha$$

. Die Integration ergibt für die massenspezifische potentielle Energie:

$$e_p = g.\cos\alpha .z' + \text{Konst} \quad .$$

Die diesbezügliche Potentialfunktion lautet somit:

$$-e_p = -g.\cos .z' - \text{Konst} \quad .$$

Erinnert man sich jetzt der Druckformel,Gl.(6-1),so ergibt sich:

$$\frac{p}{\varrho} + e_p = \frac{p}{\varrho} + g.\cos\alpha .z' + \text{Konst} = C \quad \text{oder:}$$

$$p + \varrho .g.\cos\alpha .z' = \text{const} \quad .$$

Danach lassen sich Isobarflächen mit $z' = \text{Const}$ beschreiben:

Es handelt sich um Flächen,die parallel zum Behälterboden verlaufen. Damit verläuft die freie Oberfläche als Isobarfläche ebenfalls parallel zum Boden!

Die Konstante der Druckformel läßt sich somit leicht ermitteln:

$$p_o + \rho \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot z'_o = \text{const} \quad ;$$

damit schreibt sich die Berechnungsgleichung für den lokalen Überdruck im Behälter :

$$\underline{\underline{p_ü = p - p_o = \rho \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot (z'_o - z')}} \; .$$

b) $\underline{F_{pü,AB}}$:

Die Bodendruckkraft ermittelt sich einfach mit $\underline{F_{pü,AB} = p_ü \cdot L \cdot b}$, da ja am Boden der Druck überall gleich groß ist:

$$\underline{\underline{F_{pü}}} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 30^o \cdot (1 - 0) \cdot 3 \cdot 2 = \underline{\underline{50\,974{,}3 \text{ N}}} \; .$$

c) $\underline{F_{pü,AC}}$:

Hier verläuft die Druckverteilung linear mit der Tiefe.Damit gilt Gl.(7-8) entsprechend.

$$\underline{F_{pü,AC} = \rho \cdot g \cdot \cos\alpha \cdot (z'_o / 2) \cdot b \cdot z'_o} = 1000 \cdot 9{,}81 \cdot \cos 30^o \cdot 0{,}5 \cdot 2 \cdot 1$$

$$\underline{\underline{F_{pü,AC} = 8\,495{,}7 \text{ N}}} \; .$$

d) $\underline{F_{pü,BD}}$:

Da die Flüssigkeit an der Wand BD genauso hoch steht wie bei AC,sind die Wanddruckkräfte auch gleich groß:

$$\underline{\underline{F_{pü,BD} = 8\,495{,}7 \text{ N}}} \; .$$

e) <u>Gleiche Zusammenhänge wie oben,nur mit Reibung:</u>

Beim Kräftegleichgewicht am freigemachten Fahrzeug kommt zusätzlich die Reibungskraft F_R hinzu.Diese Kraft ist in Bild 9-3,Pos. b,in Klammer gesetzt worden.Hier wird sie in die Gleichung mitaufgenommen:

$$\underline{\sum F_{yi} = -m_F \cdot a_{Fy} + m_F \cdot g \cdot \sin\alpha - m_W \cdot a_{Fy} + m_W \cdot g \cdot \sin\alpha - F_R = 0} \; .$$

Das Coulombsche Reibungsgesetz

$$\boxed{F_R = \mu \cdot F_N} \qquad (9\text{-}17)$$

und das Kräftegleichgewicht in z-Richtung

$$\underline{\sum F_{zi} = F_N - F_{GF} \cdot \cos\alpha - F_{GW} \cdot \cos\alpha = 0}$$

lassen über die normale Auflagerkraft F_N die Reibungskraft berechnen:

$$F_R = \mu . g . (m_F + m_W) . \cos\alpha \quad ;$$ es bedeuten:

m_F die Fahrzeugmasse und m_W die Wassermasse.-Für die Fahrzeugbeschleunigung läßt sich nunmehr angeben:

$$a_{Fy} = g . (\sin\alpha - \mu . \cos\alpha) \quad .$$

Aus der Tatsache,daß die resultierende spezifische Massenkraft in x'-Richtung null ist,notiert man:

$$f_{x'} = - \frac{\partial e_p}{\partial x'} = 0 \quad .$$

Das Kräftegleichgewicht ergibt in y'-Richtung für die resultierende spezifische Massenkraft:

$$f_{y'} = - \frac{\partial e_p}{\partial y'} = -g . (\sin\alpha - \mu . \cos\alpha) + g . \sin\alpha = \mu . g . \cos\alpha \quad .$$

Das Kräftegleichgewicht ergibt in z'-Richtung für die resultierende spezifische Massenkraft:

$$f_{z'} = - \frac{\partial e_p}{\partial z'} = - g . \cos\alpha \quad .$$

Das totale Differential der massenspezifischen potentiellen Energie heißt schlußendlich:

$$de_p = \frac{\partial e_p}{\partial x'} . dx' + \frac{\partial e_p}{\partial y'} . dy' + \frac{\partial e_p}{\partial z'} . dz' \quad .$$

Unter Verwertung der Teilergebnisse erhält man:

$de_p = 0 + (- \mu . g . \cos\alpha) . dy' + g . \cos\alpha . dz'$. Die Integration heißt:

$$e_p = - \mu . g . \cos\alpha . y' + g . \cos\alpha . z' + \text{Konst} \quad ,$$

ein Ausdruck,welcher der massenspezifischen potentiellen Energie entspricht.Daraus ergibt sich der Sachverhalt,daß eine Äquipotentialfläche sich mit $z' - \mu . y' = \text{const}$ beschreiben läßt.

Das ist aber die Gleichung einer schiefen Ebene bzw. einer geneigten Geraden: $z' = \text{const} + \mu . y'$.

Die Wasserspiegelneigung ist in Bild 9-3,Pos. d ,gezeigt.Da die Ach-

senabschnitts-Steigungs-Gleichung vorliegt,entspricht $\mu = tg\beta$, der Steigung der Geraden.-Mittels dieser Versuchsanlage kann man auch den Reibungsbeiwert μ bestimmen!
Aus der Ergebnisgleichung für e_p und Gl.(6-1) folgt für die Druckverteilung:

$$p - \mu.\rho.g.\cos\alpha.y' + \rho.g.\cos\alpha.z' = C \quad .$$

Gleichung der Isobarflächen: $z' = K + \mu.y'$.

Ermittlung der Konstanten C in der Druckformel:

$p_o + \rho.g.\cos\alpha.z'_o = C$; damit folgt für den lokalen Überdruck im Behälter:

$$p - \mu.\rho.g.\cos\alpha.y' + \rho.g.\cos\alpha.z' = p_o + \rho.g.\cos\alpha.z'_o$$

$$p_{ü} = p - p_o = \mu.\rho.g.\cos\alpha.y' + \rho.g.\cos\alpha.(z'_o - z') \quad .$$

Überdruckkraft $F_{pü,EF}$:

Zusammenhänge werden in Bild 9-3,Pos. d,gezeigt.Die Druckverteilung am Boden EF ergibt sich für $z' = 0$:

$$p_{ü,EF} = \mu.\rho.g.\cos\alpha.y' + \rho.g.\cos\alpha.z'_o \quad .$$

Somit berechnet sich die Bodendruckkraft mit

$$F_{pü,EF} = \int_{(A_{EF})} p_{ü,EF}.dA = \int_{-L/2}^{+L/2} p_{ü}.b.dy' = \rho.g.\cos\alpha.z'_o.L.b \quad .$$

Damit ist nachgewiesen,daß hier,also im reibungsbehafteten Falle,die Bodendruckkraft genauso groß ist wie bei reibungsfreier Abwärtsbewegung:

$$F_{pü,EF} = F_{pü,AB} = 50\ 974,3\ N \quad .$$

Überdruckkraft $F_{pü,EG}$:

Hier erhält man für $(-L/2) = y'$ die Druckverteilung längs der Seitenwand EG:

$$p_{ü,EG} = -\mu.\rho.g.\cos\alpha.\frac{L}{2} + \rho.g.\cos\alpha.(z'_o - z') \quad .$$

Differential der Seitenwanddruckkraft:

$$dF_{pü,EG} = p_{ü,EG}.dA = p_{ü,EG}.b.dz' \quad .$$

Integrationsgrenzen: $z' = 0$ bis $z' = z''_o$ mit $z''_o = z'_o - (L/2).tg\beta$;

$$\underline{\underline{z''_o}} = 1 - 1{,}5.0{,}3 = \underline{\underline{0{,}55 \text{ m}}} \quad .$$

$$F_{pü,EG} = \int_0^{z''_o} p_{ü,EG}.b.dz' = \varrho .g.\cos\alpha .b.z''_o.\left(-\mu.\frac{L}{2} + z'_o - \frac{z''_o}{2}\right) \quad ;$$

$$\underline{\underline{F_{pü,EG} = 2570 \text{ N}}} \quad .$$

3.Beispiel

Ein Wasserbehälter von quadratischem Querschnitt (L = 0,4 m) und

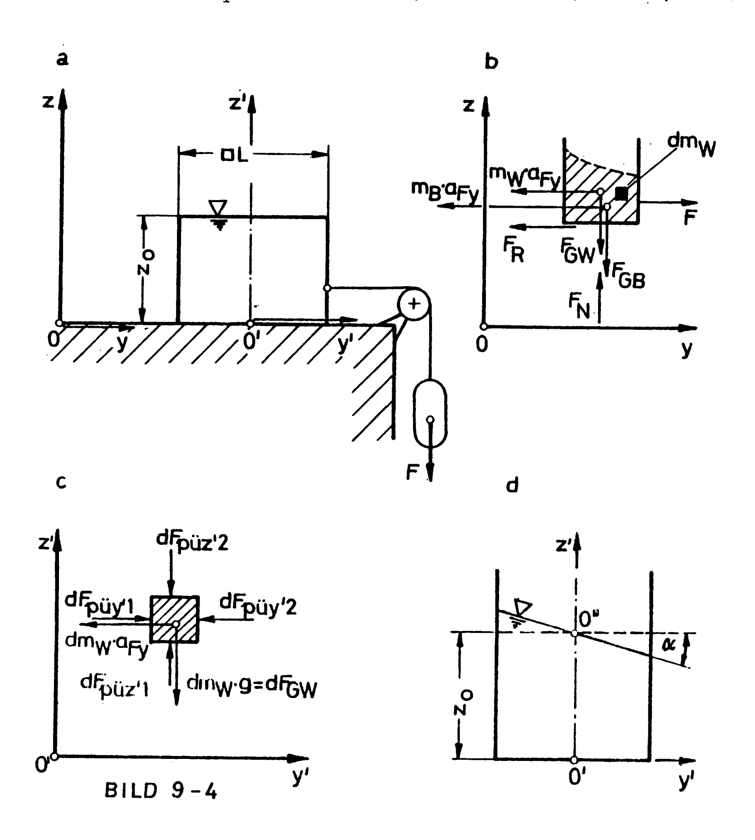


BILD 9-4

einer Leermasse von m_B = 5 kg wird durch eine Seilkraft von F = 600 N beschleunigt,und zwar auf horizontaler Bahn,Bild 9-4,Pos. a .- Man ermittle bei z_o = 0,4 m :

a) die maximale Füllstandshöhe z_o, damit bei reibungsbehafteter Rutschbewegung ($\mu = 0{,}3$) eine beschleunigte Bewegung möglich ist;

b) das Gleiche im reibungsfreien Fall;

c) die Gleichung der freien Oberfläche.

Lösungen:

a) z_{omax} :

Gleichgewichtsbetrachtungen am freigemachten, ruhenden Ersatzfahrzeug führen zu einer Grenzbetrachtung, woraus $a_{Fy} > 0$ hervorgeht (Bild 9-4, Pos. b).

$$(1) \sum F_{yi} = -m_B \cdot a_{Fy} - m_W \cdot a_{Fy} - F_R + F = 0 \quad ;$$

$$(2) \sum F_{zi} = -F_{GW} - F_{GB} + F_N = -m_W \cdot g - m_B \cdot g + F_N = 0 \quad ;$$

$$(3) \quad F_R = \mu \cdot F_N \quad \text{nach Gl.(9-17)} \quad .$$

Daraus folgt:

$$a_{Fy} = \frac{F}{m_B + m_W} - \mu \cdot g \quad ;$$

unter Verwendung der Behältergeometrie ergibt sich:

$$a_{Fy} = \frac{F}{m_B + \varrho_W \cdot L^2 \cdot z_{omax}} - \mu \cdot g \quad .$$

Die Bedingung, damit $a_{Fy} > 0$ ist, lautet demnach :

$$\frac{F}{m_B + \varrho_W \cdot L^2 \cdot z_{omax}} > \mu \cdot g \quad ; \qquad z_{omax} < \frac{F - \mu \cdot g \cdot m_B}{\varrho_W \cdot L^2 \cdot \mu \cdot g} \quad ;$$

$$z_{omax} < \frac{600 - 0{,}3 \cdot 9{,}81 \cdot 5}{1000 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}3 \cdot 9{,}81} = 1{,}243 \text{ m} \quad .$$

Diese Bedingung ist im vorgelegten Beispiel wegen $L = 0{,}4 \text{ m} < z_{omax}$ erfüllt.

b) z_{omax} ohne Einfluß der Reibung:

Hier führt der Ausdruck für a_{Fy} bei $\mu = 0$ zur Abschätzung:

$$a_{Fy} = \frac{F}{m_B + m_F} = \frac{F}{m_B + \varrho_W \cdot g \cdot L^2 \cdot z_{omax}} > 0 \quad .$$

Der Nenner dieses Ausdrucks darf nicht unendlich groß werden, weshalb gilt:

$$z_{omax} < \infty \quad .$$

ohne Reibung

c) $z' = f\,(y')$:

Bevor die Ermittlung der massenspezifischen potentiellen Energie oder der Potentialfunktion beginnen kann, muß das Kräftegleichgewicht an der relativ ruhenden Ersatzmasse dm_W aufgestellt werden (Bild 9-4, Pos. c) :

$$(1) \sum F_{y'i} = dF_{püy'1} - dF_{püy'2} - dm_W \cdot a_{Fy} = 0 \quad ;$$

$$(2) \sum F_{z'i} = +dF_{püz'1} - dF_{püz'2} - dm_W \cdot g = 0 \quad .$$

Die Drücke um das freigemachte Massenelement dm_W wurden alle verschieden groß angenommen! - Daraus ergeben sich nun die gleichgewichtshaltenden Massenkräfte, die, auf die Masse bezogen, zu den Beschleunigungskomponenten (spezifische Massenkraftkomponenten): $(f_{x'};f_{y'};f_{z'})$ hinführen.

$$f_{x'} = -\partial e_p / \partial x' = 0 \quad ;$$

$$f_{y'} = -\partial e_p / \partial y' = -a_{Fy} = -\left[\frac{F}{m_B + m_W} - \mu \cdot g\right] \quad ;$$

$$f_{z'} = -\partial e_p / \partial z' = -g \quad .$$

Damit läßt sich das totale Differential der massenspezifischen potentiellen Energie angeben zu :

$$de_p = \left[\frac{F}{m_B + m_W} - \mu \cdot g\right] \cdot dy' + g \cdot dz' \quad .$$ - Die Integration ergibt:

$$e_p = \left[\frac{F}{m_B + m_W} - \mu \cdot g\right] \cdot y' + g \cdot z' + \text{Konst} \quad .$$

Äquipotentialflächen folgen demnach der Gleichung :

$$\left[\frac{F}{m_B + m_W} - \mu \cdot g\right] \cdot y' + g \cdot z' = \text{const} \quad ;$$ oder:

$$z' = \text{Const} - \left[\frac{F}{m_B . g + \varrho_W . g . L^2 . z_o} - \mu \right] . y' \quad .$$

Das ist die Gleichung einer Potentialfläche. Sie entspricht einer Geradengleichung (Schnittspur einer Äquipotentialfläche mit der y';z'-Ebene) . - Daraus läßt sich schlußendlich folgern, daß die Wasseroberfläche, wie es Bild 9-4 in Pos. d zeigt, eine negative Steigung aufweist. Es gilt:

$$\text{tg}\alpha = \frac{F}{m_B . g + \varrho_W . g . L^2 . z_o} - \mu \quad .$$

Der Zahlenwert lautet:

$$\text{tg}\alpha = \frac{600}{5 . 9{,}81 + 1000 . 9{,}81 . 0{,}4^2 . 0{,}4} - 0{,}3 \quad ;$$

$$\alpha = 30{,}39^o \quad .$$

Aus z' = Const - 0,5864.y' läßt sich nun für y' = 0 und $z' = z_o$ die Integrationskonstante Const zu Const = z_o = 0,4 m ermitteln. Damit heißt die angepaßte Gleichung der freien Oberfläche:

$$z' = 0{,}4 - 0{,}5864 . y' \quad .$$

Bemerkung:

Ein Gefäß mit der Gestalt eines U-Rohres kann auf einem Fahrzeug als einfaches Gerät zur Beschleunigungs- oder Verzögerungsmessung herangezogen werden.
Ein praktisches Akzelerometer zeigt Bild 9-5.

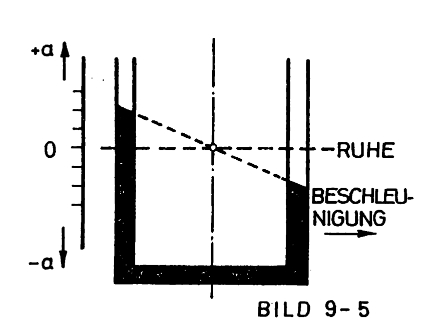


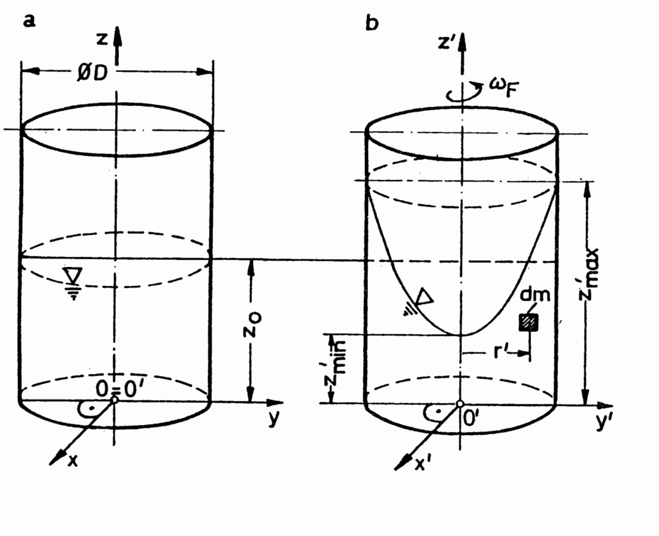
BILD 9-5

4. Beispiel

Ein zylindrischer Wasserbehälter (D = 0,5 m) ist im Ruhezustand mit Wasser bis zur Höhe z_o = 0,8 m angefüllt, Bild 9-6, Pos. a . Er wird mit der Fahrzeugwinkelgeschwindigkeit ω_F = 10 rad/s in Drehung ver-

setzt. Erfahrungsgemäß steigt die Flüssigkeit an der Wand hoch, Bild 9-6, Pos. b . – Man bestimme:

a) die massenspezifische, potentielle Energie e_p ;
b) die allgemeine Druckgleichung;
c) die allgemeine Gleichung einer Isobarfläche;
d) die Gleichung der Wasseroberfläche;
e) die Gleichung der Schnittkurve zwischen Rotationsoberfläche und Meridianebene;
f) die Überdruckkraft auf den Boden des Gefäßes.



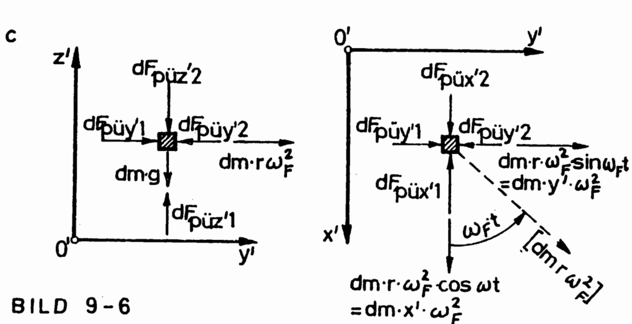


BILD 9-6

Lösungen:

a) e_p :

Da sich wiederum nur Massen- und Druckkräfte an der freigemachten, ruhenden Ersatzmasse das relative Gleichgewicht halten, lassen sich die Komponenten der auf die Masse bezogenen resultierenden Massenkräfte (Bild 9-6, Pos. c) problemlos notieren. - Übrigens sind die Drücke um das Massenelement herum wieder als verschieden angenommen worden.

$f_{x'} = -\partial e_p/\partial x' = x'.\omega_F^2$; $f_{y'} = -\partial e_p/\partial y' = y'.\omega_F^2$;

$f_{z'} = -\partial e_p/\partial z' = -g$ .Hiermit kann das totale Differential der massenspezifischen potentiellen Energie aufgestellt werden,wobei man über die Definitionsgleichung für de_p und mit der Gl.(5-11) zu folgendem Ansatz gelangt:

$$de_p = \frac{\partial e_p}{\partial x'}.dx' + \frac{\partial e_p}{\partial y'}.dy' + \frac{\partial e_p}{\partial z'}.dz' = -f_{x'}.dx' - f_{y'}.dy' - f_{z'}.dz';$$

$de_p = -x'.\omega_F^2.dx' - y'.\omega_F^2.dy' + g.dz'$; die Integration ergibt:

$$\boxed{e_p = -(\omega_F^2/2).(\underbrace{x'^2 + y'^2}_{= r'^2}) + g.z' + \text{Konst}} \quad (9\text{-}18)$$

b) p = f (x';y';z';const) :

Mit e_p und Gl.(6-1) ergibt sich ein Ausdruck: $(p/\varrho_W) + e_p = \text{Const}$, welcher nach Multiplikation mit der Dichte ϱ_W sofort zur allgemeinen Druckformel führt:

$$\boxed{p = \text{const} + (\varrho_W/2).\omega_F^2.r'^2 - \varrho_W.g.z'} \quad (9\text{-}19).$$

c) Isobarflächengleichung z'= f (x';y') :

Setzt man für den Druck einen konstanten Wert an,dann bleibt für die Isobarfläche die Gleichung eines Rotationsparaboloids übrig:

$$\boxed{r'^2 - \frac{2.g}{\omega_F^2}.z' = (x'^2 + y'^2) - \frac{2.g}{\omega_F^2}.z' = \text{konst}} \quad (9\text{-}20).$$

d) die Gleichung der Wasseroberfläche z' = f (x';y') :

Zunächst soll die Integrationskonstante von Gl.(9-20) ermittelt werden: Für die Drehachse gilt

$$\text{konst} = -\frac{2.g}{\omega_F^2}.z'_{min} \quad \text{(Bild 9-6,Pos. b)} .$$

Somit lautet die Gleichung der freien Oberfläche zunächst:

$$\boxed{z' = \frac{\omega_F^2}{2.g} \cdot (x'^2 + y'^2) + z'_{min}} \qquad (9\text{-}21).$$

Hierzu muß noch z'_{min} beschafft werden. Eine Volumenbilanz hilft weiter. Da kein Wasser verlorengegangen ist, gilt folgender Zusammenhang:

(1) $\underline{z_o.(\pi/4).D^2 = z'_{max}.(\pi/4).D^2 - V_{Paraboloid}}$.

Den Wert für z'_{max} erhält man aus der Oberflächenfunktion

$$x'^2 + y'^2 = D^2 / 4 \quad :$$

(2) $\underline{z'_{max} = (\omega_F^2 /2.g)/(D^2/4) + z'_{min}}$.

Außerdem ist das Paraboloidvolumen genau halb so groß wie der es umschreibende Zylinder:

(3) $\underline{V_P = 0{,}5.(\pi/4).D^2.(z'_{max} - z'_{min})}$.

Mit diesen drei Zusammenhängen erhält man schließlich für die gesuchte Integrationskonstante z'_{min} :

(4) $\underline{z'_{min} = z_o - \frac{\omega_F^2}{16.g}.D^2}$. Endgültig heißt somit die Gleichung der freien Oberfläche:

$$z' = z_o + \frac{\omega_F^2}{2.g} \cdot \left[(x'^2 + y'^2) - D^2/8 \right] \quad .$$

e) <u>Schnittkurve z' = f (r')</u> :

Wegen der Rotationssymmetrie gilt, und zwar hier besonders für die Oberfläche des Paraboloids: $r'^2 = x'^2 + y'^2$,

d.h.: Man muß nur Punkte der Oberfläche in die obige Gleichung einsetzen und erfüllt damit auch die Gleichung der Schnittkurve:

$$z' = z_o + \frac{\omega_F^2}{2.g} \cdot (r'^2 - D^2/8) \quad .$$

Das ist aber die Gleichung einer Parabel. Angepaßt an das Beispiel,

lautet sie: $$z' = 0{,}641 + 5{,}096 \cdot r'^2 \quad .$$

f) $F_{pü}$ am Boden des Gefäßes:

An einer beliebigen Stelle des Gefäßbodens herrscht der Überdruck $p_ü = \varrho_W \cdot g \cdot z'$ .Eine elementare Ringfläche berechnet man mit $dA = 2 \cdot \pi \cdot r' \cdot dr'$ .Damit ergibt sich für das Differential der Überdruckkraft:

$$dF_{pü} = \varrho_W \cdot g \cdot z' \cdot 2 \cdot \pi \cdot r' \cdot dr' \quad .$$

Setzt man für z' die Gleichung der freien Oberfläche ein,dann ergibt das Integral:

$$F_{pü} = 2 \cdot \pi \cdot \varrho_W \cdot g \cdot \int_0^{D/2} \left[z_o + \frac{\omega_F^2}{2 \cdot g} \cdot (r'^2 - D^2/8) \right] \cdot r' \cdot dr' \quad ;$$

$$F_{pü} = \varrho_W \cdot g \cdot (\pi/4) \cdot D^2 \cdot z_o \quad .$$

Das ist zumindest ein verblüffendes Ergebnis, daß die Winkelgeschwindigkeit überhaupt keine Rolle spielt.Das ist zwar zu erwarten,da alle Zentrifugalkräfte horizontal sind.

Bemerkungen:

1) Aus den Beziehungen (2) und (4) folgt:

$$z_o = \frac{z'_{min} + z'_{max}}{2} \quad .$$

2) Die Erklärung für die Oberflächenform bei Rotation ist darin zu suchen,daß die Flüssigkeit infolge der Wandhaftung in Drehung versetzt wird.Die koaxialen Schichten werden wegen der Flüssigkeitsreibung mitgeschleppt.Die "leichte" Verschieblichkeit der Fluidteilchen erlaubt ein Ausweichen der Flüssigkeit auf Grund der Fliehkraftwirkung.

   Die Wandhaftung und die innere Schichtreibung ist so groß,daß das ausgebildete Flüssigparaboloid schließlich wie ein Festkörper rotiert nach dem Geschwindigkeitsgesetz

$$\vec{v}_u = \vec{\omega}_F \times \vec{r} \quad .$$

   Die Umfangsgeschwindigkeit eines herausgetrennten Fluidteilchens ist gleich dem Vektorprodukt aus Fahrzeugwinkelgeschwindigkeit und dem Radius.

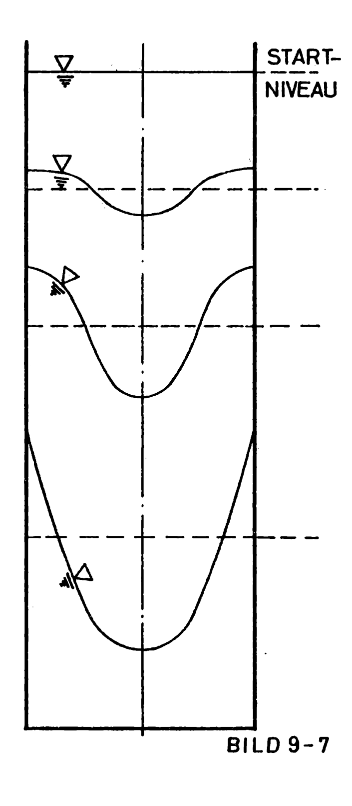


BILD 9-7

Die allmähliche Ausbildung der Oberfläche verdeutlicht übrigens Bild 9-7.
Die Erwähnung der hierbei vorhandenen Reibung widerspricht nicht der gemachten Voraussetzung, daß in der Fluidstatik Reibungskräfte keine Rolle spielen. Die zur Ausbildung des rotierenden Flüssigkörpers notwendigen Reibungskräfte sind tangential gerichtet und stehen deshalb senkrecht auf der Bildebene, allgemeiner ausgedrückt: senkrecht auf der Meridianebene. Diese Kraftrichtung hat aber auf das relative Gleichgewicht in einer Meridianebene keinen Einfluß.

Bei der Drehbewegung einer Flüssigkeit der geschilderten Art spricht man auch von Kern- oder Stabwirbelbewegung, die auch in vollkommenen Fluiden stattfinden können. – Auch als Drehzahlmesser verwendbar.

5. Beispiel

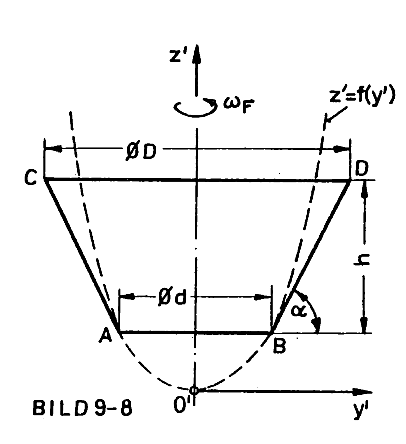


BILD 9-8

Man bestimme die erforderliche Winkelgeschwindigkeit ω_F eines rotierenden Behälters nach Bild 9-8 (Angaben: d = 0,15 m ; D = 0,3 m; h = 0,1 m), so daß sich keine Flüssigkeit mehr im Behälter befindet.

Lösung:

Der anfangs volle Behälter entleert sich mit zunehmender Winkelgeschwindigkeit. Die sich jeweils einstellende Oberfläche zeigt im Meridianschnitt immer Parabelverlauf. Wenn eine Parabel den Behälter in den Punkten A und B berührt, hat man die Gewähr, daß der Behälter leergeschleudert worden ist.-Die mathematische

Bedingung lautet dazu: $\quad tg\alpha = dz' / dy'$. - Mit Hilfe der gegebenen Geometrie und der Parabelgleichung aus Punkt e) des letzten Beispiels ergibt sich:

$$\frac{h}{(D - d)/2} = \frac{\omega_F^2}{g} \cdot y' = \frac{\omega_F^2}{g} \cdot \frac{d}{2} \quad ; \text{ damit ist}$$

$$\boxed{\omega_F = 2 \cdot \sqrt{\frac{g \cdot h}{(D - d) \cdot d}}} \quad . \quad \text{In Zahlen:}$$

$$\omega_F = 2 \cdot \sqrt{\frac{9{,}81 \cdot 0{,}1}{(0{,}3 - 0{,}15) \cdot 0{,}15}} \quad ; \quad \underline{\underline{\omega_F = 13{,}206 \text{ rad/s}}} \quad .$$

6. Beispiel

Ein Radreif wird aus Schleuderguß hergestellt, Bild 9-9. Seine Haupt-

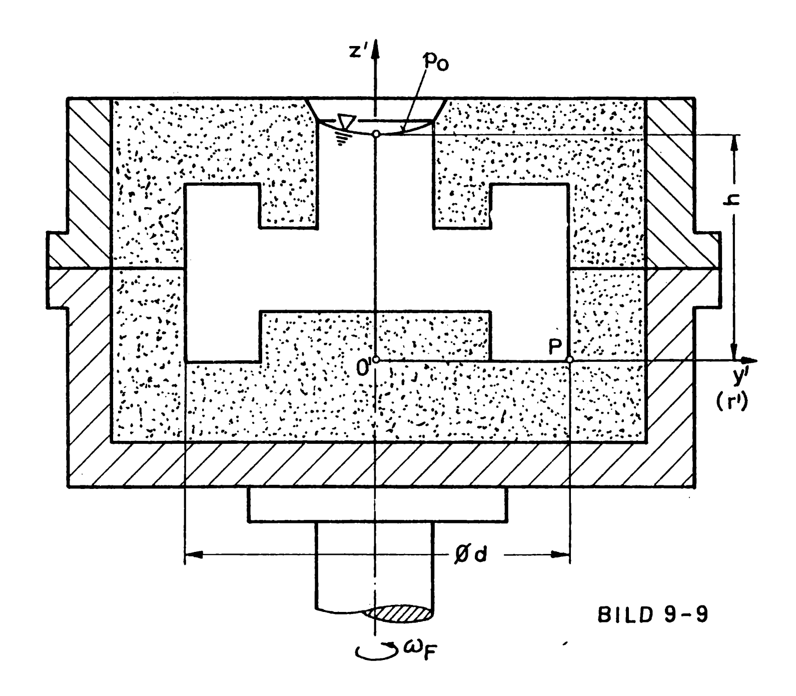


BILD 9-9

abmessungen sind: d = 1,2 m und h = 0,23 m; die Winkelgeschwindigkeit

der Gießform beträgt ω_F = 30 rad/s ; die Stoffdichte wird mit ϱ = 7000 kg/m³ angegeben.
Man vergleiche die Überdrücke im Punkte P, die einmal im Ruhezustand und einmal während des rotierenden Vergießens auftreten.

Lösungen:

Überdruck im Ruhezustand:

Gl.(6-5) : $$p_{ü} = \varrho \cdot g \cdot h = 7000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}23 = 0{,}1579 \text{ bar.}$$

Überdruck bei Rotation:

Bedenkt man die Allgemeingültigkeit der Gleichungen (9-18) bis (9-21) - sie entstanden ja aus dem relativen Gleichgewichtszustand einer ruhenden Ersatzmasse bei rotierendem Fahrzeug und vertikaler Achse -, so kann man nach Festlegung eines relativen Koordinatensystems die Gl.(9-19) verwenden und an die Bestimmung der Integrationskonstanten herangehen: $p = p_o$ bei $r' = 0$ und $z' = h$.

Gl.(9-19): $$p = \text{const} + (\varrho/2) \cdot \omega_F^2 \cdot r'^2 - \varrho \cdot g \cdot z' \quad ; \text{ es folgt:}$$

$$p_o = \text{const} - \varrho \cdot g \cdot h \quad ; \text{ also:}$$

$$\text{const} = p_o + \varrho \cdot g \cdot h \quad .$$

Damit lautet die an das Problem angepaßte Druckformel:

$$p = p_o + \varrho \cdot g \cdot h + (\varrho/2) \cdot \omega_F^2 \cdot r'^2 - \varrho \cdot g \cdot z'$$

$$p_{ü} = p - p_o = \varrho \cdot g \cdot (h - z') + (\varrho/2) \cdot \omega_F^2 \cdot r'^2 \quad .$$

Für den Punkt P (r' = d/2; z' = 0) folgt dann:

$$p_{ü} = 7000 \cdot 9{,}81 \cdot 0{,}23 + (7000/2) \cdot 30^2 \cdot 0{,}6^2 \quad ; \quad p_{ü} = 11{,}498 \text{ bar} \quad .$$

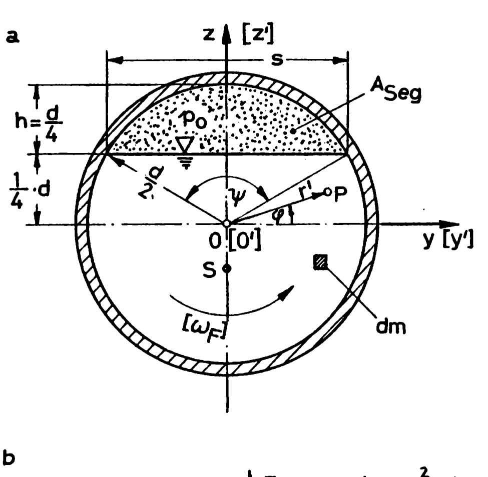
Die Verdichtungswirkung der Gießmasse wird besonders klar ausgedrückt durch das Überdruckverhältnis:

$$\frac{p_{ü,\text{Rotation}}}{p_{ü,\text{Ruhe}}} = \frac{11{,}498}{0{,}1579} = 72{,}82 \quad !!$$

7. Beispiel

Eine zylindrische Trommel vom Innendurchmesser d = 0,5 m ist zum Teil

mit Wasser gefüllt;darüber befindet sich im Ruhezustand Luft vom Atmosphärendrück p_o = 1,015 bar,Bild 9-10,Pos. a .Die Trommel wird



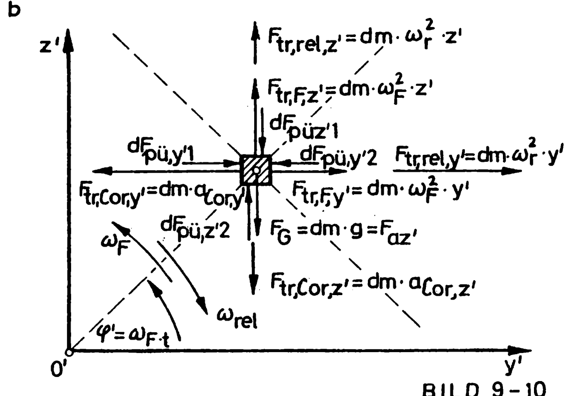


BILD 9-10

nun um die Horizontalachse (x-Achse) in Drehung versetzt mit der Fahrzeugwinkelgeschwindigkeit ω_F . - Man ermittle und untersuche im einzelnen:

a) den Ausdruck der massenspezifischen potentiellen Energie e_p;
b) die Druckformel;
c) die Gleichung der Isobarflächen;
d) die Gleichung der freien Oberfläche;
e) die Winkelgeschwindigkeit ω_F ,für welche die freie Oberfläche gerade die Trommelinnenwand berührt;

f) die Gleichung der freien Oberfläche für Fall e) ;
g) die Stelle und den Betrag des maximalen Druckes für e) ;
h) die resultierende Kraft auf die rechte Trommelhälfte der Größe, Richtung und Lage nach im Fall e) ,wenn man die Trommellänge mit $L_t = 0{,}5$ m annimmt.

Lösungen:

a) e_p :

Die Flüssigkeit wird einer Kernwirbelbewegung ausgesetzt - siehe Bemerkung 2) im vierten Beispiel -,so daß die Flüssigkeit wieder infolge der Fliehkraft an der Behälterwand hochsteigt.
Laboruntersuchungen haben ergeben,daß die Luftzone immer "oben" steht,zumal auch die Luft leichter als Wasser ist.Dieser Sachverhalt führt zu folgender Aussage:
Der "quasi-feste" Flüssigkörper wird nicht nur mit der Winkelgeschwindigkeit des Fahrzeuges rotieren;im Gegenteil: der Flüssigkörper führt eine entgegengesetzte Relativrotation aus,so daß er sich sogar in absoluter Ruhe befindet.Die Erklärung lautet: Der aus der unteren Behälterhälfte im Fahrzeugdrehsinn (hier Gegenuhrzeigersinn) heraustretende Flüssigkeitsschwerpunkt S wird durch das Gewichtsdrehmoment wieder in die tiefste Lage (unterhalb des Drehpunktes) zurückgedreht.Da sich insgesamt in der z';y'-Ebene wiederum nur Massen- und Druckkräfte sich das relative Gleichgewicht (vgl. Abschn. 9.3) halten,gibt es für die resultierende Massenkraft ein Potential.
Zur Ermittlung des Potentials oder der massenspezifischen potentiellen Energie geht man immer vom Gleichgewicht der Kräfte,hier vom relativen Gleichgewicht,aus (Bild 9-10, Pos. b).
Die am Gleichgewicht beteiligten Kräfte heißen:

1) die vier Überdruckkräfte $F_{püy'1}$; $F_{püy'2}$; $F_{püz'1}$; $F_{püz'2}$;

2) die Gewichtskraft als äußere Kraft $F_G = dm.g = F_{az'}$;

3) die Zentrifugalkraft auf Grund der Fahrzeugbewegung $F_{tr,F}=dm.\omega_F^2.r'$ mit ihren beiden Komponenten: $F_{tr,F,y'} = dm.\omega_F^2.y'$ und

$$F_{tr,F,z'} = dm.\omega_F^2.z' \quad ;$$

4) die Zentrifugalkraft auf Grund der relativen Drehung des Fluids (die Relativrotation läuft mit entgegengesetztem Drehsinn ab, und zwar bezüglich der Fahrzeugrotation) $F_{tr,rel} = dm.\omega_{rel}^2.r'$ mit den beiden Komponenten:

$$F_{tr,rel,y'} = dm.\omega^2_{rel}.y' \quad \text{und}$$

$$F_{tr,rel,z'} = dm.\omega^2_{rel}.z' \quad ;$$

5) die Corioliskraft (sie entsteht ja in dem Augenblick,wo bei Fahrzeugrotation eine Relativbewegung hinzukommt) $F_{tr,Cor} = dm.a_{Cor}$ mit den beiden Komponenten:

$$F_{tr,Cor,y'} = dm.a_{Cor,y'} \quad \text{und}$$

$$F_{tr,Cor,z'} = dm.a_{Cor,z'} \quad .$$

Zur Potentialermittlung interessieren nur die Massenkräfte,weshalb die in Bild 9-10,Pos. b,eingetragenen Überdruckkräfte hierfür nicht weiter verfolgt werden.
Die Gewichtskraft ist für den Fall,daß die beiden Koordinatensysteme : das z;y- und das z';y'-System deckungsgleich sind,was wegen der Fahrzeugrotation pro Umdrehung einmal stattfindet,nach unten gerichtet.
Die beiden Fliehkräfte sind als Trägheitskräfte beide nach außen gerichtet.
Wendet man die Regel der rechten Hand an bezüglich der Richtung der Coriolisbeschleunigung (siehe Erläuterungen zu Gl.9-9),so findet man ihren Richtungssinn nach außen hin gerichtet,d.h.: die Corioliskraft genannte Massenträgheitskraft ist nach innen gerichtet!
Zur Auffindung der Komponenten der resultierenden massenspezifischen Massenkräfte : $f_{x'}$; $f_{y'}$; $f_{z'}$,die man ja zur Ermittlung der Potentialfunktion zunächst benötigt,muß eine Datenbeschaffung über die noch fehlenden Größen $\vec{a}_{rel}$ und $\vec{a}_{Cor}$ Auskunft geben.
Die Beobachtung des Fluids bei Fahrzeugrotation besagt,daß der Flüssigkörper,absolut gesehen,sich in Ruhe befindet;also gilt:

$$\vec{\omega}_{abs} = \vec{\omega}_F + \vec{\omega}_{rel} = 0 \quad ; \quad \underline{\underline{\vec{\omega}_{rel} = -\vec{\omega}_F}} \quad .$$

Betragsmäßig sind sie gleich,wohl aber entgegengesetzt gerichtet.Die Zentripetalbeschleunigung der Relativbahn lautet betragsmäßig:

$$\underline{\underline{a_{rel} = \omega^2_F \cdot r'}} \quad .$$

Nach Gl.(9-9) folgt: $\vec{a}_{Cor} = 2 \cdot (\vec{\omega}_F \times \vec{w}) = 2.\omega_F.w.\sin\varphi.r'_0$

mit r'_0 als dem Einheitsvektor.

Die Relativgeschwindigkeit ist gleich der relativen Umfangsgeschwindigkeit $\omega_F \cdot r'$; φ bedeutet den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{r'}$ und dem Vektor der Umfangsgeschwindigkeit.Da $\varphi = 90^\circ$ ist,gilt:

$$a_{Cor} = 2 \cdot \omega_F^2 \cdot r' \quad .$$

Aus $\sum F_{y'i} = dF_{pü,y'1} - dF_{pü,y'2} - F_{tr,Cor,y'} + F_{tr,F,y'} + F_{tr,rel,y'} = 0$

folgt unter Einsatz obiger Beschleunigungswerte für die resultierende massenspezifische Massenkraft

$$f_{y'} = 0 \quad .$$

Wohlgemerkt,dieses Ergebnis bezieht sich auf den absoluten Raum,beobachtet vom Fahrzeug aus,denn es wird ja mit dem relativen Gleichgewicht gearbeitet.
Da in x'-Richtung keine Massenkräfte wirken,folgt sofort:

$$f_{x'} = 0 \quad .$$

Eine entsprechende Verwertung des Kräftegleichgewichtes in z'-Richtung :

$$\sum F_{z'i} = + F_{tr,rel,z'} + F_{tr,F,z'} - dF_{pü,z'1} - F_G - F_{tr,Cor,z'} = 0$$

ergibt:

$$f_{z'} = - g \quad .$$

Dieses Ergebnis bestätigt wiederum anschaulich die absolute Ruhe des Fluids im Falle der Fahrzeugrotation.Man steht nun vor der ungewöhnlichen Tatsache,daß man die neue Form der Fluidzone,die zwar auch bei absoluter Ruhe existiert,vom Absolutsystem aus nicht erklären kann!- Eine Absolutbetrachtung führt ohne Fahrzeugnebeneinflüsse nur zum horizontalen Flüssigkeitsspiegel (Bild 9-10,Pos. a).Nun wird aber durch die angedeutete Kernwirbelbewegung unter Mitwirkung der Erdschwere eine neue Form bei absoluter Ruhe erzeugt:

$$a = 0 \quad .$$

Um diese Problematik meistern zu können,hält man das Fahrzeugkoordinatensystem (z';y'-System) für einen Augenblick fest,wenn sich das relative und das absolute Koordinatensystem überdecken.Die dabei auftretenden Kräfteverhältnisse sind dann hauptverantwortlich für die neue Fluidform!-Man untersuche also ein Momentanbild des Gesamtgesche-

hens als mitfahrender Beobachter, so als ob das z';y'-System momentan festgehalten sei. Aus der Massenszene entfallen $F_{tr,F,y'}$ und $F_{tr,Cor,y'}$ sowie $F_{tr,Cor,z'}$ und $F_{tr,F,z'}$! - Es bleiben folgende Werte:

$$f_{x'} = -\frac{\partial e_p}{\partial x'} = 0 \quad ; \quad f_{y'} = -\frac{\partial e_p}{\partial y'} = \omega^2_{rel} \cdot y' \quad ;$$

$$f_{z'} = -\frac{\partial e_p}{\partial z'} = \omega^2_{rel} \cdot z' - g \quad .$$

Damit bahnt sich die Ermittlung eines "Relativ-Potentials" an!

Das totale Differential der massenspezifischen, potentiellen Energie lautet nach Gl.(5-11) unter Beachtung, daß $\omega_{rel} = \omega_F$ gilt :

$$de_p = - f_{x'} \cdot dx' - f_{y'} \cdot dy' - f_{z'} \cdot dz' \quad ;$$

$$de_p = - \omega^2_F \cdot y' \cdot dy' - (\omega^2_F \cdot z' - g) \cdot dz' \quad .$$

Die Integration bringt für e_p:

$$e_p = -\frac{\omega^2_F}{2} \cdot (y'^2 + z'^2) + g \cdot z' + \text{Konst} \quad . \qquad (1)$$

b) die Druckformel:

Nach Gl.(6-1): $p/\varrho + e_p = \text{const}$ folgt :

$$p = (\varrho/2) \cdot \omega^2_F \cdot (y'^2 + z'^2) - \varrho \cdot g \cdot z' + \text{const}' \qquad (2).$$

c) Gleichung der Isobarflächen:

Gibt man dem Druck einen parametrischen Festwert, dann lautet die Gleichung für die Isobarflächen:

$$y'^2 + z'^2 - \frac{2 \cdot g}{\omega^2_F} \cdot z' = \frac{2}{\omega^2_F} \cdot \left(\frac{p}{\varrho} - \text{const}^* \right) .$$

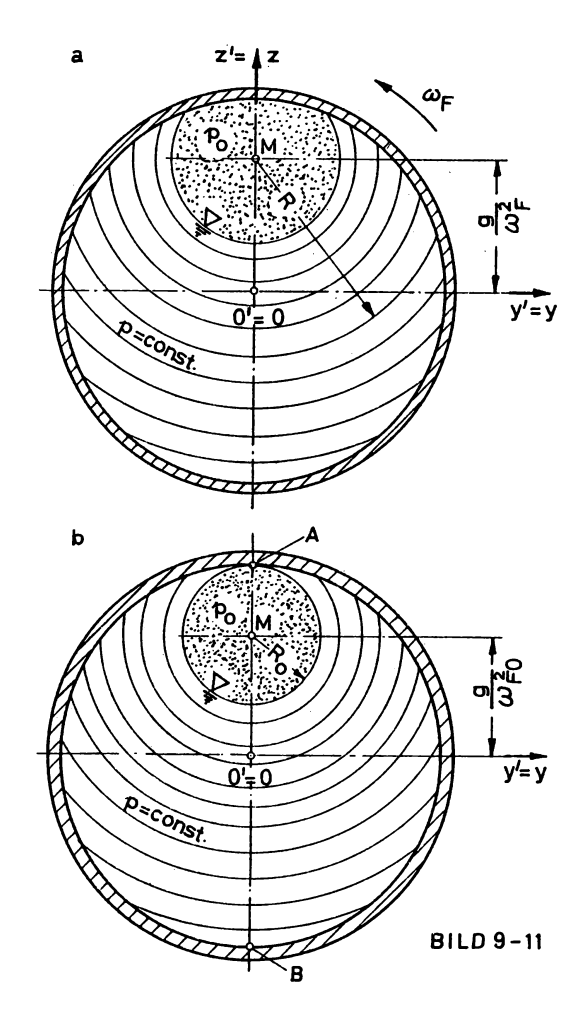


BILD 9-11

Mit Hilfe der quadratischen Ergänzung erhält man:

$$y'^2 + \left(z' - \frac{g}{\omega_F^2}\right)^2 = \frac{2}{\omega_F^2} \cdot \left(\frac{p}{\varrho} - \text{const*}\right) + \frac{g^2}{\omega_F^4} = R^2 \quad (3).$$

Da x' = 0 ist, erkennt man in oben stehender Gleichung die analytische Gleichung eines Kreises vom Radius R und mit der Nullpunktsverschiebung in z'-Achse vom Betrag : g/ω_F^2 . - Die Isobarflächen sind also koaxiale Zylinder, Bild 9-11, Pos. a, mit der Längsachse (pa-

rallel zu Ox') im Mittelpunkt der Kreisschar. Der Radius für jeden Kreis ist:

$$R = \frac{1}{\omega_F} \cdot \sqrt{2.\left(\frac{p}{\rho} - const^*\right) + \frac{g^2}{\omega_F^2}} \qquad (4).$$

Die Ermittlung der Konstanten const* folgt am Ende des Beispielpunktes f).

d) <u>die Gleichung der freien Oberfläche</u> :

Für $p = p_o$ erhält man aus der Beziehung (3) folgende Gleichung für den Oberflächenkreis:

$$y'^2 + \left(z' - \frac{g}{\omega_F^2}\right)^2 = \frac{2}{\omega_F^2} .\left(\frac{p_o}{\rho} - const^*\right) + \frac{g^2}{\omega_F^4} \qquad (5).$$

e) <u>die Winkelgeschwindigkeit, damit die freie Oberfläche gerade die Trommelinnenwand im Punkte A berührt</u> :

Wegen der Inkompressibilität und wegen Gleichbleibens des Trommelvolumens gilt die Tatsache, daß auch das eingeschlossene Luftvolumen bei gleichem Druck erhalten bleibt. Man notiere: $A_{Segment} = A_{Kreis}$! (Vgl. Bild 9-10 und 9-11, Pos. b).

$$0{,}5.\left[b.\frac{d}{2} - s.\left(\frac{d}{2} - h\right)\right] = \pi.R_o^2 \quad \text{mit} \quad b = \frac{d}{2}.\hat{\varphi} \quad .$$

Daraus ergibt sich

$$R_o = \frac{d}{2} . \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4.\pi}} \qquad (6).$$

In Zahlen für d = 0,5 m ergibt sich dann: $R_o = 0{,}1105$ m .

Aus der Kreisgeometrie ergibt sich problemlos:

$$d\,/\,2 = R_o + g\,/\omega_{Fo}^2$$, womit man für die gesuchte

Winkelgeschwindigkeit erhält:

$$0{,}5/2 = 0{,}1105 + 9{,}81/\omega_{Fo}^2 \quad ; \quad \omega_{Fo} = 8{,}3859 \text{ rad/s}.$$

f) die Gleichung der freien Oberfläche für Fall e) :

Mit R_o und ω_{Fo} ergibt sich aus Beziehung (3) folgende Gleichung:

$$y'^2 + (z' - 0{,}1395)^2 = 0{,}0122 \quad ,$$

wenn man die Längen üblicherweise in m einsetzt. Der Mittelpunkt

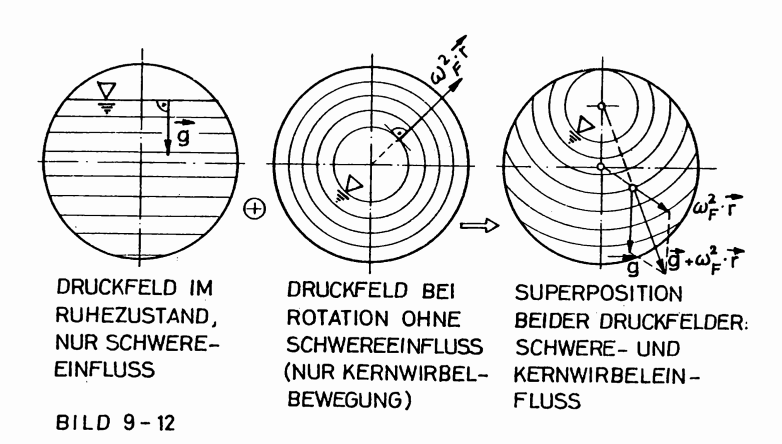


BILD 9-12

für die Kreisschar hat die Koordinaten : y' = 0; z' = 0,1395 m .
In Bild 9-12 wird gezeigt, wie man sich dieses Druckfeld qualitativ erklären kann: durch Superposition zweier anderer Druckfelder!
Die in den Beziehungen (3), (4) und (5) enthaltene Konstante const* läßt sich nun mit Beziehung (4) für die freie Oberfläche als Randbedingung ermitteln:

$$0{,}1105 = \frac{1}{8{,}3859} \cdot \sqrt{2.\left(\frac{1{,}015.10^5}{1000} - \text{const*}\right) + \frac{9{,}81^2}{8{,}3859^2}}$$

$$\text{const*} = 101{,}755 \text{ m}^2 \quad .$$

g) Stelle und Betrag des maximalen Druckes für Fall e) :

Der größte Druck herrscht in Punkt B bei $R_{omax} = d/2 + g/\omega_{Fo}^2$ (Bild 9-11, Pos. b).
Den maximalen Druck berechnet man sich mit Hilfe der Beziehung (4):

$$(0{,}25 + 0{,}1395) = \frac{1}{8{,}3859} \cdot \sqrt{2.\left(\frac{p_{max}}{1000} - 101{,}755\right) + \frac{9{,}81^2}{8{,}3859^2}}$$

$$\underline{\underline{p_{max} = 1{,}064 \text{ bar}}} \quad .$$

h) F_R auf die rechte Trommelhälfte für Fall e) :

Da zwischen den Konstanten const' und const* in den Beziehungen (2) und (3) folgender Zusammenhang besteht: $\text{const}' = \varrho . \text{const}^*$, lautet jetzt die Druckformel für den Überdruck:

$$(2): \; p_ü = p - p_o = \frac{\varrho}{2} . \omega_F^2 . (y'^2 + z'^2) - \varrho . g . z' + \varrho . \text{const}^* - p_o \quad .$$

| $y'^2 + z'^2 = r'^2$; $z' = r'.\sin\varphi$; am Trommelinnenrand geht r' gegen d/2 über; somit gilt für die Druckverteilung an der Trommelwand:

$$p_ü = \frac{\varrho}{2} . \omega_F^2 . \frac{d^2}{4} - \varrho . g . \frac{d}{2} . \sin\varphi + \varrho . \text{const}^* - p_o \quad ;$$

$$\underline{\underline{p_ü = \frac{\varrho}{8} . \omega_F^2 . d^2 - \varrho . g . \frac{d}{2} . \sin\varphi + \varrho . \text{const}^* - p_o}} \quad .$$

Kräftedifferential: Die Trommelanordnung ersieht man aus Bild 9-13.

$$dF_{pü} = p_ü . dA$$

$$dF_{pü} = p_ü \cdot L \cdot \frac{d}{2} . d\varphi \quad .$$

Da eine gekrümmte Wand vorliegt, wird die resultierende Druckkraft über ihre Komponenten berechnet:

$$dF_{pü,y'} = dF_{pü} \cdot \cos\varphi \quad ;$$

$$dF_{pü,y'} = p_ü . L . \frac{d}{2} . \cos\varphi . d\varphi \quad ;$$

BILD 9-13

$$F_{pü,y'} = L.\frac{d}{2}.\int_{(-\pi/2)}^{(+\pi/2)}\left[\frac{\varrho}{8}.\omega_F^2.d^2-\varrho.g.\frac{d}{2}.\sin\varphi+\varrho.const^*-p_o\right].\cos\varphi.d\varphi$$

Das Integral führt nach Einsetzen der bekannten Zahlenwerte zu folgendem Teilergebnis:

$$F_{pü,y'} = 306{,}58\ N \quad .$$

Ermittlung der z'-Komponente:

$$dF_{pü,z'} = dF_{pü}.\sin\varphi = p_ü.L.\frac{d}{2}.\sin\varphi.d\varphi \quad ;$$

$$F_{pü,z'} = L.\frac{d}{2}.\int_{(-\pi/2)}^{(+\pi/2)}\left[\frac{\varrho}{8}.\omega_F^2.d^2-\varrho.g.\frac{d}{2}.\sin\varphi+\varrho.const^*-p_o\right].\sin\varphi.d\varphi$$

Das bestimmte Integral führt hier zu:

$$F_{pü,z'} = -\ 481{,}55\ N \quad .$$

Die resultierende Überdruckkraft heißt dann für die rechte Trommelhälfte nach Bild 9-12:

$$F_{pü} = \sqrt{306{,}58^2 + 481{,}55^2} \quad ; \quad F_{pü} = 570{,}86\ N \quad .$$

Diese Kraft ist in den vierten Quadranten gerichtet und verläuft durch die Längsachse bzw. in der Projektion durch den Koordinatenursprung 0',da die Krümmung der Behälterwand konstant ist.

8.Beispiel

Nach der Kant-Laplaceschen Hypothese über die Gestalt der Erde (erdkosmogonische Hypothese;1755 "philosophisch" von Kant und 1796 "mathematisch" von Laplace formuliert) geht man von einer rotierenden Quasi-Flüssigkeit aus,die aus feinsten Partikelchen ("Nebulose") bestehen möge.-Man ermittle:

a) die Art der geometrischen Form der Erde,wenn die einzelnen "Quasi-Fluidteilchen vom Massenzentrum der"Nebulose" 0' durch die Feldkraft $F_a = - r_o.K.m$ angezogen werden.Diese Annahme gilt als mathe-

matisches Modell. Bei K handelt es sich um eine Universalkonstante.

b) Die Gleichung der Erdoberfläche mit Hilfe der Erdachsen:
Erdradius am Äquator $r_Ä = 6{,}378 \cdot 10^6$ m ;
" " Pol $r_P = 6{,}3565 \cdot 10^6$ m;
weitere Angaben: mittlere Erddichte $\varrho = 5520$ kg/m^3; Atmosphärendruck $p_0 = 1{,}015$ bar; Winkelgeschwindigkeit der Erde $\omega_F = 7{,}28 \cdot 10^{-5}$ rad/s = 1 Umdrehung/ 24 h .

Lösungen:

a) Geometrische Form:

Die geometrischen und kinetischen Zusammenhänge zeigt Bild 9-14.

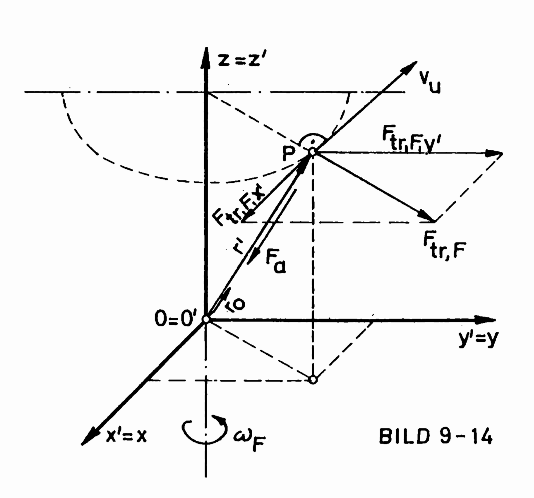


BILD 9-14

Der Massenpunkt $P(x';y';z')$ ist im relativen Gleichgewicht unter der Einwirkung von Überdruckkräften (nicht im Bild eingetragen), der Feldkraft F_a und der Trägheitskraft $F_{tr,F}$ (Zentrifugalkraft). Da sich außer Druckkräften nur noch Massenkräfte am Gleichgewicht beteiligen, läßt sich wiederum ein Potential für die Massenkräfte aufsuchen. Komponenten der massenspezifischen resultierenden Massenkraft:

$$f_{x'} = -\frac{\partial e_p}{\partial x'} = -K \cdot x' + \omega_F^2 \cdot x' \quad ;$$

$$f_{y'} = -\frac{\partial e_p}{\partial y'} = -K \cdot y' + \omega_F^2 \cdot y' \quad ;$$

$$f_{z'} = -\frac{\partial e_p}{\partial z'} = -K \cdot z' \quad .$$

Das totale Differential der massenspezifischen, potentiellen Energie lautet:

$$de_p = -(-K.x' + \omega_F^2.x').dx' - (-K.y' + \omega_F^2.y').dy' - (-K.z').dz' \quad .$$

Das unbestimmte Integral lautet:

$$e_p = \frac{K - \omega_F^2}{2} \cdot (x'^2 + y'^2) + \frac{K}{2}.z'^2 + \text{const} \quad .$$

Gleichung der Isobarflächen:

Mit Gl.(6-1) : $p/\rho + e_p = \text{const}'$ folgt für einen parametrisch fixierten Druck: $p = \rho.\text{const}' - \rho.e_p$;

$$(K - \omega_F^2).(x'^2 + y'^2) + K.z'^2 = 2.(\text{Konst} - p/\rho) \quad .$$

Daraus ersieht man, daß es sich bei den Isobarflächen um Rotationsellipsoide handelt. Damit stellt auch die Erdoberfläche als freie Oberfläche ein Rotationsellipsoid dar!

b) Gleichung der Erdoberfläche:

Die Gleichung eines Ellipsoids lautet:

$$x'^2/a^2 + y'^2/b^2 + z'^2/c^2 = 1 \quad ,$$

worin a, b und c die drei Halbachsen bedeuten. Im Falle des Rotationsellipsoids sind die beiden Halbachsen a und b gleich groß, weshalb sich die Gleichung für die Erdoberfläche folgendermaßen anschreiben läßt:

$$\frac{x'^2 + y'^2}{\left[\frac{2.(\text{Konst} - p/\ )}{K - \ ^2_F}\right]} + \frac{z'^2}{\left[\frac{2.(\text{Konst} - p/\ )}{K}\right]} = 1 \quad .$$

Bestimmung der beiden unbekannten Konstanten K und Konst :

Es gilt doch für den Pol:

$$(1) \qquad c^2 = \frac{2.(\text{Konst} - p_o/\rho)}{K - \omega_F^2} = r_P^2$$

und für den Äquator:

(2) $$a^2 = b^2 = \frac{2.(\text{Konst} - p_o/\varrho)}{K - \omega_F^2} = r_{\ddot{A}}^2 \quad .$$

Berechnet man den Klammerausdruck aus Beziehung (1) und setzt ihn in Beziehung (2) ein, dann ergibt sich eine Bestimmungsgleichung für die Universalkonstante K :

(3) $$K = \frac{\omega_F^2 \cdot r_{\ddot{A}}^2}{r_{\ddot{A}}^2 - r_P^2} \quad . \text{ In Zahlen:}$$

$$K = \frac{7{,}28^2.10^{-10}.6{,}378^2.10^{12}}{(6{,}378^2 - 6{,}3565^2).10^{12}} \quad ; \quad \underline{\underline{K = 0{,}78743.10^{-6} \quad 1/s^2}} \quad .$$

Damit ergibt sich für Konst:

(1): $$\text{Konst} = \frac{r_P^2 \cdot K}{2} + \frac{p_o}{\varrho} = \frac{6{,}3565^2.10^{12}.0{,}78743.10^{-6}}{2} + \frac{1{,}015.10^5}{5520}$$

$$\underline{\underline{\text{Konst} = 0{,}159.10^6 \ m^2/s^2}} \quad .$$

Mit diesen Werten bekommt man für die Gleichung der Erdoberfläche abschließend:

$$\underline{\underline{\frac{x'^2 + y'^2}{0{,}40653.10^{12}} + \frac{z'^2}{0{,}4038.10^{12}} = 1}} \quad .$$

Da insgesamt kohärent gerechnet worden ist, sind die Koordinaten natürlich in m einzusetzen.
(Eine andere Behandlung dieses Problems findet man in [2]).

10. AEROSTATIK

10.1. Theorie

Im Teil I, besonders in Abschn. 3, sind Eigenschaften und Verhaltensweisen von Gasen (und vollkommenen Dämpfen) dargelegt worden. Neben den besonderen Wärmeeigenschaften erkannte man außerdem bei den Gasen ihre

Leichtgewichtigkeit,Ausdehnbarkeit,Kompressibilität und ihr Diffusionsbestreben.
Da es sich bei Flüssigkeiten und Gasen um homogene Stoffe handeln soll im Sinne der gemachten Definitionen und Stoffgebietsabgrenzungen,sind letzten Endes alle Überlegungen,Gesetzmäßigkeiten usw. der Hydrostatik auch auf die Aerostatik anzuwenden,mit Ausnahme der Wärmeeigenschaften,wo man auf die Art der Zustandsänderung besonders achthaben muß.
Als Druckformel für Gase kann man wegen der Kompressibilität die allgemeine Druckformel nach Gl.(5-13) einfach übernehmen:

$$\int_{1,2} \frac{dp}{\varrho} = e_{p1} - e_{p2} \qquad (10\text{-}1).$$

Das Integral nimmt je nach der Art der Zustandsänderung verschiedene Lösungsformen an.Es halten sich in der Aerostatik wiederum nur Massen- und Druckkräfte das Gleichgewicht,weshalb den Massenkräften verständlicherweise ein Potential zugeschrieben werden kann.
Liegt ein Schwerepotential vor,weil als äußere Massenkraft nur die Schwerkraft der Erde wirken möge,dann kann die Gl.(6-2) auch für die Aerostatik übernommen werden:

$$- e_p = - g.z + \text{konst} \qquad (10\text{-}2).$$

Nach Multiplikation mit (-1) geht die Potentialfunktion $(-e_p)$ über in die Gleichung für die massenspezifische,potentielle Energie:

$$e_p = + g.z + \text{konst}' \qquad (10\text{-}2a).$$

Damit läßt sich die Gl.(10-1) in der an die Erdschwere angepaßten Form anschreiben:

$$\int_{1,2} \frac{dp}{\varrho} - g.(z_1 - z_2) = 0 \qquad (10\text{-}3).$$

Meistenteils dürfen in der Aerostatik die Massenkräfte gegenüber den Druckkräften vernachlässigt werden.Das ist insofern für die Druckkraftberechnung auf ebene oder gekrümmte,offene Flächen von besonderer Bedeutung,weil dadurch der Einfluß der Schwere entfällt;deshalb wird die Wand nur isobar beaufschlagt: Es gilt Gl.(7-16) !

Druckkraftwirkungen auf geschlossene Flächen sind in der Aerostatik im allgemeinen ebenfalls vernachlässigbar mit einigen Ausnahmen: Ballon,Zeppelin,Baroskop und ev.a.

10.2. Beispiele

1.Beispiel

Zur Verdeutlichung des Gesetzes von Dalton:

> Der Gesamtdruck einer Gasmischung ist gleich der Summe der Partialdrücke der einzelnen Bestandteile.(Unter Partialdruck versteht man den Druck eines Gasbestandteiles,der sich einstellt,wenn der betreffende Gasbestandteil bei der gegebenen Temperatur das zur Verfügung stehende Gesamtvolumen allein ausfüllt.)

möge die Luftmasse $m_L = 1$ kg dahingehend untersucht werden:

a) welche Massenanteile von Stickstoff (N_2) und Sauerstoff (O_2) bei einem Gesamtdruck dieser Gasmischung von $p_L = p_{ges} = 1{,}015$ bar anzutreffen sind und

b) wie groß dabei die Partialdrücke sind.

Weitere Angaben: Gaskonstante für Luft $R_L = 287{,}14$ J/(kg.K) ;
" " O_2 $R_{O_2} = 259{,}97$ " ;
" " N_2 $R_{N_2} = 296{,}85$ " .

Lösungen:

a) Massenanteile m_{N2} und m_{02} :

Man muß zwei Bestimmungsgleichungen ausfindig machen.Eine Beziehung findet man in der Massenbilanz:

$$m_L = m_{N2} + m_{02} \quad (1).$$

Einen weiteren Zusammenhang liefert die allgemeine Gasgleichung (Gl.3-6):

Für Sauerstoff gilt: $p_{02} . V_{ges} = m_{02} . R_{02} . T_{ges}$;

für Stickstoff gilt: $p_{N2} . V_{ges} = m_{N2} . R_{N2} . T_{ges}$;

für Luft gilt : $p_L . V_{ges} = m_L . R_L . T_{ges}$.

Die Summenbildung der ersten beiden Gleichungen ergibt:

$$(p_{O2} + p_{N2}) \cdot V_{ges} = (m_{O2} \cdot R_{O2} + m_{N2} \cdot R_{N2}) \cdot T_{ges} \quad ;$$

$$\frac{p_L \cdot V_{ges}}{T_{ges}} = m_L \cdot R_L = m_{O2} \cdot R_{O2} + m_{N2} \cdot R_{N2} \quad .$$

Die zweite Beziehung lautet nunmehr:

$$\boxed{m_L \cdot R_L = m_{O2} \cdot R_{O2} + m_{N2} \cdot R_{N2}} \qquad (2).$$

Somit berechnen sich die Massenanteile durch:

$$m_{N2} = \frac{R_L - R_{O2}}{R_{N2} - R_{O2}} \cdot m_L \quad \text{und} \quad m_{O2} = \frac{R_L - R_{N2}}{R_{O2} - R_{N2}} \cdot m_L \quad .$$

Nach dem Einsetzen der Zahlen ergibt sich:

$$\underline{\underline{m_{N2} = 0,737 \text{ kg}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{m_{O2} = 0,263 \text{ kg}}} \quad .$$

b) Partialdrücke:

Sauerstoff: Ersetzt man in der Gasgleichung den Ausdruck V_{ges}/T_{ges} durch $m_L \cdot R_L/p_L$,dann folgt:

$$\underline{\underline{p_{O2}}} = \frac{m_{O2} \cdot R_{O2}}{m_L \cdot R_L} \cdot p_L = \frac{0,263 \cdot 259,97}{1 \cdot 287,14} \cdot 1,015 \cdot 10^5 = \underline{\underline{0,2417 \text{ bar}}};$$

Stickstoff: Analogerweise ergibt sich hier:

$$\underline{\underline{p_{N2}}} = \frac{m_{N2} \cdot R_{N2}}{m_L \cdot R_L} \cdot p_L = \frac{0,737 \cdot 296,85}{1 \cdot 287,14} \cdot 1,015 \cdot 10^5 = \underline{\underline{0,7733 \text{ bar}}}!$$

Bemerkung:

Ein praktisches Beispiel eines Gas-Dampf-Gemisches hat man beim Kondensator einer Dampfturbine: Der aus der Turbine kommende Dampf führt auch noch Restluft mit sich.Bei der Kondensation wird der Naßdampf zu Wasser,wodurch er seinen Partialdruck verliert.Der verbleibende Restdruck oder Kondensatordruck entspricht nun dem Partialdruck der vom Dampf getrennten Luft.

2.Beispiel

Wegen der mittleren Motorblocktemperatur nimmt die angesaugte Luft

in einem Dieselmotor die Temperatur T_1 = 373 K an. Der Ansaugdruck beträgt p_1 = 0,9 bar bei einem Atmosphärendruck von p_o = 1,015 bar. Man ermittle:

a) den Kompressionsenddruck p_2, wenn die Selbstentzündungstemperatur des Kraftstoffes bei T_2 = 1000 K liegt und wenn die Zustandsänderung mit einem Polytropenexponenten n = 1,4 beschrieben werden kann;

b) die Überdruckkraft auf den Kolben, wenn der Zylinder eine Bohrung von d = 0,2 m besitzt.

Lösung:

a) p_2 :

Aus Gl.(3-16) folgt für die Zustandsänderung:

$$\underline{\underline{p_2}} = p_1 . (T_2/T_1)^{\frac{n}{n-1}} = 0{,}9.10^5.(1000/373)^{\frac{1{,}4}{1{,}4-1}} = \underline{\underline{28{,}4 \text{ bar}}} .$$

b) $F_{pü}$:

Nach Gl.(7-16) folgt: $F_{pü} = p_ü . A_{Kolben} = (p_2 - p_o).(\pi/4).d^2$;

$$\underline{\underline{F_{pü}}} = (28{,}4 - 1{,}015).10^5.(\pi/4).0{,}2^2 = \underline{\underline{86{,}033 \text{ kN}}}.$$

3.Beispiel

In einem Behälter, Bild 10-1, befinden sich Luft und Wasser. Beim Eingießen des Wassers ist das untere Ventil 2 geschlossen und das obere 1 geöffnet, so daß die Luft verdrängt werden kann. Ist der Behälter dann bis h_1 mit Wasser angefüllt, wird das Ventil 1 ebenfalls geschlossen : Über dem Wasserspiegel lastet demnach der Atmosphärendruck. Weitere Angaben: p_o = 1,015 bar; h_1 = 2 m ; h_o = 1 m . Man bestimme nun die Höhe h_2, bis zu welcher sich der Wasserspiegel absenkt, wenn bei geöffnetem Ventil 2 Wasser aus dem Behälter ausfließt.

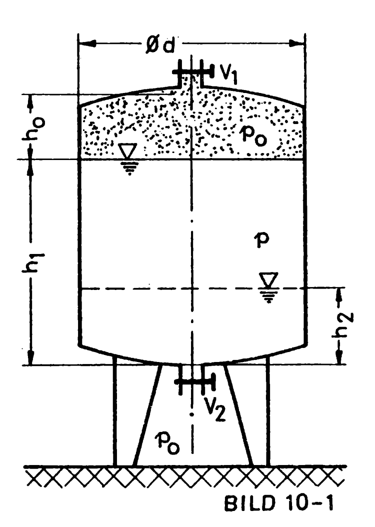


BILD 10-1

Lösung:

Nimmt man bei der Luft eine isotherme Zustandsänderung nach Gl.(3-4) an,dann folgt:

$$p_1 \cdot V_1 = p_2 \cdot V_2 \; ; \quad p_o \cdot A \cdot h_o = p \cdot A \cdot (h_o + h_1 - h_2) \; ;$$

$$\boxed{p_o = (p/h_o) \cdot (h_o + h_1 - h_2)} \qquad (1) \; .$$

Das Wasser fließt so lange aus,bis der sich einstellende Atmosphärenunterdruck der Behälterluft,einschließlich der Restwassersäule, gleich groß ist wie der äußere Luftdruck:

$$\boxed{p_o = p + \varrho \cdot g \cdot h_2} \qquad (2).$$

Aus den beiden Bestimmungsgleichungen erhält man nach Elimination von p eine quadratische Gleichung für h_2 :

$$\boxed{h_2 = \frac{\frac{p_o}{\varrho} + h_o + h_1}{2} \pm \sqrt{\frac{(\frac{p_o}{\varrho} + h_o + h_1)^2}{4} - \frac{p_o \cdot h_1}{\varrho \cdot g}}} \; ;$$

$h_2 = 6{,}673 \pm 4{,}883$ m ; davon kann physikalisch nur $\underline{\underline{h_2 = 1{,}79 \text{ m}}}$ richtig sein .

4.Beispiel

Für Unterwasserarbeiten wird eine Taucherglocke verwendet,Bild 10-2.

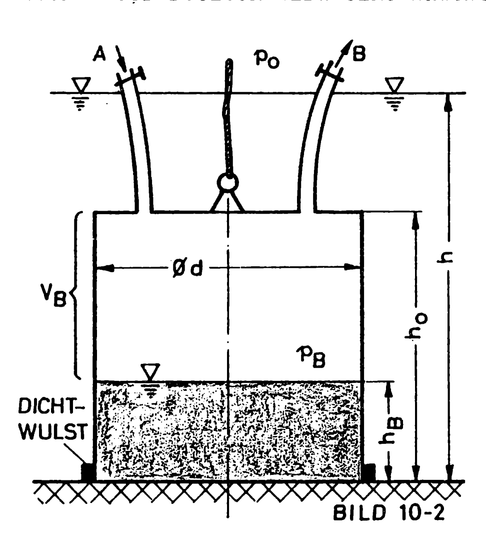


BILD 10-2

Angaben: $d = 4$ m; $h_o = 2{,}5$ m; $h = 12$ m ; $p_o = 1{,}015$ bar; Gaskonstante der Luft $R = 287{,}7$ J/(kg.K);Lufttemperatur $T = 288$ K .-Man bestimme:

a) das Volumen V_B in der Taucherglocke für den Fall, daß die Taucherglocke den Boden berührt;

b) die Höhe h_B des Wasserspiegels in der Glocke für Fall a);

c) den Luftdruck p' in der

Zuleitung A ,damit das gesamte Wasser in der Taucherglocke verdrängt wird;

d) die Luftmasse m_L ,welche bei geschlossenem Schlauch A durch den Entlüftungsschlauch B entweichen muß,bis zwischen Taucherglocke und Atmosphäre ein Druckausgleich stattgefunden hat.

Lösungen:

a) V_B :

Geht man von einer isothermen Zustandsänderung der in der Taucherglocke eingeschlossenen Luft aus,dann ergibt sich als erste Bestimmungsgleichung im Sinne von Gl.(3-4): $p_o.V_o = p_B.V_B$;

$$V_B = p_o.(\pi/4).d^2.h_o \;/\; p_B \qquad (1).$$

Eine weitere Bestimmungsgleichung liefert die Druckbeziehung:

$$p_B = p_o + \rho.g.(h - h_B) \qquad (2).$$

Neben der Zustandsgleichung und der Druckgleichung hilft eine Volumenbilanz weiter:

$$V_B = V_o - (\pi/4).d^2.h_B \qquad (3).$$

Durch Einsetzen von h_B aus dieser Beziehung in (2) und danach von p_B in (1) ergibt sich unter Verwendung der Zahlenangaben:

$$V_B = 15{,}424\ m^3 \quad .$$

b) h_B :

Aus (3) folgt: $V_B = (\pi/4).d^2.(h_o - h_B)$; $h_B = 2{,}5 - \dfrac{4.15{,}424}{\pi.4^2}$

$$h_B = 1{,}273\ m \ .$$

c) p' :

Es ist hierfür folgende Druckbeziehung einzuhalten: $p' \geqq p_o + \rho.g.h$;

$$p' = 1{,}015.10^5 + 1000.9{,}81.12 = 2{,}1922\ bar \quad .$$

d) m_L :

Vor dem Druckausgleich beträgt die in der Taucherglocke enthaltene Luftmasse $m_1 = \rho_B.V_o$.

Den Druck p_B ermittelt man aus der Beziehung (2):

$$\underline{\underline{p_B}} = 1{,}015.10^5 + 1000.9{,}81.(12 - 1{,}273) = \underline{\underline{2{,}0673\ \text{bar}}}.$$

Die Dichte ρ_B ermittelt man mit der Zustandsgleichung für vollkommene Gase, Gl.(3-7):

$$\underline{\underline{\rho_B}} = \frac{p_B}{R.T} = \frac{2{,}0673.10^5}{287{,}7.288} = \underline{\underline{2{,}495\ \text{kg/m}^3}}.$$

Somit erhält man für die vor dem Druckausgleich in der Taucherglocke enthaltene Luftmasse:

$$\underline{\underline{m_1}} = 2{,}495.(\pi/4).4^2.2{,}5 = \underline{\underline{78{,}383\ \text{kg}}} .$$

Nach dem Druckausgleich findet man noch eine Luftmasse von

$$\underline{\underline{m_2}} = \rho_o.V_o = \frac{1{,}015.10^5}{287{,}7.288}.(\pi/4).4^2.2{,}5 = \underline{\underline{38{,}484\ \text{kg}}} .$$

Der Differenzbetrag

$$\underline{\underline{m_L}} = m_1 - m_2 = 78{,}383 - 38{,}484 = \underline{\underline{39{,}9\ \text{kg}}}$$

ist also beim Druckausgleich durch die Leitung B entwichen.

5.Beispiel

Die ICAO (International Civil Aviation Organization) gibt für den atmosphärischen Zustand auf Meereshöhe folgende Werte an:
$p_o = 1{,}014.10^5$ Pa; $T_o = 288$ K; $\rho_o = 1{,}225$ kg/m^3 .-Ferner soll die Zustandsänderung bei zunehmender Höhe mit dem Polytropenexponenten $n = 1{,}235$ beschrieben werden,und zwar gültig für die Troposphäre: $0 \leq h < 11\,000$ m .-Man bestimme nun in Abhängigkeit zunehmender Höhe h :

a) den Druckverlauf p (h) ;
b) den Temperaturverlauf T (h) ;
c) den Dichteverlauf ρ (h) ;
d) die Schallgeschwindigkeit c_s (h) .

Lösungen:

a) p = f (h) :

Die Integration der Druckformel,Gl.(10-3),verlangt zunächst die vollständige Beschaffung des Integranden,in dem für ρ die Polytropenzustandsgleichung nach Gl.(3-16) eingesetzt wird:

$$\varrho = \varrho_o . (p/p_o)^{1/n}. \qquad (1);$$

eine einfache Potenz-Integration führt zu:

$$p = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_o}{\varrho_o} \cdot \left[(p/p_o)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] .$$

Da außerdem

$$g.(z_1 - z_2) = - h.g$$ ist, folgt weiterhin:

$$- g.h = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_o}{\varrho_o} \cdot \left[(p/p_o)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] \qquad (2).$$

Damit ergibt sich für die barometrische Höhenformel:

$$\boxed{p = p_o \cdot \left[1 - g. \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\varrho_o}{p_o} .h \right]^{\frac{n}{n-1}}} \qquad (10\text{-}4).$$

Angepaßt an die Zahlenwerte, erhält man als Gebrauchsformel in Pa, wenn man die Höhe in kohärenter Manier in m einsetzt:

$$\boxed{p = 1{,}014.10^5.(1 - 2{,}255.10^{-5}.h)^{5{,}2553}} \qquad (10\text{-}5).$$

b) T = f (h) :

Ersetzt man in Beziehung (2) den Ausdruck p_o / ϱ_o durch $R.T_o$ (vgl. Gl. 3-7 und 3-8) und p/p_o exp $(n - 1)/n$ durch das entsprechende Temperaturverhältnis (vgl.Gl. 3-16), so läßt sich daraus die thermometrische Höhenformel ableiten:

$$- g.h = \frac{n}{n-1} .R.(T - T_o) \quad .$$

Löst man diese Gleichung nach T auf, dann ergibt sich:

$$\boxed{T = T_o - g. \frac{n-1}{n.R} .h} \qquad (10\text{-}6).$$

In Anlehnung an die Zahlenwerte kann man folgende Gebrauchsgleichung verwenden mit h in m :

$$\boxed{T = 288 - 6{,}4947.10^{-3} .h} \qquad (10\text{-}7).$$

Der Faktor $6,4947.10^{-3}$ in K/m heißt Temperaturgradient der Atmosphäre.

c) $\varrho = f(h)$:

Analogerweise ergibt sich schließlich für den Dichteverlauf:

$$\boxed{\varrho = \varrho_o \cdot \left[1 - g \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{p_o}{\varrho_o} \cdot h\right]^{\frac{1}{n-1}}} \qquad (10\text{-}8).$$

Setzt man die ICAO-Werte ein,dann folgt:

$$\boxed{\varrho = 1,225 \cdot \left[1 - 2,255.10^{-5} \cdot h\right]^{4,255}} \qquad (10\text{-}9).$$

d) $c_S = f(h)$:

Differenziert man $p = p_o \cdot (\varrho/\varrho_o)^n$,was aus Beziehung (1) folgt, nach der Dichte ϱ ,dann bekommt man:

$$dp = p_o \cdot n \cdot (\varrho/\varrho_o)^{n-1} \cdot \frac{1}{\varrho_o} \cdot d\varrho = n \cdot R \cdot \underbrace{T_o \cdot (\varrho/\varrho_o)^{n-1}}_{\text{Gl.}(3\text{-}16)} \cdot d\varrho = n \cdot R \cdot T \cdot d\varrho \ .$$

$$dp/d\varrho = n \cdot R \cdot T \ .$$

Da die Schallgeschwindigkeit mit Gl.(3-1) berechnet werden kann,erhält man zunächst:

$$\boxed{c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\varrho}} = \sqrt{n \cdot R \cdot T}} \qquad (10\text{-}10).$$

Das ist aber die polytrope Schallgeschwindigkeit.Den Höheneinfluß bringt man jetzt mit Gl.(10-7) ins Spiel:

$$\boxed{c_s = \sqrt{n \cdot R \cdot \left(T_o - g \cdot \frac{n-1}{n \cdot R} \cdot h\right)}} \qquad (10\text{-}11).$$

In angepaßter Form ergibt sich:

$$\boxed{c_s = 287,7 \cdot \sqrt{n \cdot (1 - 22,551.10^{-6} \cdot h)}} \qquad (10\text{-}12).$$

Bemerkung:

Die Untersuchungen bezüglich der Stratosphäre sind einfacherer Art,

da bei den Zustandsänderungen näherungsweise die Isotherme $T = 216,5$ K benützt werden darf .

6. Beispiel

Ein kugelförmiger Ballon ist mit Helium gefüllt und möge während seines Fluges sein Startvolumen beibehalten, Bild 10-3. -Angaben:

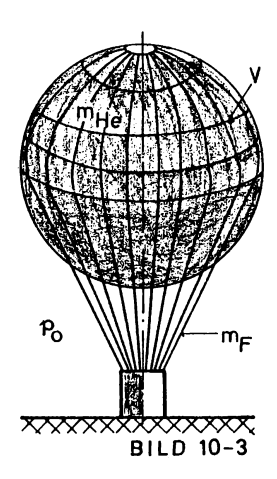


BILD 10-3

Gesamtmasse $m = 1000$ kg; Dichte des Heliums in Bodennähe $\varrho_{He,o} = 0,178$ kg/m^3; Luftdichte in Bodennähe $\varrho_{L,o} = 1,225$ kg/m^3. Man ermittle:

a) das minimale Startvolumen V_K für den Grenzfall, daß man keine Rückhaltekraft benötigt;

b) die dabei anfallende Helium- und Festkörpermasse m_{He} und m_F ;

c) die maximale Steighöhe h_{max}, wenn beim Start $\Delta m_F = 100$ kg herausgeworfen werden.

Lösungen:

a) V_K :

Im verlangten Grenzfall hält sich der aerostatische Auftrieb gerade das Gleichgewicht mit der gesamten Gewichtskraft:

Gl. (8-1): $F_{A,st} = \varrho_{\text{Gas der Umgebung}} \cdot g \cdot V_K = F_G$

$$\varrho_{L,o} \cdot g \cdot V_K = m_{ges} \cdot g$$

$$\underline{\underline{V_K}} = m_{ges} / \varrho_{L,o} = 1000/1,225 = \underline{\underline{816,33 \text{ m}^3}} \quad .$$

b) m_{He} und m_F :

Die Heliummasse berechnet sich in Bodennähe mit

$$\underline{\underline{m_{He}}} = \varrho_{He,o} \cdot V_K = 0,178 \cdot 816,33 = \underline{\underline{145,307 \text{ kg}}} \quad .$$

Die Differenz zur Gesamtmasse vor dem Start ergibt die Festkörpermasse:

$$\underline{\underline{m_F}} = m - m_{He} = 1000 - 145,307 = \underline{\underline{854,693\ kg}} \quad .$$

c) $\underline{h_{max}}$:

Nach dem Überbordwerfen von $\Delta\ m_F = 100$ kg Ballast, bleibt noch eine Festkörpermasse von

$$\underline{\underline{m_F'}} = m_F - \Delta\ m_F = 854,693 - 100 = \underline{\underline{754,693\ kg}} \quad \text{übrig.}$$

Nunmehr erhält man für die resultierende Steigkraft in einer beliebigen Steighöhe:

$$\boxed{F_S = F_{A,st} - F_G' = \rho_{L,h} \cdot g \cdot V_K - g \cdot (m_F' + m_{He}')} \ .$$

Während des Steigens wird die Heliummasse durch Ausströmen so eingeregelt, daß das Ballonvolumen laut Voraussetzung konstant bleibt.

$$F_S = \rho_{L,h} \cdot g \cdot V_K - \rho_{He,h} \cdot g \cdot V_K - g \cdot m_F' \quad ;$$

$$F_S = \rho_{L,o} \cdot g \cdot V_K \cdot \left(1 - \frac{\rho_{He,h}}{\rho_{L,h}}\right) \cdot \frac{\rho_{L,h}}{\rho_{L,o}} - g \cdot m_F' \quad .$$

Trifft man nun folgende Annahme, daß

$$\rho_{He,h} / \rho_{L,h} = \rho_{He,o} / \rho_{L,o}$$

gilt und setzt man für die Dichtevariation in Abhängigkeit von der Steighöhe die Gl.(10-8) ein, dann folgt:

$$\boxed{F_S = \rho_{L,o} \cdot g \cdot V_K \cdot \left(1 - \frac{\rho_{He,o}}{\rho_{L,o}}\right) \cdot (1 - 2,255 \cdot 10^{-5} \cdot h)^{4,255} - g \cdot m_F'} \quad .$$

Die maximale Steighöhe ist erreicht, wenn $F_S = 0$ ist :

$$1,225 \cdot 9,81 \cdot 816,33 \cdot \left(1 - \frac{0,178}{1,225}\right) \cdot (1 - 2,255 \cdot 10^{-5} \cdot h)^{4,255} - 9,81 \cdot 754,693 = 0;$$

$$\underline{\underline{h = 1127,9\ m}} \quad .$$

7. Beispiel

Ein Laborgerät, Bild10-4, besteht aus einem mit Wasser gefüllten Becher, der durch eine Membrane abgeschlossen ist. Im Becher befindet sich ein

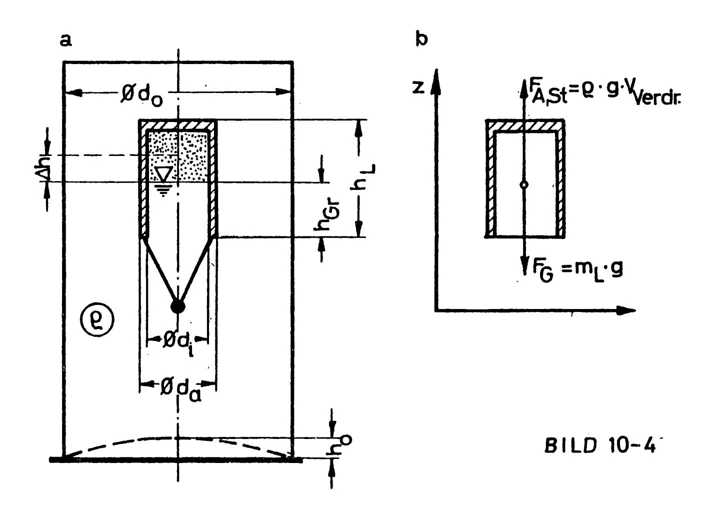


BILD 10-4

Schwimmer (Ludion),der teilweise mit Luft und teilweise mit Wasser ausgefüllt wird.Es ist auch noch ein tief liegendes Gewicht angebracht,damit das Ludion stabil schwebt.
Wenn die Membran nach oben gedrückt wird,gelangt zusätzliches Wasser in das Ludion,so daß die enthaltene Luft weiter komprimiert wird,das Verdrängungsvolumen abnimmt und das Ludion absinkt.
Wie groß sind die Grenzhöhe h_{Gr} und die Spiegeldifferenzzunahme Δh im Ludion,wenn die Membran in der Art einer Kugelkalotte nach oben gedrückt wird?

Lösung:

Gleichgewicht herrscht zunächst bei $F_{A,st} = F_G$:

$$\varrho \cdot g \cdot (\pi/4) \cdot \left[d_a^2 \cdot h_L + d_i^2 \cdot (h_L - h) \right] = g \cdot m_{Ludion}$$

Die Grenzhöhe h_{Gr} für den stabilen Schwebezustand errechnet sich damit :

$$h_{Gr} = \frac{m}{\varrho \cdot (\pi/4) \cdot d^2} - (d_a^2 / d_i^2 - 1) \cdot h_L \quad .$$

Dafür ist das Ludion ausgelegt.Wegen der Inkompressibilität des Wassers erhält man aus der Gleichheit der Volumina :

$$V_{KK} = (\pi/3).h_o^2.(\frac{3}{2}.d_o - h_o) = (\pi/4).d_i^2.\Delta h \quad ;$$

$$\Delta h = \frac{4}{3}.\frac{h_o^2}{d_i^2}.(\frac{3}{2}.d_o - h_o) \ .$$

Bei Entlastung steigt das Ludion wieder.

TEIL III : FLUIDDYNAMIK

11. GRUNDBEGRIFFE DER DYNAMIK VOLLKOMMENER FLUIDE

11.1. Definitionen und Klassifikationen

11.1.1. Allgemeines

Fluidgebiet

Darunter hat man sich einen Bereich vorzustellen,der von materiellen Punkten bei kontinuierlicher Verteilung eingenommen wird.Im Zustand der Bewegung besitzt jeder Punkt seine eigene Geschwindigkeit.
Die Strömungsgeschwindigkeit kann man sich im allgemeinen als eine stetige und eindeutige Funktion der Ortskoordinaten und der Zeit vorstellen: $\vec{c} = f(x;y;z;t)$.
Gilt $\vec{c} = f(x;y;z;t) \equiv 0$,so bleibt das Fluid in allen Punkten des Fluidgebiets in Ruhe.Das ist aber nach Abschn. 4 das Arbeitsgebiet der Fluidstatik.
Das Gegenteil $\vec{c} = f(x;y;z;t) \not\equiv 0$ ist nur selten anzutreffen,und das sogar in der Fluiddynamik,weil es bei umströmten Objekten immer Staupunkte gibt,die ja mit $\vec{c}_{SP} = f(x_S;y_S;z_S;t) = 0$ beschrieben werden.

Singuläre Punkte

Es handelt sich hierbei um Ausnahmestellen im Fluidgebiet,an denen die Geschwindigkeit null oder gar mehrdeutig ist.
Die geschwindigkeitsmäßige Beschreibung eines Fluidgebietes lautet allgemein:

$$\boxed{\vec{c} = f(x;y;z;t) \neq 0 \quad \text{mit} \quad \vec{c}_{SP} = f(x_S;y_S;z_S;t) = 0} \qquad (11\text{-}1).$$

Ideales Fluid

In der mathematischen Fluidmechanik wird ein Modellfluid den Betrachtungen zugrundegelegt,und zwar mit den Eigenschaften der Inkompressibilität und der Reibungsfreiheit (vgl. Abschn. 4 , 2.Arbeitsgebiet). In diesem Buch werden aber den Überlegungen natürliche Fluide vorangestellt (vgl.Abschn. 4, 3.Arbeitsbereich,und S. 331).

Vollkommenes Fluid

In zahlreichen Anwendungen lassen sich die Tangentialkräfte gegenüber den Druckkräften vernachlässigen.Ist das der Fall,dann spricht man von vollkommenen Fluiden.Das ist aber keine Eigenschaft des natürlichen Fluids,sondern eine Frage der Umstände,unter denen das natürliche Fluid eingesetzt wird (s.S. 331).

Reales Fluid

Sind die Tangentialkräfte gegenüber den Druckkräften nicht mehr zu vernachlässigen,dann hat man es mit den sogenannten realen Fluiden zu tun.
Die Bewegung der realen Fluide verläuft immer wie eine Stab- oder Kernwirbelbewegung.Man trifft auch Fälle an,wo sich das Fluidgebiet geschickterweise in zwei oder sogar drei verschiedene Betrachtungszonen einteilen läßt:

(1.) Zone der realen Fluide;
(2.) Zone der vollkommenen Fluide mit Potentialwirbelbewegung;
(3.) Zone der vollkommenen Fluide ohne Potentialwirbelbewegung.

In der Fluiddynamik,die auch Hydrodynamik genannt wird,hat sich wegen der Kompliziertheit realer Vorgänge folgende Betrachtungsweise durchgesetzt und bewährt:

> Die Vorgänge werden zuerst derart untersucht,als ob man es mit vollkommenen Fluiden zu tun hätte;danach werden Korrekturglieder und/oder Korrekturkoeffizienten angebracht!

In diesem Buch werden außerdem Kinematik (geometrische Bewegungslehre) und Dynamik gleichzeitig behandelt.Kinematik und Dynamik sind heutzutage unter dem Sammelbegriff Kinetik bekannt.

11.1.2. Strombahnen, Stromlinien, Stromfaden, Stromröhren

11.1.2.1. Theorie

Strombahnen

Wenn ein materieller Punkt sich bewegt, so beschreibt er eine geometrische Linie, die man seine Spur oder seine Bahn bzw. Strombahn nennt. Sie hat keine materielle Bedeutung. Die Zuordnung eines materiellen Punktes zu seiner Bahn zeigt Bild 11-1. Anschaulich könnte man die Strombahn auch als den Lebensweg eines materiellen Punktes im Fluidgebiet bezeichnen. Die Geschwindigkeitsvektoren $\vec{c}_1$ und $\vec{c}_2$ usw. sind immer tangential zur Strombahn gerichtet. Sie gehören zum selben materiellen Punkt P und unterscheiden sich voneinander nach dem Ort als Funktion der Zeit. - Analoges gilt für jeden weiteren Punkt des Fluidgebiets.

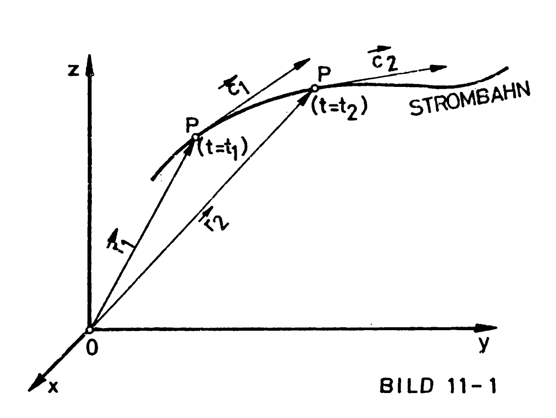


BILD 11-1

Aus der Gl. (9-1) folgen drei Differentialgleichungen für einen bestimmten Punkt:

$$dt = \frac{dx}{c_x(t)} \quad ; \quad dt = \frac{dy}{c_y(t)} \quad ; \quad dt = \frac{dz}{c_z(t)} \qquad (11\text{-}2).$$

Sie entsprechen einer dreifachen Unendlichkeit (∞^3), nämlich der Anzahl materieller Punkte, die Strombahnen beschreiben.
Die Integration führt zu folgenden Ergebnissen:

$$x = f_1(t) + K_1 \quad ; \quad y = f_2(t) + K_2 \quad ; \quad z = f_3(t) + K_3 \qquad (11\text{-}3).$$

Eliminiert man aus diesen drei algebraischen Gleichungen den Parameter t, dann erhält man zwei Gleichungen, die Raumflächen beschreiben:

$$\Phi_a(x,y,z) + Const_a = 0 \quad ; \quad \Phi_b(x,y,z) + Const_b = 0 \qquad (11\text{-}4).$$

Die Schnittkurve dieser beiden Raumflächen ist nun nichts anderes als die Strombahn des beobachteten materiellen Punktes P .
Nach der Lagrangeschen Betrachtungsweise,wo jeder einzelne Massenpunkt längs seiner Strombahn verfolgt wird,gelangt man sehr schnell zu grossen mathematischen Schwierigkeiten.Praxisnäher ist die Betrachtungsweise nach Euler.Er geht aus von dem Begriff der

Stromlinie.

Wenn alle materiellen Punkte eines Fluidgebiets in der Art einer kurz belichteten Fotografie beobachtet werden könnten,dann hinterliessen sie ein Feld strichartiger Spuren,was ihre kurzzeitige Bewegung anbetrifft,Bild 11-2.Jeder Punkt beschreibt einen kurzen Bahnbogen mit seiner ihm eigenen Geschwindigkeit $\vec{c}_i$ .Die Betrachtung des Spurenfeldes im Bild suggeriert einem geradezu,in der Richtungstendenz benachbarte Bahnabschnitte,die von lauter unterschiedlichen materiellen Punkten überstrichen worden sind,durch einhüllende Kurven (z.B.: A - B) miteinander zu verbinden.Solche Linien nennt man Stromlinien.
Sie erhalten folgende mathematische Beschreibung:
Zu jedem Bahnbogen $d\vec{r}_i$ gehört die lokale Geschwindigkeit $\vec{c}_i = d\vec{r}_i/dt$.
Die Stromlinie ist also die Einhüllende der Geschwindigkeitsvektoren,die sich auf benachbarte Bahnelemente beziehen.Die Parallelität von Strombahn und Geschwindigkeitsvektor kommt im folgenden Vektorprodukt zum Ausdruck:

$$(\vec{c}_i \times d\vec{r}_i) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ c_x & c_y & c_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = i \cdot (c_y \cdot dz - c_z \cdot dy) + j \cdot (c_z \cdot dx - c_x \cdot dz) + k \cdot (c_x \cdot dz - c_z \cdot dx) = 0 \qquad (11\text{-}5).$$

Da die Parallelität zwischen Bahn und Geschwindigkeitsvektor für jeden einzelnen Punkt der Stromlinie,und zwar für die Augenblicksaufnahme gedacht,gilt,entfällt der Einflußfaktor Zeit,und übrig bleiben nur die Beschreibungsgrößen des geänderten Ortsvektors und des Geschwindigkeitsvektors.Aus $tg\alpha = dy/dx = c_y/c_x$ usw. oder durch Nullsetzen der Komponentenklammern in Gl.(11-5) folgt:

$$dx_i \,/\, c_{xi} = dy_i \,/\, c_{yi} = dz_i \,/\, c_{zi} \qquad (11\text{-}6).$$

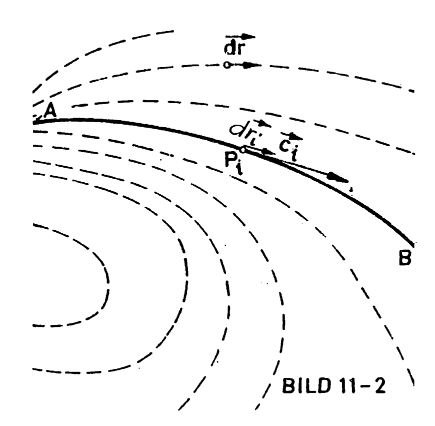


BILD 11-2

Daraus lassen sich für den materiellen Punkt P_i zwei Differentialgleichungen ableiten. Notiert man die Gl.(11-6) für den allgemeinen Punkt P ,dann erhält man die beiden Differentialgleichungen aller Stromlinien, welche sich in zusammengefaßter, fortlaufender Form folgendermaßen anschreiben lassen:

$$\boxed{\frac{dx}{c_x(x,y,z)} = \frac{dy}{c_y(x,y,z)} = \frac{dz}{c_z(x,y,z)}} \qquad (11\text{-}7).$$

Für die Stromlinienmenge verzeichnet man eine doppelte Unendlichkeit (∞^2).
Interessant ist eine zusammenfassende Gegenüberstellung der Beschreibungsgrößen von Strombahn und Stromlinie:

Strombahn	Stromlinie
1) Bezieht sich auf einen materiellen beweglichen Punkt;	1) Hierzu gehört eine einfach unendliche Anzahl materieller Punkte (∞^1);
2) wird im Laufe der Zeit von diesem materiellen Punkt beschrieben;	2) ist das Bild unendlich vieler, momentan ruhender materieller Punkte;
3) ist eine geometrische Linie;	3) ist eine substantielle Linie;
4) Anzahl der Bahnen ist eine dreifache Unendlichkeit (∞^3);	4) Anzahl der Stromlinien ist eine doppelte Unendlichkeit (∞^2);
5) drei Differentialgleichungen beschreiben die Strombahn;	5) zwei Differentialgleichungen beschreiben die Stromlinie;

6) die Geschwindigkeit des materiellen Punktes ist tangential zur Strombahn gerichtet;	6) die Geschwindigkeiten der Punkte einer Stromlinie sind tangential zur Stromlinie gerichtet.

Stationäre Strömung

Betrachtet man nach einiger Zeit wiederum das Strömungsgeschehen und stellt man das gleiche Stromlinienbild wie in Bild 11-2 fest, dann ist die Bewegung unabhängig von der Zeit;man spricht von einer stationärer Bewegung.Die Geschwindigkeit hängt damit in einem Fluidbereich nur vom Ortsvektor und nicht auch noch von der Zeit ab.

Instationäre Strömung

Hat sich die Konfiguration in Bild 11-2 geändert - sie ist auch unter dem Namen hydrodynamisches Spektrum bekannt - ,dann hängt die Bewegung im Fluidbereich vom Ortsvektor und der Zeit ab:

$$\boxed{\vec{c} = f\,(x,y,z,t)} \qquad (11\text{-}8).$$

Die zusammengefaßten zwei Differentialgleichungen für die Stromlinien lauten danach:

$$\boxed{\frac{dx}{c_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{c_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{c_z(x,y,z,t)}} \qquad (11\text{-}9).$$

Es tritt hier die Veränderliche t (Zeit) hinzu.

Stromfaden

In der stationären Strömung haben Strombahn und Stromlinie dieselbe geometrische Gestalt.Mehrere materielle Punkte laufen die Stromlinie entlang.Vom Gesichtspunkt der analytischen Geometrie her gesehen,überlagern sich die Bahn eines Einzelpunktes und die Stromlinie für viele Punkte.Diese gemeinsame Linie wird Stromfaden genannt.

Stromfläche

Mehrere Stromlinien zusammengenommen,bilden eine Stromfläche.Im Raum (R^3) kann man zwei Familien von Stromflächen haben.

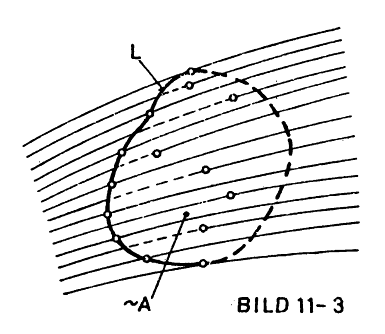


BILD 11-3

Stromröhre

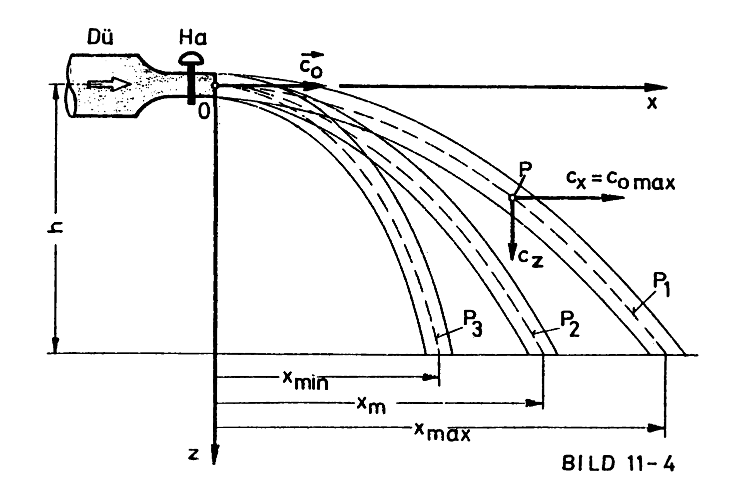
Im Fluidbereich greife man eine offene Fläche A heraus, Bild 11-3. Sie enthält unendlich viele Punkte (∞^2). Durch jeden Punkt verläuft eine ganz bestimmte Stromlinie. Die Gesamtmenge der Stromlinien bildet ein sogenanntes Stromrohr.
Die Fläche A wird von der geschlossenen Linie L begrenzt.
Alle Stromlinien, welche die Grenzlinie L treffen, bilden zusammen eine Rohroberfläche (Stromfläche!), welche die Rolle einer Grenzfläche bezüglich der Stromröhre übernimmt. In der mathematischen Fluidmechanik wird nur diese Grenzfläche in topologischer Hinsicht Stromröhre genannt; physikalisch aber gehören alle Stromlinien zum Stromröhrenbereich.
Bei instationären Strömungen ändern die Stromröhren in Abhängigkeit von der Zeit ständig ihre geometrische Gestalt.

Manchmal nennt man den Inhalt einer Stromröhre auch Stromfaden. Bedingung hierfür ist aber die Konstanz der Geschwindigkeit $\vec{c_i}(x,y,z,t)$ in der Fläche A .

11.1.2.2. Beispiel

Anhand eines umfassenden Beispiels mögen obige Definitionen veranschaulicht werden, Bild 11-4.
Aus einer Düse Dü fließt Wasser in horizontaler Richtung heraus. Der Öffnungsquerschnitt läßt sich mittels des Drehhahns Ha verändern. Ohne bereits an dieser Stelle auf Reibungseffekte genauer eingehen zu müssen, wird nur an die Erfahrungstatsache erinnert, daß sich wohl bei drei verschiedenen Ventilstellungen auch drei verschiedene Wasserstromröhren einstellen. Das bedeutet auch, daß die Düsenaustrittsgeschwindigkeiten ebenfalls drei verschiedene Werte annehmen (Bild 11-4).- Man bestimme:

a) die Weite x_{max}, bei welcher die Stromröhre P_1 den Boden trifft, wenn das Ventil ganz geöffnet ist; die dazugehörende Austrittsgeschwindigkeit heißt c_{omax} ;



b) die mittlere Weite x_m für die Stromröhre P_2 bei der Austrittsgeschwindigkeit c_{om} ;

c) die Weite x_{min} für P_3 ,wenn das Ventil weit zugedreht worden ist;die Austrittsgeschwindigkeit lautet hier dann c_{omin} ;

d) die jeweiligen Fallzeiten,bis ein Wasserteilchen nach Verlassen der Düse den Boden erreicht (T_1 ; T_2 ; T_3) ;

e) wegen der Stationarität der Fälle a) bis c) sind die Strombahnen identisch mit den Stromlinien : Stromfaden ! - Nun geht man dadurch zu einer instationären Strömung über,daß man die Austrittsgeschwindigkeit durch eine automatische Verstellvorrichtung am Ventil stetig verändert: $c_o = f\ (t) = c_{omax} - k.t$. Die Konstante in dieser linearen Funktion ermittle man für $t = T$ und $c_o = c_{omin}$.
Es ist die Gleichung der Strombahn eines materiellen Punktes anzugeben;

f) die drei Weiten x_{max} ; x_m ; x_{min} sowie die dazugehörenden Fallzeiten T_i ,wenn man folgende Zahlenangaben kennt: $c_{omax} = 1$ m/s und $c_{omin} = 0{,}8$ m/s sowie h = 1 m ;

g) die Gleichung der Strombahn eines materiellen Punktes mit den Angaben aus Punkt f).

<u>Lösungen</u>:

a) $\underline{x_{max}}$: Aufgrund der Superposition läßt sich die Momentangeschwindigkeit in einem beliebigen Punkt P mittels der

beiden Komponenten $c_x = c_{omax}$ und $c_z = g.t$ auffinden.

Parametergleichungen der Strombahn für t = 0 und x = 0 sowie z = 0 :

$$c_x = \frac{dx}{dt} = c_o \longrightarrow x = \int_0^t c_o.dt = c_o.t \qquad (1);$$

$$c_z = \frac{dz}{dt} = g.t \longrightarrow z = \int_0^t g.t.dt = \frac{1}{2}.g.t^2 \qquad (2) \quad .$$

Algebraische Bahngleichung:

Eliminiert man aus den Beziehungen (1) und (2) den Parameter t , dann ergibt sich die Parabelgleichung für die Strombahn:

$$z = 0{,}5.(g/c_o^2).x^2 \qquad (3).$$

Damit schreibt sich die Parabelgleichung P_1 mit $c_o = c_{omax}$ folgendermaßen an:

$$z = 0{,}5.(g/c_{omax}^2).x^2 \qquad (4) \quad .$$

Für z = h folgt dann ohne weiteres:

$$x_{max} = c_{omax} . \sqrt{2.h/g} \qquad (5) \quad .$$

b) x_m :

Sinngemäß berechnet sich diese Größe mittels (5) zu :

$$x_m = c_{om} . \sqrt{2.h/g} \qquad (6) \quad .$$

c) x_{min} :

Desgleichen ergibt sich hier :

$$x_{min} = c_{omin} . \sqrt{2.h/g} \qquad (7) \quad .$$

d) T_1 ; T_2 ; T_3 :

Die erforderlichen Fallzeiten T_i lassen sich einfach mit dem Zusammenhang :

$$T_i = x_{i,Boden} / c_{oi} \quad \text{für } i = max,m,min \qquad (8)$$

berechnen.Dabei fällt auf,daß alle drei Fallzeiten gleich groß sind:

$$T_1 = T_2 = T_3 = T = \sqrt{2.h/g} \qquad (9).$$

e) Gleichung der Strombahn im instationären Fall:

Zuerst bestimme man die Konstante k für die Gleichung,mit welcher die Austrittsgeschwindigkeit an der Düse bestimmt wird:

$$c_o = c_{omax} - k.t \qquad (10).$$

Also gilt laut Angaben:

$$k = (c_{omax} - c_{omin}) / T \qquad (11).$$

Damit schreibt sich die Beziehung (10) wie folgt an:

$$c_o = c_{omax} - (c_{omax} - c_{omin}).t / T \qquad (12).$$

Aus den Beziehungen (1) und (2) folgt mit (12) die Parameterdarstellung der Strombahn:

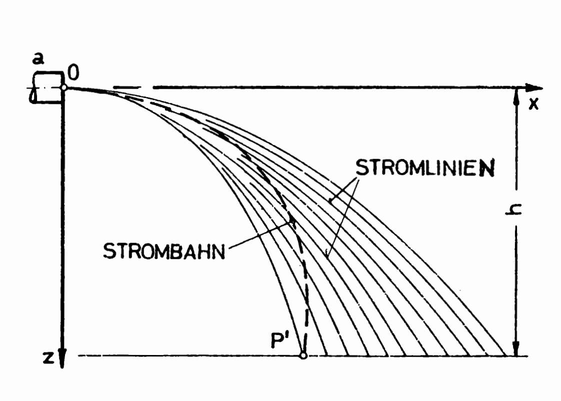
$$x = \left[c_{omax} - (c_{omax} - c_{omin}).t / T\right] .t \qquad (13) \text{ und}$$

$$z = 0,5 \ . \ g.t^2 \qquad (14) .$$

Würde man hierin den Parameter t eliminieren,dann bekäme man eine Hyperbel vierten Grades.Aus Gründen einfacher Weiterrechnung begnüge man sich mit der Parameterform.
Ein ausfließender materieller Punkt befindet sich nach der Zeit T in P' ,Bild 11-5.
Aus der Tatsache,daß ein elementarer Strombahnbogen mit einem elementaren Stromlinienbogen deckungsgleich ist,folgt,daß der bewegte Massenpunkt während seiner Bahn ständig eine andere Stromlinie berührt!-Das veranschaulicht besonders Bild 11-5,Pos. b,und zwar für den Fall,daß die Ventilverstellung in Stufen erfolgt,und nicht stetig wie vorher(Pos. a).
Macht man durch ein Kontrastmittel Wasserteilchen sichtbar,so läßt sich mittels einer Filmkamera die Strombahn feststellen.Die Beobachtungen erleichtert man sich durch Mitaufnahme einer hintergründigen Schirmbildrasterung.

f) x_{max} ; x_m ; x_{min} ; T_i :

Aus Beziehung (5) folgt:



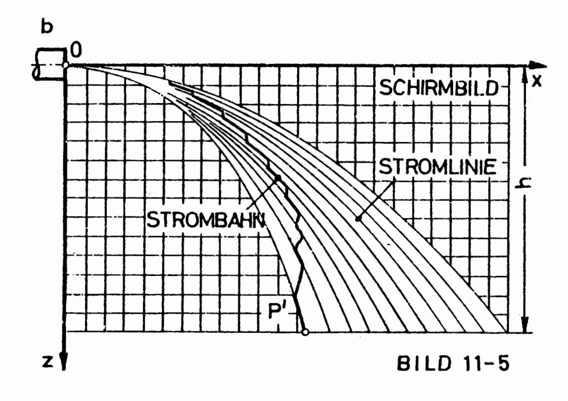


BILD 11-5

$x_{max} = 1.\sqrt{2.1/9,81}$

$x_{max} = 0,4515$ m ;

(12): für $t = T/2$ erhält man für c_{om} :

$c_{om} = 0,9$ m/s, womit sich ergibt:

(6): $x_m = 0,9.\ \sqrt{2.1/9,81}$

$x_m = 0,4064$ m ; ebenso:

(7): $x_{min} = 0,3612$ m.

(9): $T_i = T = \sqrt{2.1/9,81}$;

$T = 0,4515$ s .

g) Strombahngleichung für den Fall e) und f):

Wenn man die Angaben in (13) und (14) einsetzt, dann erhält man:

$$x = \left[1 - \frac{1 - 0,8}{0,4515}.t\right].t = (1 - 0,4430.t).t \quad (15).$$

Außerdem erhält man: $z = 0,5\ .\ g\ .\ t^2$ (16).

Auch hier begnüge man sich mit der Parameterdarstellung.

11.1.3. Beschleunigungen

11.1.3.1. Theorie

Aus der Festkörpermechanik kennt man die Beschleunigung als die zeitliche Änderung der Geschwindigkeit:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{c}\,(x,y,z,t) \qquad (11\text{-}10).$$

Dieser Ausdruck läßt sich mit Hilfe des totalen Differentials von $\vec{c}$ weiterentwickeln:

$$\vec{a} = \frac{\frac{\partial\vec{c}}{\partial t}.dt + \frac{\partial\vec{c}}{\partial x}.dx + \frac{\partial\vec{c}}{\partial y}.dy + \frac{\partial\vec{c}}{\partial z}.dz}{dt}$$

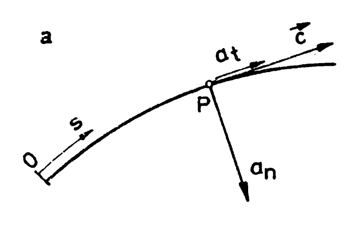
$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{c}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{c}}{\partial x}.c_x + \frac{\partial\vec{c}}{\partial y}.c_y + \frac{\partial\vec{c}}{\partial z}.c_z \qquad (11\text{-}11).$$

Der nur von der Zeit abhängige Beschleunigungsanteil $(\partial\vec{c}/\partial t)$ ist unter dem Begriff "Lokalbeschleunigung" bekannt.
Der nur vom Ort abhängige Beschleunigungsanteil heißt "konvektive Beschleunigung".
Die Beschleunigung $\vec{a}$ wird manchmal auch Totalbeschleunigung oder "substantielle Beschleunigung" genannt, weil die Stromlinie eine substantielle (materielle) Linie ist.
In der Gl.(11-11) könnte man rein formal $\vec{c}$ "ausklammern". Unter dem Restausdruck verstehe man einen "symbolischen Operator", der bei Multiplikation mit $\vec{c}$ zur substantiellen Beschleunigung führt:

$$\vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + c_x.\frac{\partial}{\partial x} + c_y.\frac{\partial}{\partial y} + c_z.\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{c} = \frac{\partial\vec{c}}{\partial t} + (\vec{c}.\nabla)\,\vec{c} \qquad (11\text{-}12).$$

Die Komponenten der Beschleunigung lauten bezüglich des kartesischen Koordinatensystems:

$$\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x.\frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y.\frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z.\frac{\partial c_x}{\partial z}\\
a_y &= \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x.\frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y.\frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z.\frac{\partial c_y}{\partial z}\\
a_z &= \frac{\partial c_z}{\partial t} + c_x.\frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y.\frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z.\frac{\partial c_z}{\partial z}
\end{aligned} \qquad (11\text{-}13).$$



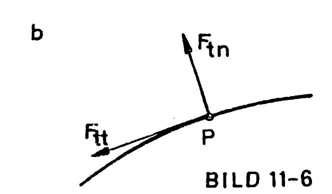


BILD 11-6

Führt man hier wie in Abschn. 9.1 die natürlichen Koordinaten ein (vgl. Gl. 9-11 und 9-12), Bild 11-6, dann ergibt sich für die Tangentialbeschleunigung (Pos. a) :

$$a_t = \frac{dc(s,t)}{dt} = \frac{\frac{\partial c}{\partial t}.dt + \frac{\partial c}{\partial s}.ds}{dt} = \frac{\partial c}{\partial t} + c.\frac{\partial c}{\partial s}$$

(11-14).

Für die Normalbeschleunigung erhält man in diesem Zusammenhang:

$$a_n = c^2 / R \qquad (11\text{-}15).$$

Unter R versteht man den Krümmungsradius der Bahn.
Die entsprechenden Massenträgheitskräfte (F_{tt} und F_{tn}) sind im Sinne des d'Alembertschen Prinzips den beiden Beschleunigungen entgegengesetzt gerichtet (Bild 11-6, Pos. b).

11.1.3.2. Beispiel

Allgemein gesprochen, kann sich ein Geschwindigkeitsvektor nach dem Betrag und der Richtung ändern. Bleiben beide Größen konstant, dann spricht man von einer gleichförmigen Bewegung, welche die Geradlinigkeit impliziert.
Bereits bei der Änderung nur einer Größe spricht man von einer ungleichförmigen Bewegung, die gleichmäßig oder ungleichmäßig beschleunigt/verzögert sein kann. An Hand der beiden Gl.(11-14) und (11-15) sowie der einschlägigen Definitionen soll eine Klassifikation der Bewegungsarten in groben Umrissen gegeben werden.

Lösung:

Wenn die Geschwindigkeit und die Beschleunigungsanteile verschiedene Werte annehmen, dann kann man folgende Einteilung vornehmen:

Geschwindigkeit	Beschleunigungen			
c	tangential: a_t		normal: a_n	Bezeichnungen
	lokal	konvektiv		
$c \equiv 0$	$\frac{\partial c}{\partial t} \equiv 0$	$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \equiv 0$	$a_n \equiv 0$	Ruhezustand
$c \equiv const$	$\frac{\partial c}{\partial t} \equiv 0$	$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \equiv 0$	$a_n \equiv 0$	gleichförmige Bew.: stationär
$c \equiv const$	$\frac{\partial c}{\partial t} \equiv 0$	$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \equiv 0$	$a_n \equiv const$	ungleichförmige Bew.; gleichmäßig beschl. Kreisbewegung bei konst. Umfangsgeschw.: stationär
$c \equiv const$	$\frac{\partial c}{\partial t} \equiv 0$	$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \equiv 0$	$a_n \not\equiv const$	ungleichförmige, krummlinige Bewegung: stationär
$c \not\equiv const$	$\frac{\partial c}{\partial t} \equiv 0$	$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \not\equiv 0$	$a_n \equiv 0$	ungleichförmige, geradlinige Bewegung: stationär
$c \not\equiv const$	$\frac{\partial c}{\partial t} \not\equiv 0$	$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \equiv 0$	$a_n \not\equiv 0$	ungleichförmige, krummlinige Bewegung bei $c(s) = const$, aber $c(t) \neq const$: instationär
$c \not\equiv const$	$\frac{\partial c}{\partial t} \not\equiv 0$	$c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \not\equiv 0$	$a_n \not\equiv 0$	ungleichförmige, allgemeinste Bewegung: instationär .

11.2. Kontinuitätsbedingung

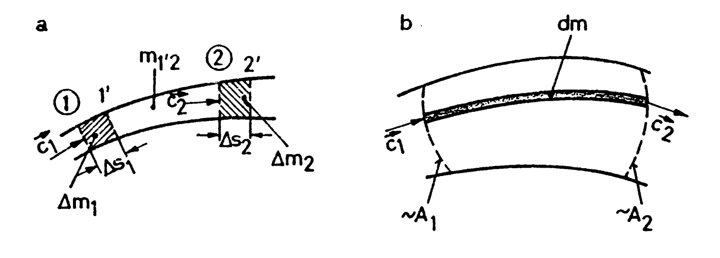
11.2.1. Für Stromröhre bei stationärer Strömung

Relativ kleiner Strömungsquerschnitt (Stromfaden)

Ein Kontrollvolumen (Kontrollraum) befinde sich in einer dünnen Stromröhre zwischen den Kontrollebenen (Strömungsquerschnitten) 1 und 2, Bild 11-7,Pos. a.Nach dem Zeitintervall Δt befinden sich die materiellen Punkte der Kontrollebene 1 nun in 1' und diejenigen von 2 in 2' .Wegen der Massenerhaltung in den Kontrollräumen 12 und 1'2' gilt $m_{12} = m_{1'2'}$ .Versteht man unter Δm_1 die im Zeitintervall Δt in den Kontrollraum 1'2' eingeströmte Masse und unter Δm_2 die im selben Zeitintervall aus dem Kontrollraum 12 ausgetretene Masse,dann gilt auch:

$$m_{12} = \Delta m_1 + m_{1'2} = m_{1'2'} = m_{1'2} + \Delta m_2 \quad .$$

Daraus ergibt sich,weil die Masse $m_{1'2}$ beiden Kontrollräumen eigen ist: $\Delta m_1 = \Delta m_2$.-Mit Hilfe der Querschnitte A_1 und A_2 ,den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 (konstante Verteilung über die Querschnitte vorausgesetzt) und den Dichten ϱ_1 und ϱ_2 (ebenfalls gleiche Verteilung über die Querschnitte vorausgesetzt) erhält man:



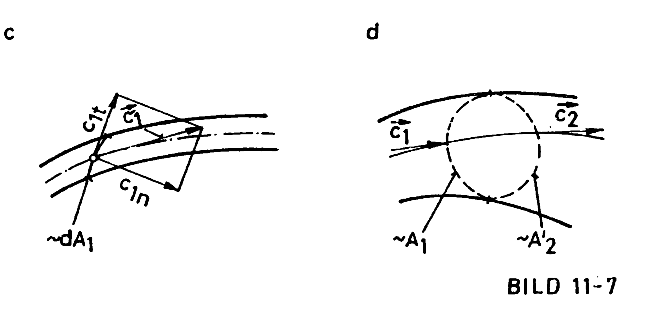


BILD 11-7

$$\varrho_1 \cdot \Delta V_1 = \varrho_2 \cdot \Delta V_2$$

$$\varrho_1 \cdot A_1 \cdot \Delta s_1 = \varrho_2 \cdot A_2 \cdot \Delta s_2$$

$$\varrho_1 \cdot A_1 \cdot c_1 \cdot \Delta t = \varrho_2 \cdot A_2 \cdot c_2 \cdot \Delta t \quad .$$

Kürzt man diesen Ausdruck mit Δt ,dann erhält man die Kontinuitätsgleichung für ein dünnes Stromrohr bei stationärer Strömung und senkrecht auf dem Strömungsquerschnitt stehendem Geschwindigkeitsvektor:

$$\boxed{\varrho_1 \cdot A_1 \cdot c_1 = \varrho_2 \cdot A_2 \cdot c_2 = \varrho \cdot A \cdot c = \text{const}} \qquad (11\text{-}16).$$

Das gesamte Produkt heißt Massenstrom und wird in kg/s gemessen:

$$\boxed{\dot{m} = \varrho \cdot A \cdot c} \qquad (11\text{-}17).$$

Verzweigt sich ein Stromrohr,Bild 11-8,Pos. a,dann ist der Anfangsmassenstrom gleich der arithmetischen Summe der Zweigmassenströme:

$$\dot{m} = \dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 \quad .$$

Der Beweis folgt aus der Anschauung bezüglich der Massenstrombilanz am Kontrollraum K .

Werden mehrere Massenströme zusammengeführt (Bild 11-8,Pos. b),dann lautet sinngemäß der gesamte Endmassenstrom:

$$\dot{m}_4 + \dot{m}_5 + \dot{m}_6 = \dot{m} \quad .$$

Hat man es mit mehreren zu- und abfließenden Massenströmen zu tun, liegt also eine Art "Knotenpunkt" vor,dann gilt doch (Bild 11-8,Pos. c):

$$\dot{m}_1 + \dot{m}_2 + \dot{m}_3 = \dot{m} = \dot{m}_4 + \dot{m}_5 + \dot{m}_6 \quad .$$

Die algebraische Gesamtsumme der Massenströme führt aber zur berühmten Kirchhoffschen "Knotenpunktsregel",die sowohl in der Fluidmechanik als auch in der Elektrotechnik gilt:

$$\boxed{\sum \dot{m}_i = 0} \qquad (11\text{-}18).$$

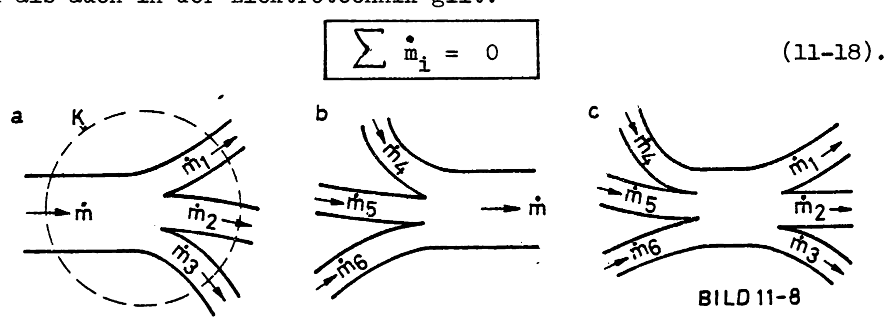


BILD 11-8

Der Massenstrom ist nach Gl.(11-17) mit Hilfe der örtlichen Absolutgeschwindigkeit zu Recht gebildet worden. Berücksichtigt man in diesem Zusammenhang nun Gl.(9-7), den ersten Satz von Coriolis, so folgt auch der vektoriellen Schreibweise wegen nach Orientierung der Fläche dA mittels eines Normalenvektors $\vec{n}$:

$$\dot{m} = \varrho \cdot A \cdot c = \varrho \cdot \int_{(A)} \vec{n} \cdot \vec{c} \cdot dA = \varrho \cdot \int_{(A)} \vec{n} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) \cdot dA \quad ;$$

die Dichte ϱ darf unter der Annahme konstanter Dichteverteilung vor das Integral gesetzt werden. Die weitere Aufgliederung des Integranden führt zu nachstehendem Ausdruck:

$$\dot{m} = \underbrace{\varrho \cdot \int_{(A)} \vec{n} \cdot \vec{v} \cdot dA}_{\dot{m}_F} + \underbrace{\varrho \cdot \int_{(A)} \vec{n} \cdot \vec{w} \cdot dA}_{\dot{m}_r} \qquad (11\text{-}19).$$

$\dot{m}_F$ entspricht dem Anteil an Massenstrom aufgrund der Fahrzeugbewegung, $\dot{m}_r$ ist der relative Massenstrom, gemessen mittels der Relativgeschwindigkeit.

Auf diesen Zusammenhang wird besonders in Abschn. 12.2 , 12.3 und 19 (Beispiele aus dem Gebiet der Strömungsmaschinen) eingegangen werden.

Für ein inkompressibles Fluid: $\varrho\,(x,y,z) \equiv \text{const} \rightarrow \varrho_1 = \varrho_2 = \varrho$, vereinfacht sich die Kontinuitätsgleichung (Gl. 11-16) zu:

$$A_1 \cdot c_1 = A_2 \cdot c_2 = A \cdot c = \text{konst} \qquad (11\text{-}20),$$

wobei man das Produkt Volumenstrom nennt; er wird in m^3/s gemessen:

$$\dot{V} = A \cdot c \qquad (11\text{-}21).$$

Die Stromröhre verhält sich in diesem Unterabschnitt wie ein Stromfaden.

Bemerkung:

In der klassischen Mechanik (Newton) bleibt die Masse eines bewegten Körpers konstant. In der relativistischen Mechanik (Einstein) wird zwischen der Ruhemasse m_o und der bewegten Masse m_b unterschieden. Mit Hilfe des Lorentz-Faktors $\sqrt{1 - c^2/c_L^2}$ entsteht folgender Zusammenhang:

$$\boxed{m_b = m_o \; / \; \sqrt{1 - c^2/c_L^2}} \qquad (11\text{-}22).$$

Es bedeutet $c_L = 300.10^6$ m/s die Lichtgeschwindigkeit. In der Fluidmechanik sind die Geschwindigkeiten sehr viel kleiner als c_L.-
Die notwendige Höchstgeschwindigkeit in der Raumfahrt beträgt beispielsweise $c = 11,2.10^3$ m/s ,auch als zweite kosmische Geschwindigkeit bekannt. Der Korrekturfaktor ist hierbei $\sqrt{1 - 1,395.10^{-9}} \approx 1$, der die Annahme konstanter Masse - ohne Abbrand natürlich - zuläßt. Meteore können noch höhere Geschwindigkeiten erreichen, aber infolge der Erhitzung sind Dissoziationsprozesse vorhanden, so daß das Fluid in die Plasmaphase überwechselt.

Relativ großer Strömungsquerschnitt

In Bild 11-7, Pos. b, ist eine relativ dicke Stromröhre gezeigt. Krumme Querschnittsflächen A_1 und A_2 begrenzen den Kontrollraum. Aus ihm greife man einen differentiellen Stromfaden von der Masse dm heraus, und zwar im Sinne des Masseninhaltes einer differentiellen Stromröhre.
Hier gilt für die im Zeitintervall dt eintretende Masse dm_1 und die austretende Masse dm_2 gleichfalls: $dm_1 = dm_2$. Da die Geschwindigkeit $\vec{c}_1$ nicht senkrecht auf dem krummen Querschnittsflächenelement dA_1 steht, empfiehlt sich eine Komponentenaufteilung normal und tangential zu dA_1 (Bild 11-7, Pos. c).
Die Tangentialkomponente c_{1t} kann zum Massenstrom nichts beitragen; nur die Normalkomponente c_{1n} ist dazu in der Lage. Mit Hilfe eines Normalenvektors erhält man dann für die Kontinuitätsgleichung in der allgemeingültigen Form:

$$\boxed{\dot{m} = \int d\dot{m} = \int_{(A_1)} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA = \int_{(A_2)} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA} \qquad (11\text{-}23).$$

Bei inkompressibler Strömung (ϱ = const) folgt vereinfachend wegen

der Dichtekonstanz für den Volumenstrom:

$$\dot{V} = \int_{(A)} d\dot{V} = \int_{(A_1)} \vec{n}.\vec{c}.dA = \int_{(A_2)} \vec{n}.\vec{c}.dA \qquad (11\text{-}24).$$

11.2.2. Für Volumenbereich bei stationärer Strömung

Die krummen Querschnittdflächen A_1 und A_2' mögen derart zusammenrücken,daß sie eine geschlossene Fläche A bilden (Bild 11-7,Pos. d). Hier gilt nun in Anlehnung an Gl.(11-23) für den Massenstrom:

$$\dot{m}_1 = \int_{(A_1)} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA = \dot{m}_2' = \int_{(A_2')} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA \qquad \text{oder:}$$

$$\int_{(A_1)} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA - \int_{(A_2')} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA = \oint_{(A)} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA = 0 \qquad (11\text{-}25).$$

Analogerweise gilt im inkompressiblen Fall (ϱ = const) für den Volumenstrom:

$$\int_{(A_1)} \vec{n}.\vec{c}.dA - \int_{(A_2')} \vec{n}.\vec{c}.dA = \oint_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA = 0 \qquad (11\text{-}26).$$

$$\text{mit } A = A_1 + A_2'$$

Die zweite Integralformel von Gauß heißt:

$$\oint_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA = \int_{(V)} \text{div } \vec{c}.dV \qquad (11\text{-}27).$$

Damit läßt sich die Kontinuitätsbedingung im inkompressiblen Fall, dargestellt durch die Gl.(11-26),auch noch anschreiben:

$$\text{div } \vec{c} = 0 \qquad (11\text{-}28).$$

Man versteht unter der DIVERGENZ von $\vec{c}$: $\text{div}\,\vec{c} = \nabla . \vec{c}$ das skalare Produkt des Symbolvektors

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j.\frac{\partial}{\partial y} + k.\frac{\partial}{\partial z}$$

mit dem Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{c} = i.c_x + j.c_y + k.c_z$$

. Das ergibt schließlich:

$$\nabla.\vec{c} = \text{div}\,\vec{c} = (i.\frac{\partial}{\partial x} + j.\frac{\partial}{\partial y} + k.\frac{\partial}{\partial z}).(i.c_x + j.c_y + k.c_z) = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{\partial c_z}{\partial z} = 0 \qquad (11\text{-}29).$$

Die Kontinuitätsbedingung für den kompressiblen Fall erhält man dadurch,daß die zweite Integralformel von Gauß in der Gl.(11-25) auf den Vektor $(\varrho . \vec{c})$ angewendet wird.

$$\oint_{(A)} \varrho.\vec{n}.\vec{c}.dA = \oint_{(A)} \vec{n}.(\varrho . \vec{c}).dA = \int_{(V)} \nabla.(\varrho.\vec{c}).dV = \int_{(V)} \text{div}(\varrho.\vec{c}).dV = 0 \qquad (11\text{-}30).$$

Daraus folgt einfach:

$$\nabla.(\varrho.\vec{c}) = \text{div}\,(\varrho.\vec{c}) = 0 \qquad (11\text{-}31).$$

Hier ist auch:

$$\nabla.(\varrho.\vec{c}) = (\nabla.\varrho).\vec{c} + \varrho.(\nabla.\vec{c}) \quad \text{oder}$$

$$\nabla.(\varrho.\vec{c}) = \vec{c}.\,\text{grad}\,\varrho + \varrho.\text{div}\,\vec{c} = 0 \qquad (11\text{-}32).$$

Die Integrationsgebiete in der Gl.(11-27) sind durch die gesamte Grenzfläche A und durch den Kontrollraum V vorgegeben.Für weitere

Anwendungen ist die Gl.(11-29) wichtig !

11.2.3. Stromfunktion von Stokes

Man betrachte nun eine ebene Fluidbewegung.Hier liegen in allen Parallelebenen ε_1, ε_2, ε_3 usw.,Bild 11-9,gleiche Zustände und Bewegungsverhältnisse vor.Demnach sind die partiellen Ableitungen aller physikalischen Größen in der z-Richtung identisch null.Unter anderem ist also auch die Geschwindigkeitskomponente $c_z \equiv 0$. Somit reduziert sich die Kontinuitätsgleichung für eine ebene und inkompressible Strömung nach Gl.(11-28) zu:

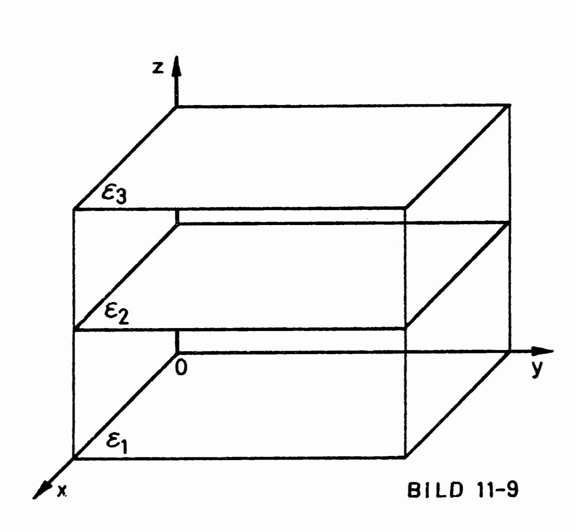


BILD 11-9

(1) $$\operatorname{div} \vec{c} = \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0.$$

Weiterhin schrumpfen die beiden Differentialgleichungen für die Stromlinien nach Gl.(11-7) auf eine zusammen:

(2) $$dx \,/\, c_x(x,y) = dy \,/\, c_y(x,y)$$ .Diese Dgl. wird umgeformt:

(3) $$-\, c_y . dx + c_x . dy = 0$$. Man könnte sie in geeigneter Weise integrieren,wenn das totale Differential $d\psi$ einer Funktion ψ vorläge:

(4) $$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} . dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} . dy = -\, c_y . dx + c_x . dy = 0$$. - Dabei wäre:

(5) $$\boxed{c_y = -\partial\psi/\partial x \quad \text{und} \quad c_x = \partial\psi/\partial y} \qquad (11\text{-}33).$$

Die Beziehungen (4) und (5) haben ihre Richtigkeit,wenn nach dem Satz

von L.Schwartz die gemischten Ableitungen gleich sind:

$$(6)\quad \boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial x . \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)} \qquad (11\text{-}33\ a).$$

Prüft man (4) mit Hilfe von (6) nach,dann ergibt sich:

$$(7)\quad \frac{\partial}{\partial x}(+\,c_x) = \frac{\partial}{\partial y}(-\,c_y)$$.- Daraus folgt: $\frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0.$

Diese Beziehung ist aber in Ordnung,wenn die Kontinuitätsgleichung nach (1) erfüllt wird:

Immer wenn die Kontinuitätsbedingung erfüllt ist,existiert eine Funktion ψ.

Aus $d\psi(x,y) = 0$ folgt sofort:

$$\boxed{\psi\,(x,y) = \text{Konst}} \qquad (11\text{-}33b\ ).$$

Diese Gleichung beschreibt eine Stromlinienschar,und ψ wird Stromfunktion genannt.Jeder Stromlinie entspricht eine andere Konstante. Die Stromfunktion ψ besitzt eine aufschlußreiche physikalische Bedeutung,Bild 11-10:

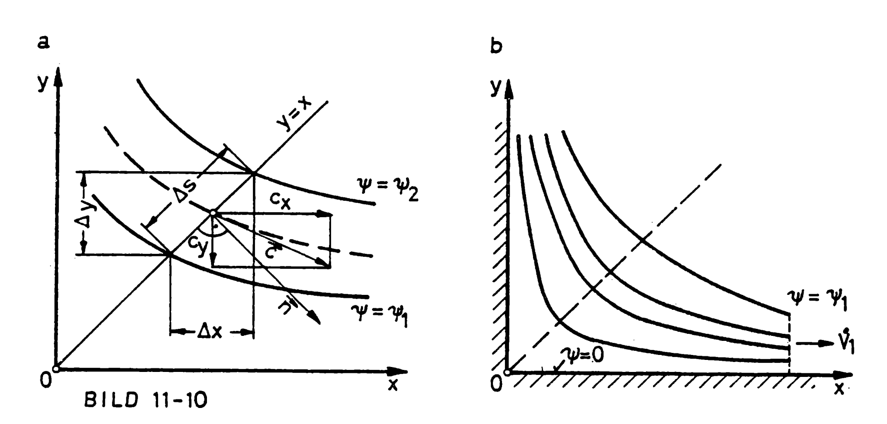


BILD 11-10

Die Differenz parametrischer Werte der Stromfunktion $\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ entspricht gerade dem Volumenstrom,der zwischen den beiden Stromlinien hindurchfließt.

Beweis:

Zwei benachbarte Stromlinien $\psi = \psi_1$ und $\psi = \psi_2$ werden von der Geraden $y = x$ geschnitten(Bild 11-10,Pos. a).Betragsmäßig gilt bei einer Tiefe von 1 m (senkrecht auf der Bildebene gerechnet) für den Teilvolumenstrom $\Delta\dot{V}$,welcher zwischen den beiden Stromlinien aufgrund der Komponentenanteile hindurchströmt:

$$(8) \qquad \Delta \dot{V} = \vec{n}.\vec{c}.\Delta s = |c_y| . \Delta x + |c_x| . \Delta y \quad .$$

Beziehung (4) kann auch mit endlichen Differenzen angeschrieben werden:

$$(9) \qquad \Delta\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} . \Delta x + \frac{\partial \psi}{\partial y} . \Delta y \quad \text{oder:} \quad \Delta\psi = -c_y . \Delta x + c_x . \Delta y .$$

Vergleicht man nun (8) mit (9),dann fällt sofort auf,daß

$$\Delta \dot{V} = \Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$$

ist!-Wenn man auch eine feste Wand mit einer Stromlinie identifiziert, sie also gleichfalls mit einer Stromfunktion beschreibt (Bild 11-10, Pos. b),dann kann man dem parametrischen Wert einer Stromfunktion folgende anschauliche Bedeutung abgewinnen:

> Der parametrische Wert einer Stromlinie $\psi = \psi_1$ gibt an,welcher Teilvolumenstrom zwischen einer festen Orientierungswand und der Stromlinie selbst hindurchströmt ($\dot{V}_1 = \psi_1$).
> Insofern ist nunmehr die Bedeutung von $\Delta\psi$ augenfällig.
>
> Für $\psi_1 \rightarrow 0$,geht $\dot{V}_1 \rightarrow 0$;damit lautet die Gleichung der Grenzlinie (feste Wand): $\psi(x,y) = 0$.

Die Ableitung der Stromlinie ergab sich zwar aus einer Betrachtung der ebenen Strömung.Es ist aber einzusehen,daß im Raume analoge Zusammenhänge bestehen werden.Man denke nur an eine Körperumströmung im Raume.Hier werden keine Stromlinien den Fluidbereich ordnen helfen, sondern Stromflächen,zwischen denen sich Teilvolumenströme bewegen werden.

11.2.4. Kontinuitätsbedingung bei instationärer Strömung

Stromröhre von relativ kleinem Querschnitt (Stromfaden)

In Bild 11-11 sind für ein dünnes Stromrohr Angaben für den instationären Fall gemacht worden.

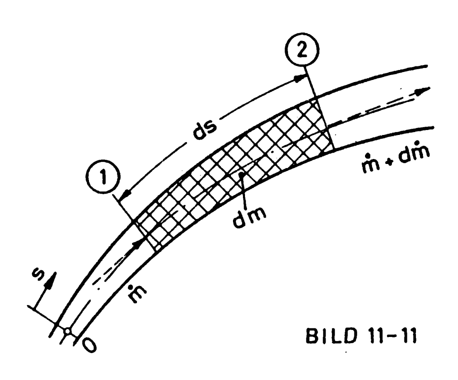


BILD 11-11

Wenn in die Kontrollebene 1 der Massenstrom $\dot{m}$ eintritt und den Kontrollraum in der Kontrollebene 2 mit der Größe $(\dot{m} + d\dot{m})$ verläßt, dann muß der Masseninhalt dm des Kontrollraumes eine zeitliche Abnahme zu verzeichnen haben, was in folgender Bilanz zum Ausdruck kommt:

$$\frac{\partial \dot{m}}{\partial s} . ds = - \frac{\partial}{\partial t}(dm) \quad .$$

Entwickelt man diesen Ausdruck bei Anwendung von Gl.(11-17) weiter, so zeigt sich:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho . A . c) . ds + \frac{\partial}{\partial t}(\rho . A . ds) = 0 \quad .$$

Nach Kürzung durch ds heißt die Kontinuitätsgleichung bei instationärer Strömung bezüglich einer Stromröhre relativ kleinen Querschnitts:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}(\rho . A . c) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho . A) = \frac{\partial}{\partial s}(\rho . \dot{V}) + \frac{\partial(\rho . A)}{\partial t} = 0} \qquad (11\text{-}34).$$

Im Falle der Inkompressibilität kann ρ gekürzt werden. Es bleibt dann:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}(A . c) + \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{\partial \dot{V}}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0} \qquad (11\text{-}35).$$

Stromröhre von relativ großem Querschnitt

In Gl.(11-34) sind Dichte und Geschwindigkeit jeweils konstant über der Fläche anzunehmen. Dies gilt natürlich bei einem relativ großen Querschnitt A nicht mehr. Vielmehr sind die obigen Klammerausdrücke, wie z.B. in Gl.(11-34), als Flächenintegrale zu bestimmen:

$$\frac{\partial}{\partial s}\int_{(A)} \rho . \vec{n} . \vec{c} . dA + \frac{\partial}{\partial t}\int_{(A)} \rho . dA = 0 \quad .$$

Der zweite Term wird nun folgendermaßen umgeformt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{(A)} \varrho \;.dA = \int_{(A)} \frac{\partial}{\partial t}(\varrho .dA) = \int_{(A)} \frac{\partial \varrho}{\partial t}.dA + \underbrace{\int_{(A)} \varrho . \frac{\partial (dA)}{\partial t}}_{= \int_{(A)} d(\varrho . \frac{\partial A}{\partial t})} = 0 \;.$$

Somit ergibt sich:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\int_{(A)} \varrho \;.\vec{n}.\vec{c}.dA + \int_{(A)} \frac{\partial \varrho}{\partial t}.dA + \int_{(A)} d(\varrho . \frac{\partial A}{\partial t}) = 0} \qquad (11\text{-}36).$$

Diese Gleichung vereinfacht sich im inkompressiblen Fall zu:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial s}\int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA + \frac{\partial A}{\partial t} = 0} \qquad (11\text{-}37).$$

Im Volumenbereich

In Abschn. 11.2.2 ist die Kontinuitätsbedingung für den Volumenbereich stationärer Strömungen abgehandelt worden.Die Massenstrombilanz war null,weil ein- und austretender Massenstrom gleich groß waren. Ist aber z.B.der austretende Massenstrom größer als der eintretende bezüglich des Kontrollraumes,dann muß sich die Masse im Kontrollraum verringert haben,denn die Massenerhaltung im Kontrollbereich muß ja gewährleistet sein!
Dieser Sachverhalt läßt sich zusammen mit Gl.(11-30) folgendermaßen angeben:

$$\text{div}\;(\varrho .\vec{c}\;).dV = -\frac{\partial}{\partial t}(dm) = -\frac{\partial}{\partial t}(\varrho .dV) \qquad ;$$

nach Kürzung durch dV ergibt sich die Kontinuitätsgleichung für den Volumenbereich und instationäre Strömung:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{div}\;(\varrho .\vec{c}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \qquad \text{oder:} \quad \nabla(\varrho .\vec{c}) + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \\ &\text{oder:} \quad \varrho .\text{div}\,\vec{c} + \vec{c}.\text{grad}\,\varrho + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \end{aligned}} \qquad (11\text{-}38).$$

Für den Fall der Inkompressibilität und ständig voll ausgefülltem Kontrollvolumen entartet die letzte Gleichung zu $\operatorname{div} \vec{c} = 0$.
Das ist aber die Kontinuitätsgleichung nach Gl.(11-28) im stationären Strömungsfall.Mit anderen Worten: Eine instationäre Strömung im inkompressiblen Fall bei ständig ausgefülltem Kontrollvolumen ist unmöglich!

11.2.5. Beispiele

1.Beispiel

Die Geschwindigkeit einer gleichförmigen Fließbewegung beträgt $c = 2$ m/s und verläuft in Richtung der Geraden $x = y = z$,Bild 11-12.
Strömungsmedium ist Wasser.

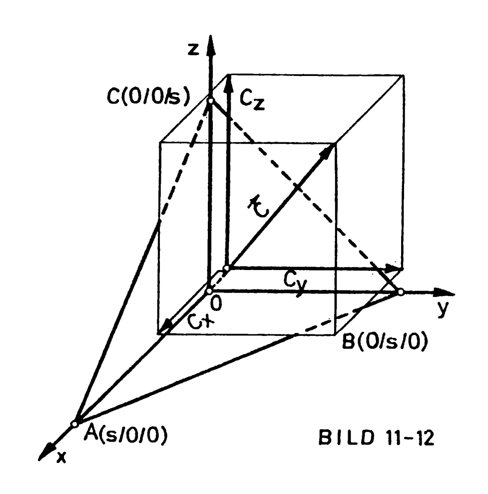


BILD 11-12

a) Man ermittle den Volumenstrom bezüglich der Dreiecksfläche ABC,die als Querschnitt eines Stromrohres figuriert (s = 1,5 m) und vergleiche
b) dieses Ergebnis mit der Summe der drei Volumenströme,welche den Tetraeder durch die drei Flächen OAB,OBC und OCA eintreten.
c) Schließlich ist das Ergebnis zu diskutieren.

Lösungen:

a) $\dot{V}$:

Charakteristik: stationär, geradlinig,inkompressibel,relativ großer Stromrohrquerschnitt.Deshalb gilt Gl.(11-24):

$$\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA = \int_{(A)} c.dA = c \cdot A_{ABC} .$$

Die Fläche A berechnet sich folgendermaßen:

$$A_{ABC} = 0{,}5.s.\sqrt{2}.h_{AB} = 0{,}5.\sqrt{2}.\sqrt{(s.\sqrt{2})^2 - \left(\frac{s.\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.s^2 .$$

In Zahlen folgt: $\underline{\underline{\dot{V}}} = 2.\frac{1.5^2}{2}.\sqrt{3} = \underline{\underline{3{,}897\ m^3/s}}$.

b) $\underline{\dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z}$: $\dot{V}' = \dot{V}_x + \dot{V}_y + \dot{V}_z = A_{yz}.c_x + A_{zx}.c_y + A_{xy}.c_z$;

ferner gilt:

$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = \sqrt{3.c_x^2} \longrightarrow c_x = c_y = c_z = \frac{c}{\sqrt{3}}$ und

$A_{yz} = A_{zx} = A_{xy} = s^2/2$. Daraus folgt jetzt:

$\underline{\underline{\dot{V}'}} = 3 . \frac{c}{\sqrt{3}} . \frac{s^2}{2} = 3.2.1{,}5^2/(\sqrt{3}.2) = \underline{\underline{3{,}897\ m^3/s}}$.

Man stellt die Gleichheit beider Ergebnisse fest.

c) Diskussion der Ergebnisse:

In vielen Fällen ist die Zerlegung des Volumenstrom-Integrals in drei einfachere Integrale viel bequemer. Bildet man in dem Ausdruck $\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA$ das Skalarprodukt des Normalenvektors nach Gl.(7-2) mit dem Geschwindigkeitsvektor $\vec{c}$,dann erhält man zum Integrieren einen sehr komplizierten Ausdruck. Es fallen dabei aber die Richtungskosinuswerte auf, so daß man $dA.\cos\alpha$, $dA.\cos\beta$ und $dA.\cos\gamma$ bilden kann, was eben zur vereinfachten Berechnungsmethode des Volumenstroms führt:

$$\boxed{\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA = \int_{(A_{yz})} c_x.dA + \int_{(A_{zx})} c_y.dA + \int_{(A_{xy})} c_z.dA} \qquad (11\text{-}39).$$

2. Beispiel

In einem Großwasserbecken ist die Eckenströmung zu untersuchen, Bild 11-13.

Abmessungen: s = AA' = AA" = 2 m ; H = AB = 1,5 m. - Es handelt sich um eine ebenes Problem mit den Geschwindigkeiten $c_A = c_B = 0{,}5$ m/s.

Die Geschwindigkeitsabhängigkeit in radialer Richtung heißt:

$c = K . r$! - Man ermittle:

a) den Volumenstrom in der Ebene OABC;

b) Existenznachweis und Herleitung der Stromfunktion Ψ ;

c) die Kontrolle des Volumenstroms mittels der Stromfunktion.

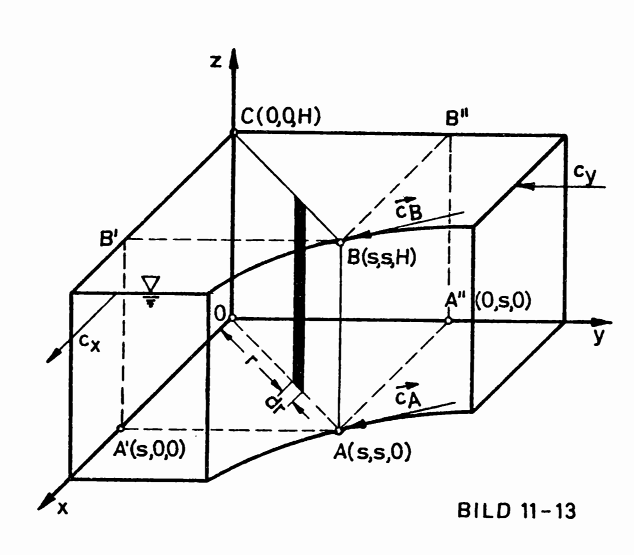


BILD 11-13

Lösungen:

a) $\dot{V}$:

Zunächst bestimme man die Konstante K in der angegebenen Gleichung für die Geschwindigkeitsverteilung. In A gilt beispielsweise:

$0{,}5 = K.s.\sqrt{2}$; also:

$K = 0{,}1768 \ 1/s$.

Aus Gl.(11-24) und dem Flächendifferential $dA = H.dr$ folgt:

$$\dot{V} = \int_{(A)_{OABC}} \vec{n}.\vec{c}.dA = \int_0^{s.\sqrt{2}} c.H.dr = K.H. \int_0^{s.\sqrt{2}} r.dr = H.K.(r^2/2)\Big|_0^{s.\sqrt{2}} ;$$

$$\dot{V} = H.K.s^2 .$$

In Zahlen: $\dot{V} = 1{,}5.0{,}1768.2^2$; $\dot{V} = 1{,}0608 \ m^3/s$.

b) ψ :

Existenznachweis: Aus der Geschwindigkeitsgleichung $c = K.r$ entwickelt man:

$c = K . \sqrt{x^2 + y^2}$; die Komponenten heißen dann unter Beachtung der im Bild eingetragenen Strömungsrichtung:

$$c_x = K.x \quad \text{und} \quad c_y = -K.y.$$

Beachtet man nunmehr Gl.(11-33), dann erkennt man:

$c_x = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} = K.x$; $c_y = - \dfrac{\partial \psi}{\partial x} = - K.y$; eine einfache Integration ergibt:

$$\underline{\underline{\psi = K \cdot x \cdot y}} \quad .$$

Kontrolle:

Gl.(11-33 a): $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial y}\right) \longrightarrow \underline{\underline{K = K}}$!

c) Kontrolle des Volumenstroms mittels der Stromfunktion:

Der parametrische Wert der Stromfunktion längs der hyperbolischen Stromlinienspur durch den Punkt A lautet:

$$\underline{\underline{\psi_A}} = K \cdot s^2 = 0{,}1768 \cdot 2^2 = \underline{\underline{0{,}7072\ m^2/s}} \ .$$

Der analoge Wert für den Punkt 0 lautet:

$$\underline{\underline{\psi_0 = 0}} \quad .$$

In den Erläuterungen zur Stromfunktion fand man auf Seite 201 für eine Tiefe von 1 m :

$\Delta \dot{V} = \Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$; bezüglich des vorliegenden Problems ergibt sich:

$$\dot{V} = H \cdot (\psi_A - \psi_0) \quad ; \text{in Zahlen:}$$

$$\underline{\underline{\dot{V}}} = 1{,}5 \cdot (0{,}7072 - 0) = \underline{\underline{1{,}0608\ m^3/s}} \quad !$$

Bemerkungen:

1) Man erzielt bei einer ebenen Strömung obiger Art den Volumenstrom sowohl über ein Flächenintegral als auch über die Stromfunktion.
2) Die Stromlinien sind gleichseitige Hyperbeln.
3) Längs jeder Stromlinie gilt ein anderer parametrischer Wert der Stromfunktion.
4) Das Verteilungsgesetz der Geschwindigkeit gilt nur in Eckennähe.

3.Beispiel

In der Krümmungszone eines horizontalen Wasserkanals (Breite b = 4 m; Tiefe h = 3 m; Krümmungsradius am Innenrand R_i = 20 m steigt das Fluid außen hoch und sinkt am Innenrand ab.- In erster Näherung möge die Strömungsgeschwindigkeit mit c = 5 m/s angenommen werden.-Man ermittle, Bild 11-14:

a) die Gestalt der freien Oberfläche in Höhe der Winkelhalbierenden;
b) den Volumenstrom in einem Querschnitt des geraden Kanals;
c) den Volumenstrom im Querschnitt der Winkelhalbierenden.

Lösungen:

a) Oberflächenverlauf:

Da die Absolutgeschwindigkeiten alle senkrecht aus den Querschnittsebenen stehen, darf man vom relativen Gleichgewicht ausgehen und die Orientierung mittels des y',z'-Koordinatensystems vornehmen. Da die freie Oberfläche eine Isobarfläche darstellt, ist über das Kräftegleichgewicht an einer freigemachten, ruhenden Ersatzmasse dm (Bild 11-14, Pos. c) die Gleichung für die massenspezifische, potentielle Energie aufzustellen, damit man im Anschluß daran die Gleichung für die Isobarflächen bekommen kann.-Da sich nur Druck- und Massenkräfte das Gleichgewicht halten, kann man sich auf die Ermittlung der resultierenden, massenspezifischen äußeren Kraft (Feldkraft) bezüglich des relativen Gleichgewichts beschränken (siehe Lösungskommentar auf S. 147):

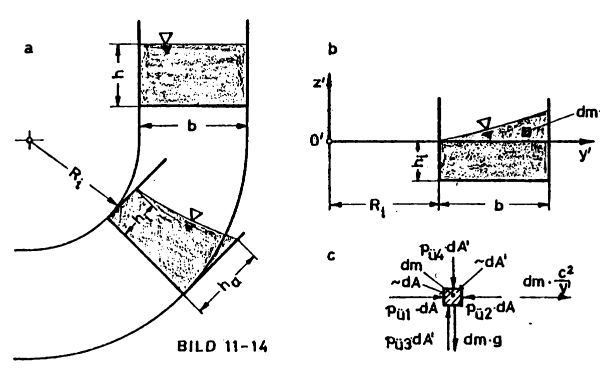


BILD 11-14

$f_{x'} = 0$; $f_{y'} = c^2/y'$; $f_{z'} = -g$. In Anlehnung an Gl.(5-11) folgt:

$$de_p = (\partial e_p/\partial x').dx' + (\partial e_p/\partial y').dy' + (\partial e_p/\partial z').dz'$$

$$de_p = -f_{x'}.dx' - f_{y'}.dy' - f_{z'}.dz' \;;\quad de_p = -(c^2/y').dy' + g.dz' \;;$$

$$e_p = -c^2.\ln y' + g.z' + \text{const}.$$

Aus der Druckformel für inkompressible Flüssigkeiten erhält man nach Gl.(6-1) : $p/\varrho + e_p = \text{const}$: $p/\varrho - c^2.\ln y' + g.z' = K$.

Um die Konstante K zu bestimmen, beachte man die Randbedingungen:

$$y' = R_i \;;\quad z' = 0 \;;\quad p = p_0 \;:$$

$$\frac{p_0}{\varrho} - c^2 . \ln R_i = K = \frac{p}{\varrho} - c^2 . \ln y' + g.z' \;;$$

$$\frac{p - p_0}{\varrho} = c^2 . \ln (y' / R_i) - g.z' \;.$$

Für $p = p_0$ erhält man dann die Gleichung der Oberfläche :

$$z' = \frac{c^2}{g} \cdot \ln (y'/R_i) \quad .$$

Einige rechnerische Stützdaten:

y' in m :	20	21	22	23	24
z' " " :	0	0,1243	0,2429	0,3562	0,4646

Jetzt sind die innere und äußere Wasserstandshöhen gesucht, Bild 11-15. Nachstehende Flächengleichheit:

$$b.h - b.h_i = \int_{R_i}^{(R_i+b)} z'dy' = \frac{c^2}{g} \int \ln \frac{y'}{R_i} .dy'$$

führt zu h_i ! Durch partielle Integration ergibt sich:

$$h_i = h - \frac{c^2}{g \cdot b} (y'.\ln\frac{y'}{R_i} - y')$$

zwischen den Grenzen R_i und $(R_i + b)$.

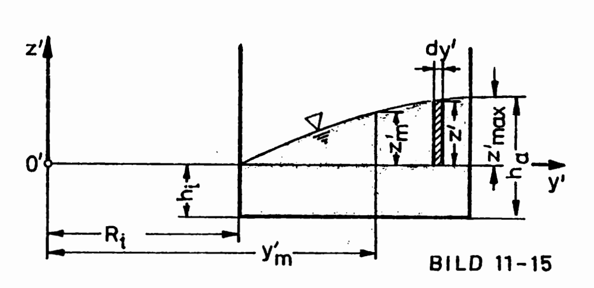


BILD 11-15

In Zahlen:

$$h_i = 2,7601 \text{ m} \; .$$

Sofort ergibt sich auch $h_a = h_i + z'_{max} = 2,7601 + 0,4646$

$$h_a = 3,2247 \text{ m} \; .$$

Eine analoge Ermittlung von y'_m ergibt $R_m = 22$ m !

b) $\dot{V}_{\text{gerader Kanal}}$:

Gl.(11-24): $\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA = c.A = c.b.h = 5.4.3$; $\dot{V} = 60 \text{ m}^3/\text{s}$.

c) $\dot{V}_{\text{gekrümmter Kanal}}$:

Hier führt folgende Gleichung zum Ziel: $\dot{V} = c.(b.h_i + \int_{Ri}^{(R_i+b)} z'.dy')$

$$\dot{V} = c.\left(b.h_i + \frac{c^2}{g}.\int_{R_i}^{(R_i+b)} \ln\frac{y'}{R_i}.dy'\right) = c.\left\{b.h_i + \frac{c^2}{g}.\left[(R_i+b).\ln\frac{R_i+b}{R_i} - b\right]\right\}$$

Auch hier findet man $\dot{V} = 60\ m^3/s.$

Damit ist die Kontinuitätsbedingung erfüllt.

4.Beispiel

Wasser wird durch einen elastischen Schlauch aus einem oben offenen Behälter abgesaugt.-Plötzlich soll mehr abgesaugt werden.-Wie ändert sich der Schlaucheintrittsquerschnitt,wenn bei dieser instationären Übergangsströmung der Austrittsquerschnitt durch einen festen Stutzenanschluß konstant bleibt ?

Lösung:

Die Strömungscharakteristik lautet: instationär; inkompressibel; relativ kleiner Strömungsquerschnitt;keine Dissipationen.

Somit läßt sich Gl.(11-35) verwenden:

$$\frac{\partial \dot{V}}{\partial s} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad .$$

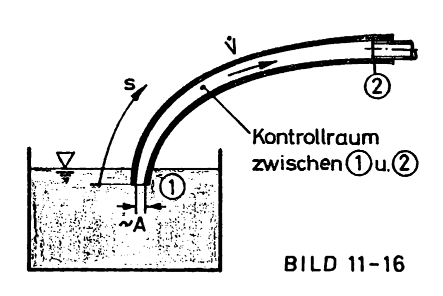


BILD 11-16

Die Systemanordnung zeigt Bild 11-16.
Wenn aus Gründen der Trägheit und mangelnder sofortiger Wassernachlieferung der Stromgradient $\partial \dot{V}/\partial s$ entsteht, wird aus der Substanz des Kontrollraumes geschöpft.Die Kontinuitätsbedingung verlangt deshalb einen negativen Wert für $\partial A/\partial t$,was bedeutet, daß der Eintrittsquerschnitt A momentan abnimmt!

5.Beispiel

In einer Rohrströmung konstanten Querschnitts kommt es zu einer in-

stationären Strömung.-Wie ist das zu erklären ?

Lösung:

Die Kontinuitätsgleichung wird vorsichtshalber in der allgemein gültigen Form nach Gl.(11-34) für die relativ enge Stromröhre und instationäre Strömung notiert:

$$\frac{\partial}{\partial s}(\rho \cdot \dot{V}) + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial s}(\rho \cdot c \cdot A) + \frac{\partial(\rho \cdot A)}{\partial t} = 0 \quad ; \text{daraus folgt:}$$

$$\frac{\partial(\rho \cdot c)}{\partial s} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \ .$$

Die lokale Dichteänderung und die konvektive Änderung der Massenstromdichte ($\rho \cdot c$) sind nur möglich bei kompressiblen Fluiden mit Wärmeaustausch,und damit liegt ein Problem der Gasdynamik (Teil IV) vor.

11.3. Wirbelbewegung

11.3.1. Wirbelvektor,Wirbellinie,Wirbelfläche,Wirbelschicht

Wirbelvektor

Eine kleine Fluidmasse m dreht um eine Schwerachse AA.Materielle Punkte beschreiben Kreisbahnen,Bild 11-17.Die Umfangsgeschwindigkeit eines Punktes P_i berechnet sich bekanntermaßen mit:

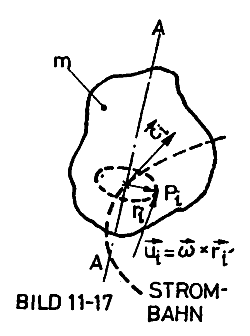


BILD 11-17

$$\boxed{\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \qquad (11\text{-}40).$$

Man verstehe unter $\vec{u}$ die Umfangskomponente der Fahrzeugbewegung bei einem Festkörper oder,wie hier,die Umfangskomponente der Absolutbewegung eines Fluidteilchens.
Wegen der Fluidität (vgl. Abschn. 1.2) besitzen die Punkte eines Fluidteilchens verschiedene Winkelgeschwindigkeiten $\vec{\omega_i}$ (im allgemeinsten Fall),ganz im Gegensatz zu einem rotierenden Festkörper.Trotzdem aber definiert man einen Wirbelvektor,

der die mittlere Winkelgeschwindigkeit der Fluidmasse m um eine Schwerachse angibt.
Den mathematischen Ausdruck für den Wirbelvektor bestimmt man folgendermaßen:
Zunächst wird der kleine Fluidbereich auf die z,y-Ebene eines rechtwinkligen Koordinatensystems projiziert, Bild 11-18. Dadurch erhält man die geschlossene Projektionslinie K.
Der Schwerpunkt der von ihr umschlossenen Fläche heißt S.
Die translatorischen Geschwindigkeitskomponenten sind c_y und c_z. Im Nachbarpunkt A(y+dy;z) trifft man unter der Annahme linearer differentieller Zunahmen folgende z-Komponente der Geschwindigkeit an:

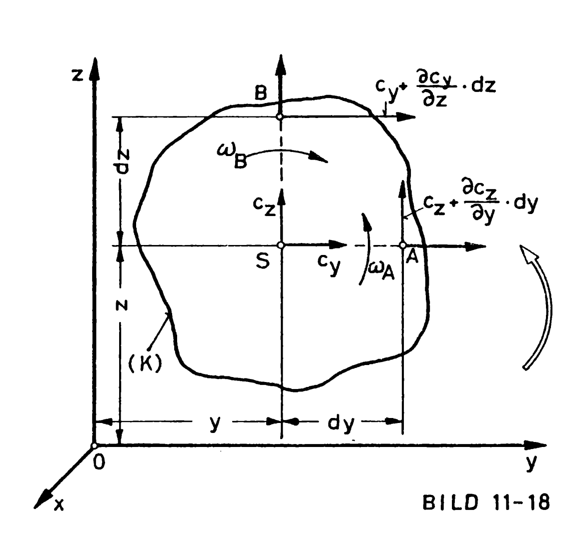


BILD 11-18

$$c_{zA} = c_z + \frac{\partial c_z}{\partial y} . dy .$$

Für den Nachbarpunkt B(y;z+dz) gilt analog, so daß seine y-Komponente lautet:

$$c_{yB} = c_y + \frac{\partial c_y}{\partial z} . dz .$$

Erinnert man sich der Tatsache, daß die Geschwindigkeit eines jeden Punktes sich in eine translatorische und in eine rotatorische Komponente aufteilen läßt (Satz von König), so läßt sich beispielsweise die z-Komponente der Geschwindigkeit des Punktes A (Bild 11-18) folgendermaßen aufschlüsseln:

$$c_{zA} = (c_z + \frac{\partial c_z}{\partial y} .dy) = c_z + \omega_A .dy ;$$

hierbei bedeutet

$$\omega_A = \frac{\partial c_z}{\partial y} \tag{11-41}$$

die Winkelgeschwindigkeit des Punktes A um den Drehpunkt S .Entsprechenderweise kann man zur y-Komponente des Punktes B sagen:

$$c_{yB} = \left(c_y + \frac{\partial c_z}{\partial y} . dy \right) = c_y + \omega_B . dz$$

; legt man den Linksdrehsinn als mathematisch positiv fest,

dann ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit des Punktes B um S :

$$\omega_B = - \frac{\partial c_y}{\partial z} \tag{11-41a}$$

c_y und c_z sind Komponenten der Schwerpunktsgeschwindigkeit.
Bildet man jetzt den arithmetischen Mittelwert der Winkelgeschwindigkeiten der beiden untersuchten Nachbarpunkte A und B ,dann ergibt sich für eine im Schwerpunkt S stehende und zur x-Achse parallele Drehachse:

$$\omega_x = \frac{\omega_A + \omega_B}{2} = \frac{1}{2} . \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z} \right) \tag{11-42}$$

Unter ω_x versteht man die x-Komponente des Wirbelvektors.Durch eine zyklische Permutation,Bild 11-19, ergibt sich für die beiden anderen Komponenten der mittleren Winkelgeschwindigkeit:

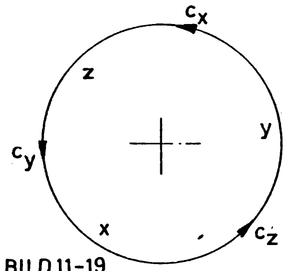


BILD 11-19

$$\omega_y = \frac{1}{2} . \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x} \right) \tag{11-42a}$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} . \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} \right)$$

Den resultierenden Wirbelvektor

$$\bar{\omega} = i . \omega_x + j . \omega_y + k . \omega_z \tag{11-43}$$

kann man auch in Form einer symbolischen Determinanten anschreiben:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \left[i.\left(\frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z}\right) + j.\left(\frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x}\right) + k.\left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y}\right) \right]$$

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \qquad (11\text{-}44).$$

Diese Determinante bedeutet aber das Vektorprodukt $\nabla \times \vec{c}$!- Es ist nun üblich geworden,dieses Vektorprodukt als den Rotor der Geschwindigkeit $\vec{c}$ zu bezeichnen.Zwischen dem Wirbelvektor (physikalische Tatsache) und dem Rotor der Geschwindigkeit (mathematische Definition) besteht nun folgender Zusammenhang:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \cdot \nabla \times \vec{c} = \frac{1}{2} \cdot \text{rot}\, \vec{c} \qquad (11\text{-}45).$$

Wirbellinie

Die Einhüllende von Wirbelvektoren heißt Wirbellinie.Wie bei den Stromlinien (vgl. Gl. 11-7) erhält man aus der Parallelbedingung: $\vec{\omega} \parallel d\vec{r}$ die beiden Differentialgleichungen der Wirbellinie,welche man in fortlaufender Form folgendermaßen angeben kann:

$$\frac{dx}{\omega_x(x,y,z,t)} = \frac{dy}{\omega_y(x,y,z,t)} = \frac{dz}{\omega_z(x,y,z,t)} \qquad (11\text{-}46).$$

Wirbelfläche

Mehrere Wirbellinien zusammengenommen,bilden eine Wirbelfläche.Im Raum (R^3) kann man zwei Familien von Wirbelflächen haben.

Wirbelschicht

Zwei sehr benachbarte Wirbelflächen,die derselben Familie angehören, bilden zusammen eine Wirbelschicht.Wirbelschichten spielen oft die Rolle materieller Fluidgrenzen zwischen zwei verschiedenen Bereichen. Die sogenannten Diskontinuitätsflächen,die Grenzschichten und die Schmierschichten sind Beispiele für Wirbelschichten(s.S. 334).

11.3.2. Wirbelrohr,Wirbelintensität,Zirkulation,Wirbelfaden

Wirbelrohr

Eine offene Fläche A im Wirbelbereich enthält eine doppelte Unendlichkeit Punkte.Durch jeden Punkt verläuft eine Wirbellinie.Alle Wirbellinien zusammen bilden ein Wirbelrohr,Bild 11-20.Alle Wirbellinien,welche die geschlossene Kurve K kreuzen,bilden zusammen eine das Wirbelrohr begrenzende zylindrische Mantelfläche (Wirbelfläche).

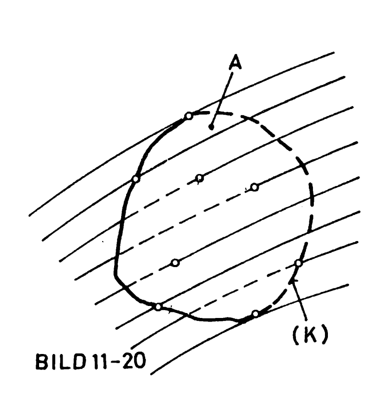


BILD 11-20

Wirbelintensität,Zirkulation

Auf der Suche nach einer Beschreibungsgröße für die Wirbelintensität bietet sich der Wirbelstrom oder Wirbelfluxus an:

$$\int_{(A)} \vec{n}.\vec{\omega}.dA \quad .$$

Die Analogie zum Geschwindigkeitsfluxus (Volumenstrom) $\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA$ liegt nahe.

Aus Gründen mathematischer Bequemlichkeit führt man als Wirbelintensität den doppelt so großen Wert ein:

$$\boxed{\Gamma = 2 . \int_{(A)} \vec{n}.\vec{\omega}.dA} \qquad (11\text{-}47),$$

damit man später bei Verwendung des Rotors der Geschwindigkeit nicht immer den Faktor 1/2 mitschleppen muß.

$$\boxed{\Gamma = \int_{(A)} \vec{n}.\text{rot}\ \vec{c}.dA = \int_{(A)} \vec{n}.(\vec{\omega} \times \vec{c}).dA} \qquad (11\text{-}48).$$

Die Größe Γ heißt Wirbelintensität (Intensität der Wirbelröhre). Die Berechnung des vorliegenden Integrals vereinfacht sich außerordentlich bei Verwendung der Integralformel von Stokes, wonach sich das Flächenintegral in ein Linienintegral umwandeln läßt:

$$\boxed{\Gamma = \int_{(A)} \vec{n} . \mathrm{rot}\, \vec{c} . dA = \oint_{(K)} \vec{c} \, . \, d\vec{r} = \oint_{(K)} c_t . ds} \qquad (11\text{-}49).$$

Das Linienintegral längs der geschlossenen Kurve K (Bild 11-20), welche die Fläche A umschließt, heißt die Zirkulation Γ des Geschwindigkeitsvektors $\vec{c}$ oder einfach die Zirkulation der Geschwindigkeit. Somit entpuppt sich die "Zirkulation" als ein mathematischer Ausdruck zur Beschreibung der physikalischen Größe "Wirbelintensität".

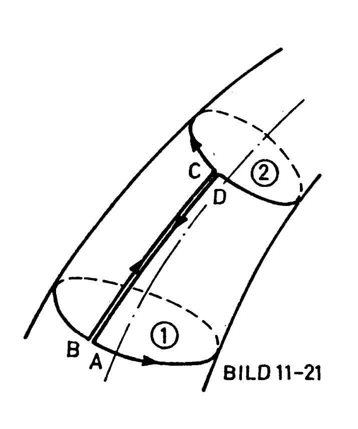


BILD 11-21

Man untersuche nun die Zirkulation für ein dickes Wirbelrohr bei den Querschnitten 1 und 2, Bild 11-21. Sie werden als Γ_1 und Γ_2 nach Gl.11-49 berechnet.

Ermittelt man die Zirkulation längs der geschlossenen Linie ABCDA :

$$\Gamma_{ABCDA} = \Gamma_1 + \int_{(BC)} \vec{c} . d\vec{r} - \Gamma_2 + \int_{(DA)} \vec{c} . d\vec{r} =$$

$$= 2 . \int_{(A_{ABCDA})} \vec{n} . \vec{\omega} . dA$$

und beachtet man, daß sich einmal die Linienintegrale längs BC und DC aufheben, da sie sehr dicht nebeneinander liegen, und daß zum anderen kein Fluxus durch die Mantelfläche des Stromrohrs vorhanden ist, dann vereinfacht sich die Lösungsgleichung zu:

$$\Gamma_{ABCDA} = \Gamma_1 - \Gamma_2 = 0 \quad ,$$

zumal das Skalarprodukt $\vec{n} . \vec{\omega}$ wegen der Parallelität der beiden Vektoren verschwindet. Daraus läßt sich aber ablesen:

$$\underline{\underline{\Gamma_1 = \Gamma_2}} \quad .$$

Kontinuitätsbedingung für ein Wirbelrohr:

> In einem Wirbelrohr bleibt die Wirbelintensität,ausgedrückt durch die Zirkulation der Geschwindigkeit,konstant.

Die unmittelbare Folgerung daraus ist,daß ein Wirbelrohr kein freies Ende in einem Fluidgebiet haben kann.Im anderen Fall müßte die Zirkulation am Wirbelrohrende plötzlich null werden,was nach obiger Aussage unzulässig ist.-Aus diesem Grunde besitzen Wirbelröhren prinzipielle Gestalten,wie sie in Bild 11-22 angeführt sind.

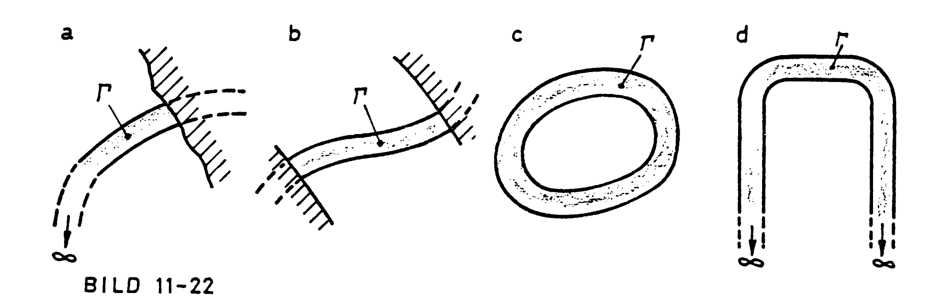


BILD 11-22

Pos. a : Wirbelrohr mit einem festen Ende;das andere Ende ist unendlich weit fort.Das Reflektionsprinzip kann sich auch als mathematisches Modell verstehen lassen,so daß man sich das Wirbelrohr durch den Festkörper hindurch verlängert vorstellen möge. - Das Wirbelrohrende kann auch flüssig sein.

Pos. b : Wirbelrohr mit zwei Enden.

Pos. c : Wirbelring.

Pos. d : Wirbelrohr,dessen beide Enden im Unendlichen liegen.

Wirbelfaden

Ist mit einer konstanten Verteilung des Wirbelvektors in den Querschnitten zu rechnen,dann spricht man von einem Wirbelfaden.Die Querschnitte sind dann als gerade Ebenen zu nehmen.Ein Wirbelfaden kann gerade oder krumm sein.Seine Intensität wird als doppelter Fluxus der Wirbel nach Gl.(11-47) angegeben und lautet einfach:

$$\Gamma = 2 \cdot \int_{(A)} \vec{n} \cdot \vec{\omega} \cdot dA = 2 \cdot \omega \cdot A \qquad (11\text{-}50).$$

11.3.3. Wirbelkern, Potentialbewegung, induzierte Geschwindigkeit, Potentialwirbel

Wirbelkern

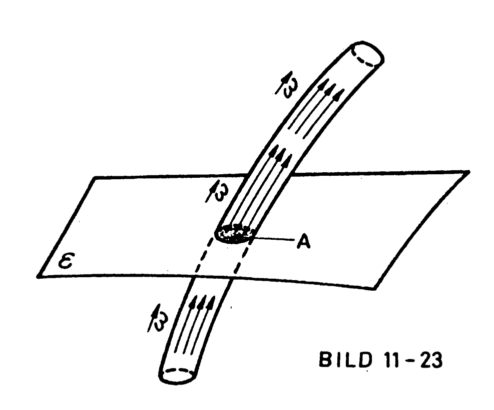


BILD 11-23

Schneidet man ein Wirbelrohr mit einer Querschnittsebene ε, Bild 11-23, dann kann man klar zwei Fluidbereiche unterscheiden: Im Wirbelrohr gibt es eine dreifache Unendlichkeit von Wirbelvektoren, während ausserhalb des Wirbelrohres kein Wirbelvektor angetroffen wird.
Der Querschnitt A in der Ebene wird Wirbelkern genannt.

Potentialbewegung

Warum der Außenbereich einer Potentialströmung zugeschrieben wird, soll nunmehr erklärt werden.
Unter der Potentialfunktion eines Geschwindigkeitsfeldes versteht man eine Funktion $\varphi(x,y,z)$, also eine skalare Ortsfunktion, deren Wegableitung zur entsprechenden Geschwindigkeit führt.
Der Bereich außerhalb des Wirbelrohres (Bild 11-23) könnte durch eine Potentialfunktion beschrieben werden, wenn nachweislich der Wirbelvektor verschwindet. Zu diesem Zweck bildet man:

$\vec{c} = \text{grad}\,\varphi = \nabla\varphi$; wenn das gilt, folgt: $2.\vec{\omega} = \nabla \times \vec{c} = \text{rot}\,\vec{c} =$
$= \text{rot grad}\,\varphi = \nabla \times (\nabla\varphi)$.

Entwickelt man die Rotordeterminante (vgl. Gl. 11-44 und 11-45)

$$\text{rot grad}\,\varphi = \nabla \times (\nabla\varphi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

nach der ersten Zeile :

$$\text{rot grad}\,\varphi = i.\left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right] + j.\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] +$$

$$k.\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right]$$

,dann fällt sofort auf,daß wegen Gleichheit der gemischten Ableitungen die eckigen Klammern alle wegfallen,weshalb der Rotor der Geschwindigkeit verschwindet.Das entspricht wiederum dem Sachverhalt,daß der "Außenbereich" wirbelfrei ist.

Aus dieser Betrachtung darf man den Schluß ziehen: Ein wirbelfreies Geschwindigkeitsfeld läßt sich durch eine Potentialfunktion beschreiben.Deshalb spricht man auch dann von einer Potentialbewegung.Es gilt in Zusammenfassung:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi &= f\,(x,y,z) \\ \vec{c} &= \text{grad}\,\varphi = \nabla\varphi \\ \text{rot grad}\,\varphi &= 0 \end{aligned}} \qquad (11\text{-}51).$$

Induzierte Geschwindigkeit

In Bild 11-24 ist nocheinmal der Wirbelkern einer Wirbelröhre gezeigt worden,mit der Ergänzung jedoch,daß der Wirbelschwerpunkt S eingetragen ist.In ihm greift der mittlere Wirbelvektor $\vec{\omega}_S = \frac{1}{A}.\int_{(A)}\vec{\omega}\,dA$ an .

Infolge der in einer natürlichen Flüssigkeit immer vorhandenen Kohäsionskräften wird das Wirbelrohr,und damit besonders seine Oberfläche,versuchen,den fluidischen Außenbereich in Drehrichtung mitzunehmen.Beschränkt man sich auf die Verhältnisse um einen Wirbelfaden,dann lautet nach Gl.(11-50) die Gesamtzirkulation, die in der Querschnittsebene vom Wirbelfaden ausgeht:

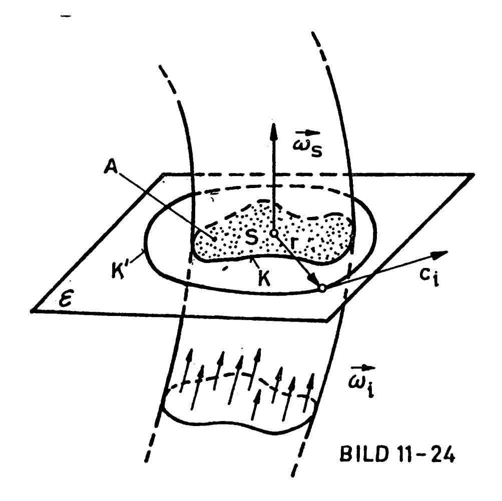


BILD 11-24

$$\Gamma = 2.\,\omega_S.A \quad .$$

Da wegen der äußeren Wirbelfreiheit keine weiteren Dreh-

effekte hinzukommen, kann die Zirkulation längs der geschlossenen Kurve K' (hier Kreisform) nur Γ heißen, wie es der Wirbelfaden diktiert.-Die im Außenbezirk hervorgerufene Geschwindigkeit heißt induzierte Geschwindigkeit $\vec{c}_i$ .Man berechnet sie mit Gl.(11-49):

$$\Gamma = 2 \cdot \omega_S \cdot A = \oint \vec{c}_i \cdot d\vec{r} = c_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r$$

$$c_i = \frac{\Gamma}{2 \cdot \pi \cdot r} = \frac{\omega_S \cdot A}{\pi \cdot r} \qquad (11\text{-}52).$$

(allgemein gültig) (Sonderfall: Stromfaden)

Potentialwirbel

Der bisher immer wieder erwähnte "Außenbereich" ist bekanntlich in sich wirbelfrei. Da aber die Geschwindigkeiten durch ein Wirbelrohr oder durch einen Wirbelfaden induziert werden, spricht man bei der Außenbewegung von Potentialwirbelbewegung.-Ein Punkt im Innenbereich dreht sich um S mit der Umfangsgeschwindigkeit

$\vec{u}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$,Bild 11-25.

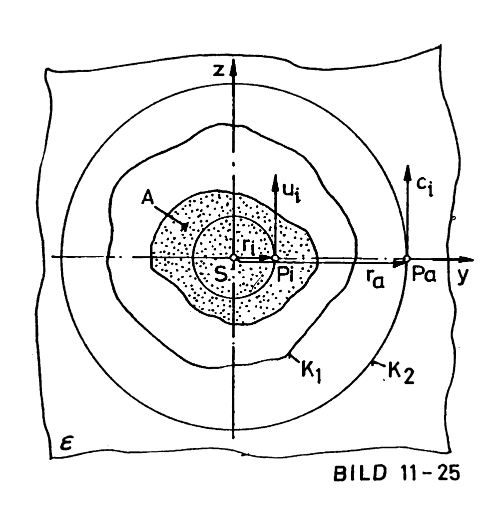


BILD 11-25

wie ein materieller Punkt eines Festkörpers, mit dem Unterschied aber, daß der lokale Wirbelvektor $\vec{\omega}_i$ eine Funktion der Koordinaten ist. Jeder Punkt kann also eine Eigenrotation haben.

Die Punkte im Außenbereich bewegen sich ebenfalls um S, aber mit der induzierten Geschwindigkeit $\vec{c}_i$.Man beachte den Punkt P_a ,der auf der Kreiskontur K_2 liegt. Gleiches gilt für jede andere Kurve (z.B.: K_1) auch.

Da jeder Punkt P_i eine eigene Winkelgeschwindigkeit haben kann, gibt es im Wirbelkern unendlich viele Einzelzirkulationen, wogegen im Außenbezirk nur eine Zirkulation : Γ wirksam ist.

Entsteht eine Potentialbewegung durch Superposition einzelner Potentialbewegungen und wird dabei eine durch ein Wirbelrohr erzeugt, dann liegt eine Potentialbewegung mit Zirkulation vor.

Bemerkungen

In Bild 11-26 wird qualitativ der Geschwindigkeitsverlauf der Fluidteilchen im Wirbelkern und in dem Außenbereich angedeutet.

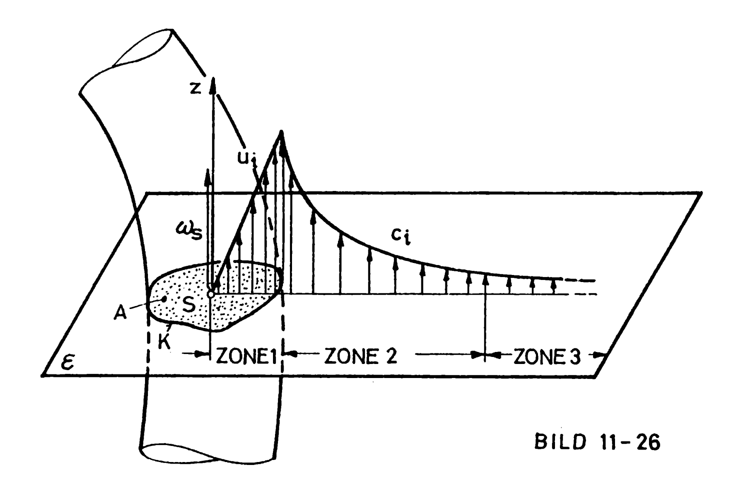


BILD 11-26

Man kann den Geschwindigkeitsgesamtbereich in drei Zonen unterteilen:

Zone 1 : Wie gezeigt, liegt im Wirbelkern eine zirkulationsbehaftete Strömung vor. Die Geschwindigkeit wächst gleichsinnig mit dem Radius an, wenn man $\vec{\omega}_S$ als Mittelwert versteht.

Zone 2 : Hier erkennt man eine Potentialbewegung mit Zirkulation.

Zone 3 : Wenn der Einfluß des Wirbelrohrs asymptotisch abklingt, wenn also die induzierte Geschwindigkeit sehr klein ist, dann hat man es mit einer Potentialbewegung ohne Zirkulation zu tun.

Bei der Erzeugung der induzierten Geschwindigkeit ist die Rede von Kohäsionskräften gewesen. Solche molekularen Kräfte können sein: Massenanziehungskräfte, elektrostatische Coulombsche Kräfte, Adhäsions- und Adsorptionskräfte u.a. Die Kohäsionskräfte sind nicht so groß, daß sie Festkörpereigenschaften nach sich ziehen, sie sind aber auch nicht so klein, daß es zu Einzelbewegung fluidischer Massenpunkte kommt:

Ein Fluid stellt immer ein kontinuierliches Medium dar.
Die Kohäsionskräfte sind von den Bewegungsumständen abhängig.Am stärksten ist die Kohäsion in der Kernwirbelbewegung;dort ist das Kräfteverhältnis F_t/F_p in Betracht zu ziehen,wie es bei reellen Fluiden der Fall ist.
Mittelstark ist die Kohäsion bei Potentialbewegungen mit Zirkulation. Das Verhältnis F_t/F_p ist zwar vernachlässigbar,nicht aber die Auswirkungen der Kohäsion: Man beachte die induzierte Geschwindigkeit, zu der es ohne materielle Teilchenkopplung nicht käme.-Man spricht von quasi-vollkommenen Fluiden,weil sie in der Lage sind,eine Zirkulation weiterzuleiten.
Am schwächsten ist die Kohäsion bei den Potentialbewegungen ohne Zirkulation.Man spricht von vollkommenen Fluiden;sie sind nicht fähig, eine Zirkulation zu behalten.Auch hier ist die Kohäsion nicht null, denn das Fluid ist ein kontinuierliches Medium geblieben.

11.3.4. Beispiele

1.Beispiel

Es wird das 4.Beispiel von Abschn. 9.4 (Seite 146) wieder aufgegriffen.Bei dem rotierenden Becher ist die Fahrzeugwinkelgeschwindigkeit mit ω_F = 10 rad/s gegeben.-Man suchenun in diesem Zusammenhang:

a) den Wirbelvektor $\vec{\omega}_i$ (x,y,z),Bild 11-27; d = 2.R = 0,5 m ;
b) das Wirbelrohr und seine Gesamtzirkulation Γ;
c) den Volumenstrom durch eine Meridianebene.

Lösungen:

a) $\vec{\omega}_i(x,y,z)$:

Da es bei der vorliegenden Kernwirbelbewegung keine Relativbewegung gibt,ist nur die Absolutbewegung zu untersuchen.-Die Absolutgeschwindigkeit eines beliebigen materiellen Punktes $P_i(r,z)$ ist

$$\vec{u}_i = \vec{\omega}_i \times \vec{r}_i$$

1.Lösungsverfahren

Der lokale absolute Wirbelvektor ist

$$\vec{\omega}_i = \frac{1}{2}.\text{rot}\,\vec{u}_i = \frac{1}{2}.\nabla \times \vec{u}_i = \frac{1}{2}.\nabla \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r}_i).$$

Es mag hier an die Formel des doppelten Vektorprodukts erinnert werden:

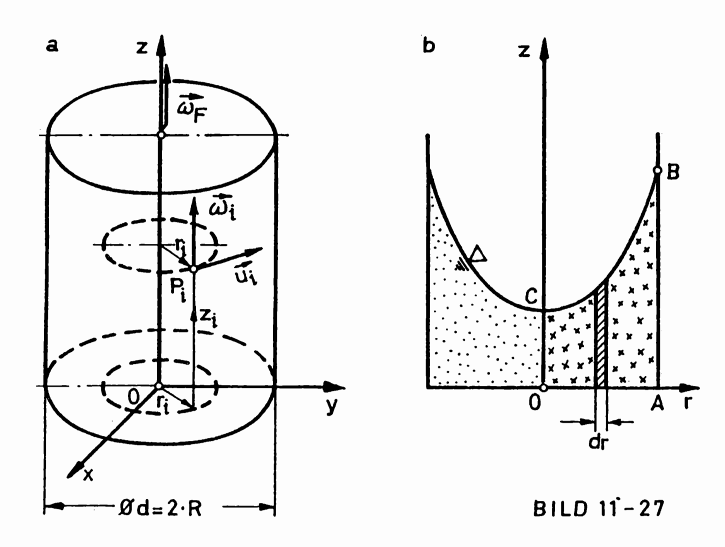


BILD 11-27

$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$. Angewendet auf die obige Gleichung, folgt:

$\nabla \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r}_i) = (\nabla \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{\omega}_F - (\nabla \cdot \vec{\omega}_F) \cdot \vec{r}_i$; hierbei ist

$$\nabla \cdot \vec{r}_i = \text{div}\, \vec{r}_i = \nabla \cdot (i.x + j.y) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2 \; ;$$

$$(\nabla \cdot \vec{r}_i) \cdot \vec{\omega}_F = 2 \cdot \vec{\omega}_F \quad .$$

Da $\vec{\omega}_F$ = konst ist, folgt : $\nabla \cdot \vec{\omega}_F = \text{div}\, \vec{\omega}_F \equiv 0$. Schließlich gilt:

$$\underline{\underline{\vec{\omega}_i = \frac{1}{2} \cdot \text{rot}\, \vec{u}_i = \vec{\omega}_F}} \quad .$$

Der lokale absolute Wirbelvektor ist also konstant und gleich der Fahrzeugwinkelgeschwindigkeit.

2. Lösungsverfahren

In $\vec{\omega}_i = 0{,}5 \cdot \nabla \times (\vec{\omega}_F \times \vec{r}_i)$ gilt auch: $\omega_{Fx} = \omega_{Fy} = 0$ und $\omega_{Fz} = k.\omega_F$;

somit folgt für das Vektorprodukt:

$$\vec{\omega}_F \times \vec{r}_i = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & \omega_F \\ x & y & z \end{vmatrix} = i.(-y.\omega_F) + j.(x.\omega_F) = \omega_F.(-i.y + j.x)$$

Weiterhin ist:

$$\vec{\omega}_i = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y \cdot \omega_F & x \cdot \omega_F & 0 \end{vmatrix} = k \cdot \omega_F \quad ; \quad \text{q.e.d.}$$

3.Lösungsverfahren

Die Zirkulation längs einer Kreisbahn vom Radius r_i (Bild 11-27, Pos. a) lautet:

$$\Gamma(r_i) = 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot u_i = 2 \cdot \pi \cdot \omega_F \cdot r_i^2 \ .$$

$\Gamma(r_i=0) = 0$ und $\Gamma(r_i=R) = 2 \cdot \pi \cdot \omega_F \cdot R^2$ .Differenziert man nun $\Gamma(r_i)$ nach dem Radius,so folgt:

$$d\Gamma(r_i) = 4 \cdot \pi \cdot \omega_F \cdot r_i \cdot dr_i \ .$$

Nach dem Satz von Stokes gilt für den elementaren Wirbelfluxus

$$d\Gamma(r_i) = \text{rot}\ u_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot dr_i = 2 \cdot \omega_i \cdot 2 \cdot \pi \cdot r_i \cdot dr_i = 4 \cdot \pi \cdot \omega_i \cdot r_i \cdot dr_i \ .$$

Aus der Gleichheit der beiden differentiellen Zirkulationen ergibt sich: $\omega_i = \omega_F$; q.e.d.

b) Wirbelrohr und Γ:

Die gesamte Fluidmasse im zylindrischen Behälter bildet einen Wirbelfaden in der Absolutbewegung.Die Mantelfläche des Wirbelfadens ist gleich der Innenwand des Zylinders.Die untere Grenze des Wirbelfadens gibt der Zylinderboden ab,seine obere Grenze stellt die parabolische Fluidgrenze dar.-

Für die Zirkulation in einem Wirbelfaden folgt einfach nach Gl.(11-50):

$$\Gamma = 2 \cdot \omega_F \cdot \pi \cdot R^2 \ .$$

$$\Gamma = 2.10 \cdot \pi \cdot 0{,}25^2 \quad ; \quad \Gamma = 3{,}927\ m^2/s \ .$$

c) $\dot{V}$:

Es ist der Volumenstrom gesucht,der in der Fläche OABCO anfällt. (Bild 11-27,Pos. b):

$$\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{u}_i.dA = \int_0^R u_i.z.dr = \int_0^R \omega_F.r.z.dr$$

. Als Funktion $z = f(r)$ setze man die Ergebnisgleichung für z' auf Seite 150 ein:

$$\dot{V} = \omega_F. \int_0^R r.(0{,}641 - 5{,}096.r^2).dr = \underline{\omega_F.(0{,}3205.R^2 + 1{,}274.R^4)};$$

in Zahlen: $\dot{V} = 10.(0{,}3205.0{,}25^2 + 1{,}274.0{,}25^4) = \underline{\underline{0{,}25\ m^3/s}}.$

Bemerkungen:

Der Meridianschnitt OABCO ist keinQuerschnitt eines Wirbelrohres, weil alle Wirbelvektoren parallel zur Drehachse Oz sind.Damit stehen sie alle senkrecht zu den Flächennormalen der Meridianebenen, weshalb es zu keinem Wirbelfluxus kommen kann.-Folgerung: Im vorliegenden Beispiel sind alle Meridianebenen wirbelfrei.

Allgemein gilt danach:

> Ein Strömungsbereich ist wirbelbehaftet,wenn die Zirkulation längs einer geschlossenen Linie nicht verschwindet.
> Ein Strömungsbereich ist wirbelfrei,wenn die Zirkulation auf allen erdenklichen,geschlossenen Kurven null ist.Die Nachprüfung dieser Bedingung ist kompliziert.

2.Beispiel

Man weise nach,daß die Eckenströmung nach Beispiel 2,Abschn. 11.2.5, Seite 205,wirbelfrei ist.

Lösung:

Man untersuche die Strömungszone zwischen zwei Stromlinien.Da feste Wände als Stromlinien aufgefaßt werden dürfen,konzentriert sich die Überprüfung auf das Geschehen zwischen der festen Berandung und einer Stromlinie,Bild 11-28.

Man bilde nun das Linienintegral der Zirkulation längs des Kurvenzuges OABCO ,wobei man auf die Gl.(11-49) zurückgreift:

$$\Gamma = \oint_{(K)} c_t.ds = \int_0^1 c_x.dx + \int_0^1 c_y.dy + \int_{-1}^0 c_x.dx + \int_1^0 c_y.dy \quad .$$

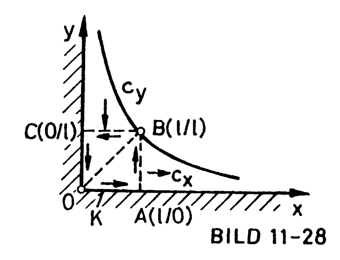


BILD 11-28

Die Geschwindigkeiten zeigen folgende Abhängigkeit:

$c_x = K.x$ und $c_y = - K.y.$ (Siehe S. 206).

Damit folgt für die Zirkulationsberechnung:

$$\Gamma = \int_0^1 K.\ x.dx - K.\int_0^1 y.dy + K.\int_1^0 x.dx - K.\int_1^0 y.dy$$

$$\underline{\underline{\Gamma}} = \frac{K}{2}.\ l^2 - \frac{K}{2}.\ l^2 - \frac{K}{2}.\ l^2 + \frac{K}{2}.l^2 = \underline{\underline{0}}\quad .$$

Damit ist auf relativ einfache Art der Nachweis gelungen, daß die Eckenströmung von Beispiel 2, Abschn. 11.2.5, wirbelfrei ist, obwohl <u>nur eine</u> geschlossenen Kurve untersucht worden ist.
Mit der festen Wand und einer beliebigen Stromlinie ist nämlich der gesamte Eckenbereich erfaßt.

12. DIE BEWEGUNG DER VOLLKOMMENEN FLUIDE

12.1. Bewegungsgleichungen

Ist der Zähigkeitseinfluß zu vernachlässigen, dann spielen nur die drei Kraftarten: äußere Massenkräfte $\vec{F}_a$,
Trägheitskräfte $\vec{F}_{tr}$ und
Druckkräfte $\vec{F}_p$
eine Rolle. Nach Abschn. 4 liegt dann der zweite Arbeitsbereich vor:
Mechanik der vollkommenen Fluide; hier besonders die Kinetik der vollkommenen Fluide (s. Abschn. 11.1.1).
Die Kräfte werden mittels der Gl. (4-1), (4-2) und (4-4) berechnet.

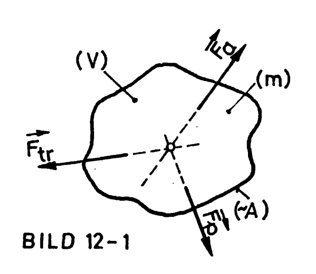


BILD 12-1

Kontrollgebiet ist entweder das Volumen (V) oder die geschlossene Fläche (A), Bild 12-1.
Im Sinne des d'Alembertschen Prinzips (Gl. 8-7, Seite 118) halten sich die drei Kräfte $\vec{F}_a, \vec{F}_{tr}$ und $\vec{F}_p$ das dynamische Gleichgewicht. - Übrigens können sich drei Kräfte nur dann das Gleichgewicht halten, wenn sich ihre Wirkungs-

linien in einem Punkte schneiden und wenn das Kraftteck sich schließt. Es gilt demnach:

$$\sum \vec{F_i} - m.\vec{a} = \vec{F_a} + \vec{F_p} + \vec{F_{tr}} = 0 \quad .$$

Die Druckkraft ist als Stützreaktion zu betrachten; Stützreaktionen nennt man in der Festkörpermechanik auch quasi-äußere Kräfte. Unter Einsatz der angeführten Berechnungsgleichungen kommt jetzt :

$$\int_{(V)} \vec{f}.\varrho.dV - \int_{(A)} \vec{n}.p.dA - \int_{(V)} \frac{d\vec{c}}{dt}.\varrho.dV = 0 \quad .$$

Nach der ersten Integralformel von Gauß, Gl. (5-4), kann man eine Oberflächenintegral in ein Volumenintegral umwandeln. Danach folgt:

$$\int_{(V)} \varrho.\frac{d\vec{c}}{dt}.dV + \int_{(V)} \nabla p.dV = \int_{(V)} \vec{f}.\varrho.dV \quad .$$

In der Umgebung eines materiellen Punktes gilt wegen

$$\frac{d\int_{...}}{dV} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta\left[\int_{...}\right]}{\Delta V} \quad :$$

$$\boxed{\varrho.\frac{d\vec{c}}{dt} + \nabla p = \varrho.\vec{f} \quad \text{oder} \quad \frac{d\vec{c}}{dt} + \frac{\nabla p}{\varrho} = \vec{f}} \qquad (12\text{-}1).$$

Dies ist die vektorielle Schreibweise der Bewegungsgleichungen. Ihre einfache Form verbirgt die mathematischen Schwierigkeiten, was ihre Integration anbetrifft. - Die hier nicht ausgeschriebenen Komponentengleichungen kennt man unter dem Namen: Eulersche Bewegungsgleichungen.

12.2. Bernoulli- und Energieformel

12.2.1. Theorie

Formel von Bernoulli

Um die Bewegungsgleichung integrieren zu können, projiziert man in einem Sonderfall zuerst alle Kraftvektoren auf die Tangente einer

Stromlinie:

$$\boxed{\frac{dc}{dt} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} = f_s} \qquad (12\text{-}2).$$

Wenn man die Aussage der Gl.(11-14) ,Seite 191,hier mit verwertet, und für die Kraftkomponente f_s ein Kräftepotential zuläßt,wie es eigentlich die Erkenntnisse aus der Fluidstatik nahelegen, dann erhält man:

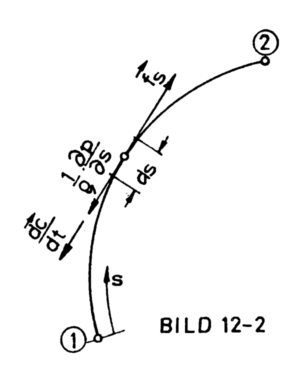


BILD 12-2

$$\frac{\partial c}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} = f_s = - \frac{\partial e_p}{\partial s} \quad .$$

In vielen Fällen der technischen Anwendungen kann man das Vektorfeld einer äusseren (Massen-) Kraft durch ein Kräftepotential beschreiben helfen.

ds ist ein Kurvenelement zwischen zwei Punkten einer Stromlinie,Bild 12-2.Das Linienintegral obiger Kräftebilanz führt zu einer Arbeits- bzw. Energiebilanz:

$$\int_{1.2} \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \int_{1.2} c \cdot \frac{\partial c}{\partial s} \cdot ds + \int_{1.2} \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial s} \cdot ds = - \int_{1.2} \frac{\partial e_p}{\partial s} \cdot ds \quad .$$

Da für die Tangente der Stromlinie gilt,daß jedes Differential der Form $\frac{\partial(\ )}{\partial s} \cdot ds = d'(\ )$ dem totalen Differential $d(\ )$ entspricht, kann man weiterschreiben:

$$\int_{1.2} \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \int_{1.2} c \cdot dc + \int_{1.2} \frac{dp}{\varrho} = - \int_{1.2} de_p \quad ;$$

Für den Fall konstanter Dichte $\varrho(x,y,z) \equiv \text{const}$,was für inkompressible Fluide zutrifft,ergibt sich nach teilweiser Integration :

$$\boxed{-\int_{1.2} \frac{\partial c}{\partial t} \cdot ds + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} + e_{p1} = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{c_2^2}{2} + e_{p2}} \qquad (12\text{-}3).$$

$$\qquad\qquad [+g \cdot z_1] \qquad\qquad [+g \cdot z_2]$$

Es handelt sich hier um die berühmte Formel von Daniel Bernoulli (Hydrodynamica, Straßburg 1738).

Für stationäre Strömungen verschwindet der Term $\int (\partial c/\partial t).ds$, so daß sich Gl.(12-3) vereinfacht zu:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + \underset{[+g.z_1]}{e_{p1}} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + e_{p2} = \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + \underset{[+g.z_2]}{e_p} = \text{Konst}} \quad (12\text{-}4).$$

Multipliziert man alle Glieder einer Gleichungsseite mit der Masse m, so erhält man eine anschauliche Deutung der einzelnen Ausdrücke:

$$\boxed{p.V + \frac{1}{2}.m.c^2 + E_{pot} = E^*} \quad (12\text{-}5).$$

Die Totalenergie längs einer Stromlinie bleibt konstant und setzt sich allgemein drei Energieerscheinungsformen zusammen: aus der Druckenergie, der kinetischen Energie und der potentiellen Energie.

Für das Erdschwerefeld läßt sich nach Gl.(6-2) die potentielle Energie in ihrer massenspezifischen Form angeben zu: $e_p = g.z + \text{const.}$

Deshalb lautet die Formel von Bernoulli auch:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2 = \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + g.z = \text{konst}} \quad (12\text{-}6).$$

Die Energiekonstante $E^*/m = \text{konst}$ ist bei der Potentialbewegung (Abschn. 11.3.3) überall gleich im wirbelfreien Gebiet.

Energieformel (erweiterte Bernoulli-Formel)

Die Bernoulli-Formel ist durch einen Sonderfall beim Integrieren gewonnen worden. Beschränkt man sich beim Integrieren nicht bloß auf eine Stromlinie, sondern gibt man einen beliebigen Integrationsweg vor, so gelangt man zur allgemeinen Energieformel.

In der Bewegungsgleichung (Gl. 12-1) erfährt die Absolutbeschleunigung $d\vec{c}/dt$ eine umfangreiche Umformung.

Man weiß aus obiger Ableitung, daß die kinetische Energie in ihrer massenspezifischen Form $c^2/2$ in der Schlußgleichung von Bedeutung sein wird.-Man bilde deshalb als Vorübung die partielle Ableitung der kinetischen Energie $0{,}5.(c_x^2 + c_y^2 + c_z^2)$ nach der Komponentenrichtung x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2}{2}\right) = c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} \quad .$$

Analoges gilt für die y- und z-Komponenten.
Man erweitert nun die Beschleunigungskomponenten in Gl.(11-13) um solche Glieder,daß in jeder Komponente die partielle Ableitung der kinetischen Energie vorliegt.Das Einfügen von jeweils zwei positiven Ergänzungsausdrücken muß natürlich sofort wieder rückgängig gemacht werden,indem man die addierten Glieder anschließend wieder subtrahiert.Das Ergebnis dieser Manipulation sieht folgendermaßen aus:

$$a_x = \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} - c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} - c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x}$$

$$a_y = \frac{\partial c_y}{\partial t} + c_x \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_y}{\partial z} + c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} - c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial y} - c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial y}$$

$$a_z = \frac{\partial c_x}{\partial t} + c_x \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_z}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial z} + c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z} - c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial z} - c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial z}$$

Die einzelnen Glieder werden nun folgendermaßen zusammengestellt:

$$\boxed{\begin{aligned}
a_x &= \frac{\partial c_x}{\partial t} + \left(c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial x} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial x}\right) + c_y \cdot \left(\frac{\partial c_x}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial x}\right) + c_z \cdot \left(\frac{\partial c_x}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial x}\right) \\
a_y &= \frac{\partial c_y}{\partial t} + \left(c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial y} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial y} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial y}\right) + c_x \cdot \left(\frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y}\right) + c_z \cdot \left(\frac{\partial c_y}{\partial z} - \frac{\partial c_z}{\partial y}\right) \\
a_z &= \frac{\partial c_z}{\partial t} + \left(c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial z} + c_y \cdot \frac{\partial c_y}{\partial z} + c_z \cdot \frac{\partial c_z}{\partial z}\right) + c_x \cdot \left(\frac{\partial c_z}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial z}\right) + c_y \cdot \left(\frac{\partial c_z}{\partial y} - \frac{\partial c_y}{\partial z}\right)
\end{aligned}} \qquad (12\text{-}7)$$

Vergleicht man jetzt obige Gruppierungen mit dem Wirbelvektor nach Gl.(11-44),so folgt unter Berücksichtigung der oben erwähnten partiellen Ableitung der massenspezifischen,kinetischen Energie:

$$a_x = \frac{dc_x}{dt} = \frac{c_x}{t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{c^2}{2}\right) + 2.c_z.\omega_y - 2.c_y.\omega_z \qquad .i$$

$$a_y = \frac{dc_y}{dt} = \frac{\partial c_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{c^2}{2}\right) + 2.c_x.\omega_z - 2.c_z.\omega_x \qquad .j$$

$$a_z = \frac{dc_z}{dt} = \frac{\partial c_z}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{c^2}{2}\right) + 2.c_y.\omega_x - 2.c_x.\omega_y \qquad .k$$

Diese drei Komponentengleichungen faßt man zu einem Vektor zusammen:

$$\boxed{\frac{d\vec{c}}{dt} = \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \text{grad}\left(\frac{c^2}{2}\right) + 2.\vec{\omega} \times \vec{c}} \qquad (12\text{-}8).$$

Diese Gleichung ersetzt in Gl.(12-1) die Absolutbeschleunigung.Beachtet man die bekannte Beziehung $\vec{f} = -\nabla e_p$,so erhält man:

$$\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \nabla\left(\frac{c^2}{2}\right) + 2.\vec{\omega} \times \vec{c} + \frac{\nabla p}{\varrho} = -\nabla e_p \quad .$$

Das ist die umgeformte Kräftebilanzgleichung nach Gl.(12-1).Sie eignet sich nach skalarer Multiplikation mit dem beliebigen Wegelement $d\vec{r}$ dazu,durch Lösung der Linienintegrale die <u>Energieformel in ihrer allgemeinsten Form</u> zu beschaffen:

$$\int_{1.2} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}.d\vec{r} + \int_{1.2} d\left(\frac{c^2}{2}\right) + 2.\int_{1.2} \vec{\omega} \times \vec{c}\,.\,d\vec{r} + \int_{1.2} \frac{dp}{\varrho} = -\int_{1.2} de_p \quad ;$$

$$\boxed{\int_{1.2} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t}.d\vec{r} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + 2.\int_{1.2} \vec{\omega} \times \vec{c}\,.\,d\vec{r} + \int_{1.2} \frac{dp}{\varrho} = e_{p1} - e_{p2}} \quad (12\text{-}9).$$

Im Sonderfall inkompressibler Fluide bei Schwereeinfluß erhält man mit:

$$\int_{1.2} \frac{dp}{\varrho} = \frac{p_2 - p_1}{\varrho} \quad \text{und} \quad e_p = g.z + \text{const} \quad \text{aus Gl.(12-9):}$$

$$\boxed{\int_{1.2} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} . d\vec{r} + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + 2. \int_{1.2} \vec{\omega} \times \vec{c} . d\vec{r} + \frac{p_2 - p_1}{\varrho} = g.(z_1 - z_2)} \tag{12-10}$$

Eine Gegenüberstellung der allgemeinen Bernoulli-Formel (etwa Gl.12-3) und der allgemeinen Energieformel (etwa Gl.12-10) zeigt auf,daß in beiden massenbezogene Energieerscheinungsformen vorkommen und kinetische Energie,Druckenergie und potentielle Energie der Lage heißen. Außerdem ist beiden gemeinsam ein Term,welcher auf die Beschleunigungs-oder Verzögerungsarbeit hinweist:

$$\int_{1.2} \frac{\partial c}{\partial t} . ds \quad \text{und} \quad \int_{1.2} \frac{\partial \vec{c}}{\partial t} . d\vec{r} \quad .$$

Die Bernoulli- und die Energieformel unterscheiden sich also nur in dem Ausdruck $2. \int_{1.2} \vec{\omega} \times \vec{c} . d\vec{r}$, der <u>Wirbelarbeit</u> genannt wird.Das ist die mechanische Arbeit der Kräfte,die von Wirbeln verursacht worden ist.

Die Wirbelarbeit spielt die Hauptrolle beim Exergieaustausch in Strömungsmaschinen zwischen dem Fluid einerseits und der Maschine andererseits.-Der Unterschied der beiden Formeln kann also darin gesehen werden,daß die Bernoulli-Formel nur das Wechselspiel von Beschleunigungs- bzw. Verzögerungsarbeit,kinetischer Energie,Druckenergie und potentiellerEnergie der Lage beschreibt,wobei zwischen zwei Stromlinienpunkten die Gesamtenergie konstant bleibt;die Energieformel gibt darüber hinaus auch noch Auskunft über den Exergieaustausch bzw. Austausch mechanischer Arbeit.

<u>Kurze Diskussion über die Wirbelarbeit</u> (Beispiel siehe besonders Abschn.19):

Der Integrand der Wirbelarbeit (Gl.12-10) heißt $\vec{\omega} \times \vec{c} . d\vec{r}$!-Die geometrische Interpretation führt zu einem Quadervolumen,Bild 12-3.

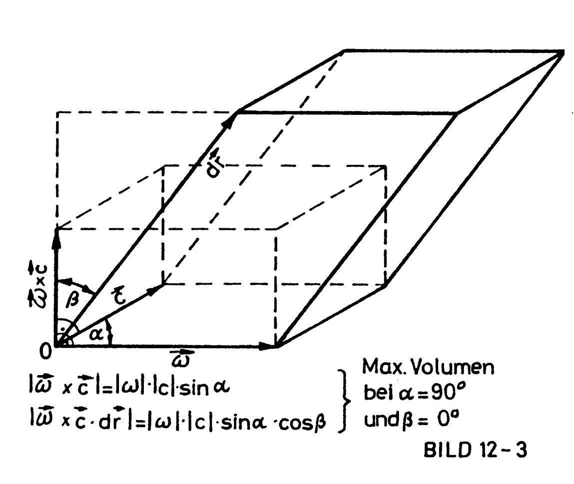


BILD 12-3

Immer wenn das Quadervolumen nicht verschwindet, kommt es zum Exergieaustausch zwischen Fluid und Turbomaschine. Das Quadervolumen und damit auch die ausgetauschte Arbeit wird ein Maximum, wenn die drei Vektoren senkrecht aufeinanderstehen: $\vec{\omega} \perp \vec{c} \perp \vec{dr}$!- Diese Bedingung ist bei der Auslegung von Strömungsmaschinen besonders zu beachten.

Es gibt nun sieben Fälle, bei denen das Quadervolumen null ist, weshalb dann auch kein Exergieaustausch stattfindet:

1.) $\vec{dr} = 0$: es wird momentan nicht integriert;

2.) $\vec{c} = 0$: keine Bewegung, also Ruhezustand;

3.) $\vec{\omega} = 0$: Wirbelfreiheit oder Potentialbewegung;

4.) $\vec{c} \parallel \vec{dr}$: Integration längs einer Stromlinie; es liegt der Sonderfall der Bernoulli-Formel vor;

5.) $\vec{\omega} \parallel \vec{dr}$: Integration längs einer Wirbellinie;

6.) $\vec{c} \parallel \vec{\omega}$: Schraubenbewegung (auch helikoidale Bewegung genannt);

7.) $\vec{c} \parallel \vec{\omega} \parallel \vec{dr}$: Schraubenbewegung, aber die Integration erfolgt hier längs einer Wirbellinie, die sogar identisch ist mit der Stromlinie.

12.2.2. Beispiele

1.Beispiel

Aus einem oben offenen Behälter fließt Wasser durch eine kleine Öffnung aus, Bild 12-4.-Man ermittle die anfängliche Austrittsgeschwindig-

keit, Bild 12-4.-Als Angaben kennt man: $A_1 \gg A_2 = 5\ cm^2$; $h = 1{,}5\ m$; $A_1 = 1\ m^2$.

Lösung:

Bei den nun folgenden Beispielen ist es angebracht, die sogenannte Strömungscharakteristik festzustellen, damit man die geeignete Gestalt der Bernoulli- und der Energieformel schnell im Zugriff hat. Unter der Strömungscharakteristik verstehe man die Abklärung der Fragen nach : der Inkompressibilität oder Kompressibilität, der Stationarität oder Instationarität, der Reibungsfreiheit oder Dissipationsanfälligkeit und schließlich des Energieaustausches, genauer gesagt : des Exergie- bzw. Arbeitsaustausches.

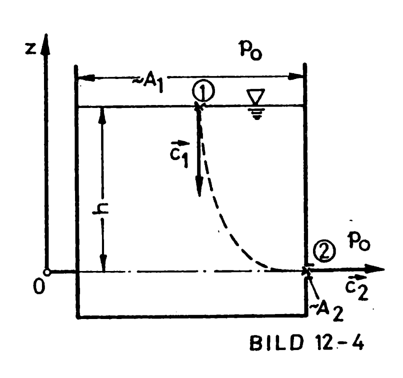


BILD 12-4

Für das vorliegende Beispiel kann man folgende Charakteristik feststellen:
Anfangs quasi-stationär, weil nur die Anfahrphase gemeint ist und $A_1 \gg A_2$ gilt; inkompressibel; reibungsfrei; ohne Arbeitsaustausch!
Damit bietet sich die Bernoulli-Formel in Gl. (12-6) an.
Man wähle eine Stromlinie aus und gebe auf ihr zwei Punkte an, die in Kontrollebenen liegen, wofür möglichst viele Daten bekannt sind. Das sind hier die freie Oberfläche und der Austrittsquerschnitt. Ausserdem ist eine Reverenzebene für die z-Koordinaten zu wählen. Häufig eignet sich der Flächenschwerpunkt des am tiefsten liegenden Strömungsquerschnitts.-Die diesbezügliche Bernoulli-Formel lautet also:

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2 \quad .$$

Nunmehr ist diese Gleichung über die Datenbeschaffung an das Beispiel anzupassen: $p_1 \doteq p_2 = p_0$; $z_1 = h$; $z_2 = 0$; $c_1 = (A_2/A_1).c_2$.
(Gl. 11-20)

Die Datenverwertung ergibt:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2.g.h}{1 - (A_2/A_1)^2}} = \sqrt{\frac{2.9{,}81.1{,}5}{1 - (5.10^{-4}/1)^2}} \quad ; \quad \underline{\underline{c_2 = 5{,}425\ m/s.}}$$

Bemerkungen:

Der sogenannte Einschnürungsfaktor oder Einschnürungskoeffizient $1 - (A_2/A_1)^2$ ist hier mit 1,0000001 vernachlässigbar, so daß sich die Ausflußgeschwindigkeit einfach berechnen läßt mit

$$\boxed{c_2 = \sqrt{2.g.h}} \qquad (12\text{-}11).$$

Das ist aber die berühmte Formel von Torricelli, dem bekanntesten Schüler von Galileo Galilei. Galilei selbst hat eine formal identische Gleichung für den freien Fall ohne Vorgeschwindigkeit gefunden. Gl.(12-11) hätte sich ergeben, wenn man die Absinkgeschwindigkeit $\vec{c}_1$ vernachlässigt hätte.

2. Beispiel

Ein mit Gas gefüllter geschlossener Behälter steht unter dem absoluten Druck $p_1 = 1{,}02$ bar bei einer Gasdichte von $\varrho = 1$ kg/m^3, Bild 12-5. Der Atmosphärendruck beträgt $p_o = p_2 = 1{,}015$ bar.
Man ermittle die anfängliche, quasi-stationäre Austrittsgeschwindigkeit c_2.

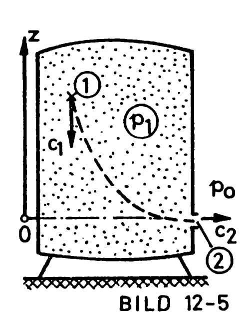


BILD 12-5

Lösung:

Der statische Austrittsdruck p_2 ist deshalb gleich dem Atmosphärendruck, weil in einem Freistrahl der statische Druck nicht größer oder kleiner als der Umgebungsdruck sein kann, denn sonst würde der Strahl zerstieben oder gewellt werden.

Charakteristik: quasi-stationär; inkompressibel wegen sehr geringen Druckunterschieds; reibungsfrei; ohne Arbeitsaustausch; horizontal, weil der geringe Gassäuleneinfluß $\varrho \cdot g.z_1$ vernachlässigbar ist; c_1 ist ebenfalls zu vernachlässigen.

Somit eignet sich Gl.(12-6):

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2 \quad .$$

Setzt man die charakteristischen Daten ein und berücksichtigt man darüberhinaus, daß die Vorgeschwindigkeit sehr klein ist, dann bleibt eine

Beziehung übrig:

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{p_1 - p_o}{\rho}} \qquad (12\text{-}12)\ ,$$

die als die Formel von Bunsen bekannt ist.-Mit Zahlenangaben folgt:

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{1{,}02 - 1{,}015}{1} \cdot 10^5}\ ; \quad \underline{\underline{c_2 = 31{,}62\ \text{m/s}.}}$$

3.Beispiel

In einem Behälter lastet nun ein Gaspolster auf einer Flüssigkeitsschicht,Bild 12-6. Auch hier soll die Austrittsgeschwindigkeit ermittelt werden,aber nur in der Startphase, damit quasi-stationär gerechnet werden kann.-Angaben: $p_2 = p_o = 1{,}015$ bar; $\rho_W = 1000\ \text{kg/m}^3$; $c_1 \approx 0$; $p_1 = 1{,}02$ bar; $z_2 = 0$; $z_1 = h = 1{,}5$ m.

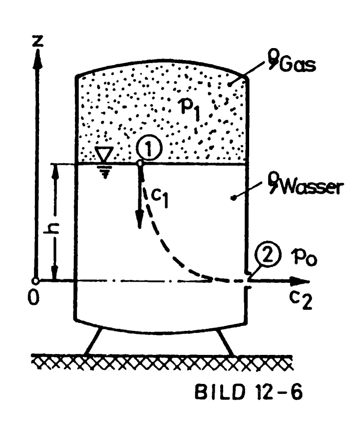


BILD 12-6

Charakteristik: quasi-stationär;inkompressibel;reibungsfrei; ohne Arbeitsaustausch.

Somit folgt aus Gl.(12-6):

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h + 2 \cdot \frac{p_1 - p_o}{\rho_W}} \qquad (12\text{-}13)\ ,$$

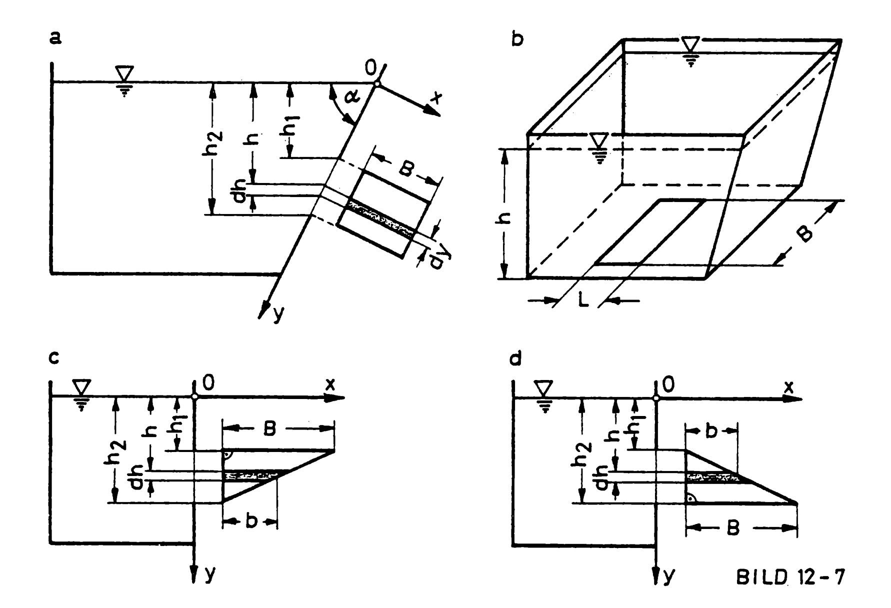
wenn erwartungsgemäß auf den Gassäuleneinfluß $\rho_G \cdot g \cdot\ z$ verzichtet wird,und zwar bei der Angabe des Absolutdruckes in der Ebene 1 (genauer gesagt im Punkt 1 der herausgegriffenen Stromröhre).-Mit Zahlenwerten:

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 1{,}5 + 2 \cdot \frac{1{,}02 - 1{,}015}{1000} \cdot 10^5}\ ; \quad \underline{\underline{c_2 = 5{,}516\ \text{m/s}.}}$$

4.Beispiel

Aus einem großen Wasserbehälter tritt einmal durch drei verschiedene Öffnungen bei ebener Seitenwand und einmal aus dem Boden des Behälters ein Volumenstrom aus.

a) Man ermittle den Volumenstrom für den Fall nach Bild 12-7,Pos. a;
   Angaben: $\alpha = 30^o$; $h_1 = 1{,}5$ m ; $h_2 = 2{,}5$ m ; B = 3 m ;



b) ebenfalls den Volumenstrom bei vertikaler Seitenwand ($\alpha = 90^\circ$) und sonst gleichen Angaben wie unter a);

c) desgleichen ist der Volumenstrom zu ermitteln, nun aber für eine Bodenöffnung nach Bild 12-7, Pos. b.-Angaben: h = 5 m; L = 4 m;

d) die Volumenstromberechnung ist jetzt für eine dreieckige vertikale Seitenwandöffnung nach Bild 12-7, Pos. c, zu bestimmen, und zwar mit den entsprechenden Angaben aus Punkt a);

e) kehrt man die Dreiecksfläche in der Seitenwand um, so daß also die große Kathete des rechtwinkligen Dreiecks unten liegt (Bild 12-7, Pos. d), dann wolle man auch hierfür zu Vergleichszwecken mit d) den Volumenstrom berechnen.

Lösungen:

a) $\dot{V}_a$:

Die wahre Größe der Seitenwandöffnung erhält man dadurch, daß man die Seitenwand um 90° in die Bildebene hineindreht: Ebene Oxy .-

Charakteristik: stationär wegen der relativ großen Oberfläche; diese Aussage gilt exakt, wenn durch Zufluß die Spiegelhöhe gehalten wird;
inkompressibel; reibungsfrei; ohne Arbeitsaustausch.

Für einen relativ großen Strömungsquerschnitt wird die Volumenstromberechnung nach Gl.(11-24) vorgenommen:

$\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}.dA$,worin man ersetzt: $c = c_2 = \sqrt{2.g.h}$ nach Gl.(12-11) , und das Flächenelement heißt $dA = B.dy$.Da die Austrittsgeschwindigkeit senkrecht auf dem Flächenelement steht,

folgt:

$$\dot{V} = \int_{(A)} c.dA = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2.g.h}\,.B\,.\frac{dh}{\sin\alpha} = \frac{B.\sqrt{2.g}}{\sin\alpha}.\int_{h_1}^{h_2} h^{0,5}.dh \quad ;$$

$$\boxed{\dot{V} = \frac{2}{3}.\frac{B.\sqrt{2.g}}{\sin\alpha}.(h_2^{3/2} - h_1^{3/2})} \quad . \qquad (12\text{-}14).$$

<u>In Zahlen:</u>

$$\dot{V} = \frac{2}{3}.\frac{3.\sqrt{2.9,81}}{0,5}.(2,5^{3/2} - 1,5^{3/2}) \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{V}_a = 37,486\ m^3/s}} \quad .$$

b) $\underline{\dot{V}_b}$:

Bei vertikaler Seitenwand ändert sich nur der $\sin\alpha$-Wert von 0,5 in $\sin 90^o = 1$,wodurch sich der Volumenstrom gerade halbiert:

$$\underline{\underline{\dot{V}_b = 18,743\ m^3/s}} \quad .$$

c) $\underline{\dot{V}_c}$:

Für diesen Fall gilt Gl.(12-14) nicht mehr,da wegen $\sin 0^o = 0$ der Volumenstrom den Wert unendlich annehmen würde,was unzulässig ist. Die korrekte Berechnung lautet:

$$\dot{V} = \int_{(A)} c.dA = c\ .\ A = \sqrt{2.g.h}\ .\ B.L \quad ; \quad \text{in Zahlen: } \dot{V} = \sqrt{2.9,81.5}\ .3.4 \quad ;$$

$$\underline{\underline{\dot{V}_c = 118,854\ m^3/s}} \quad .$$

Das Stromrohr entartete hier zu einem Stromfaden,weil die Geschwindigkeit als konstant über den Ausflußquerschnitt angenommen werden durfte.

d) $\underline{\dot{V}_d}$:

Das Volumenstromelement berechnet sich nach Bild 12-7,Pos. c,folgen-

dermaßen: $d\dot{V} = \sqrt{2.g.h} \,.\, b.dh$; bevor der Integralansatz gemacht wird, möge zuerst $b = f(h)$ ermittelt werden! - Die Linearfunktion lautet allgemein:

$b = K_1.h + K_2$.- Für $b = 0$ gilt $h = h_2$; bei $h = h_1$ ist $b = B$. Daraus folgt: $K_1 = -B/(h_2 - h_1)$ und $K_2 = B.h_2/(h_2 - h_1)$. Somit ergibt sich für die gesuchte Linearverteilung:

$$b = \frac{B}{h_2 - h_1} .(h_2 - h)$$; der Ansatz heißt nun:

$$\dot{V} = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2.g.h} \,.\, \frac{B}{h_2 - h_1} .(h_2 - h).dh = \frac{B.\sqrt{2.g}}{h_2 - h_1} .(h_2 . \int_{h_1}^{h_2} h^{\frac{1}{2}}.dh - \int_{h_1}^{h_2} h^{3/2}.dh) \;;$$

$$\dot{V} = \frac{2.B.\sqrt{2.g}}{h_2 - h_1} .(h_2 . \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{3} - \frac{h_2^{5/2} - h_1^{5/2}}{5})$$. In Zahlen:

$$\dot{V} = \frac{2.3.\sqrt{2.9,81}}{2,5 - 1,5} .(2,5 . \frac{2,5^{3/2} - 1,5^{3/2}}{3} - \frac{2,5^{5/2} - 1,5^{5/2}}{5}) \;;$$

$$\dot{V}_d = 8,978 \; m^3/s \; .$$

Bemerkung:

Obwohl die Dreiecksfläche genau halb so groß ist wie unter b), beträgt jetzt der Volumenstrom weniger als die Hälfte, weil im Bereich grösserer Geschwindigkeit weniger Austrittsfläche zur Verfügung steht, was eben für die untere Dreieckszone gilt.

e) $\dot{V}_e$:

Liegt die große Kathete des rechtwinkligen Seitenwandausschnitts unten, wie aus Bild 12-7, Pos. d, hervorgeht, so ändern sich die Randbedingungen für die Linearfunktion $b = f(h)$ in $b = 0$ bei $h = h_1$ und $b = B$ bei $h = h_2$. Daraus folgt:

$$b = \frac{B}{h_2 - h_1} .(h - h_1)$$.- Jetzt lautet der Ansatz erneut:

$$\dot{V} = \int_{h_1}^{h_2} \sqrt{2.g.h} \cdot \frac{B}{h_2 - h_1} .(h - h_1).dh$$; das Ergebnis lautet nun:

$$\dot{V} = \frac{2.B.\sqrt{2.g}}{h_2 - h_1} \cdot \left(\frac{h_2^{5/2} - h_1^{5/2}}{5} - h_1 \cdot \frac{h_2^{3/2} - h_1^{3/2}}{3} \right)$$; in Zahlen:

$$\dot{V}_e = 9{,}765 \ m^3/s \quad .$$

Bemerkung:

Nun gilt $\dot{V}_e > \dot{V}_d$!-Außerdem ist $2.\dot{V}_e > \dot{V}_b$! -Der relative grössere Flächenanteil bei größerer Austrittsgeschwindigkeit im Falle e) erklärt die Überraschung beim Vergleich der Volumenströme $\dot{V}_b$, $\dot{V}_d$ und $\dot{V}_e$.

5.Beispiel

In Bild 12-8,Pos. a,ist noch einmal die Ausflußsituation aus einem großen Behälter gezeigt.Verschiebt man nun die linke Seitenwand weit

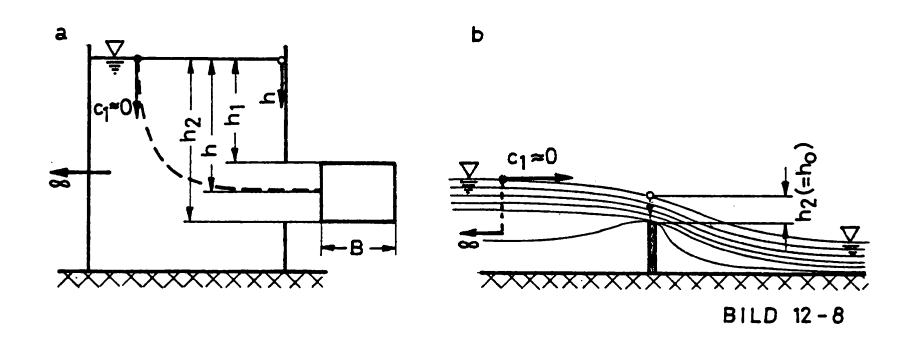


BILD 12-8

weg und läßt gleichzeitig die Tiefe $h_1 \rightarrow 0$ gehen,dann liegt eine Abflußsituation vor,wie sie Bild 12-8,Pos. b,verdeutlicht: Überfallwehr-Strömung.-Man ermittle eine Näherungsgleichung für den Volumenstrom im reibungsfreien Fall.

Lösung:

Die Gl.(12-14) vereinfacht sich mit $\sin\alpha = \sin 90^o = 1$ und $h_1 = 0$ zu:

$$\dot{V} = \frac{2}{3} . B . \sqrt{2.g.h_o^{3/2}} = \frac{2}{3} . B . h_o . \sqrt{2.g.h} = \frac{2}{3} . A . \sqrt{2.g.h_o} \quad (12\text{-}15).$$

An Stelle von h_2 wird nun h_o geschrieben.

Bemerkung:

Der Strömungsquerschnitt ist mit $A = B.h_o$ angegeben.-Die Näherungen liegen darin,daß man den Geschwindigkeitsvektor als senkrecht auf A stehend annahm.Weiterhin ist Gl.(12-14) unter der Voraussetzung abgeleitet worden,daß die Vorgeschwindigkeit c_1 vernachlässigt werden darf.Hier bedeutet dies,daß die Zuströmgeschwindigkeit weit vor dem Wehr (Bild 12-8,Pos. b) unberücksichtigt bleibt.

6.Beispiel

Sollte der Strömungsquerschnitt am Überfallwehr die Form eines rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreiecks annehmen,dann ändert sich natürlich der Koeffizient in Gl.(12-15).-Man ermittle wiederum eine Näherungsformel für den Volumenstrom,Bild 12-9 :

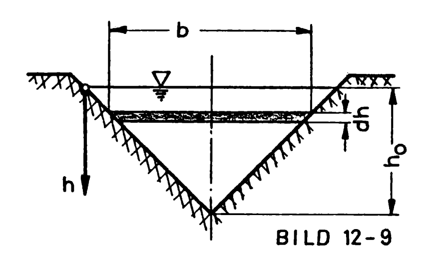


BILD 12-9

Lösung:

$$\dot{V} = \int_0^{h_o} c.b.dh = \int_0^{h_o} \sqrt{2.g.h} \; .2.(h_o - h).dh \; ;$$

Die Integration bringt ein:

$$\dot{V} = \frac{8}{15} . h_o^2 . \sqrt{2.g.h_o} = \frac{8}{15} . A . \sqrt{2.g.h_o} \quad .$$

7.Beispiel

Ein zylindrischer Wasserbehälter dreht sich um seine vertikale Achse mit der Winkelgeschwindigkeit ω_F = 10 rad/s,Bild 12-10.Durch die kleine Bodenöffnung von d = 0,06 m fließt Wasser aus.Im Ruhezustand beträgt die Füllstandshöhe z_o = 0,8 m.Der Innendurchmesser des Behälters beträgt D = 0,5 m (s.Beispiel 4 in Abschn. 9.4,S.146).-Man ermittle:

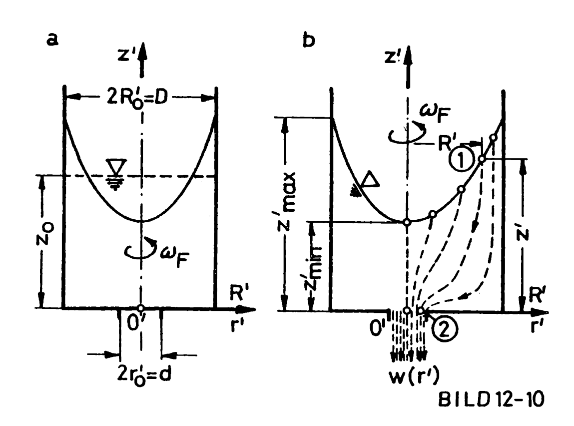


BILD 12-10

a) den relativen Volumenstrom zu Beginn des Ausfließens;
b) ebenso den absoluten Volumenstrom;
c) zum Vergleich den Volumenstrom bei ruhendem Behälter.

Lösungen:

a) $\dot{V}_r$:

Bei rotierendem Behälter befindet sich die Flüssigkeit im relativen Ruhezustand, d.h.: das Fluid ist gegenüber dem bewegten Fahrzeug in Ruhe. Es gilt: $w(x',y',z') \equiv 0$. - Das Volumenstromdifferential am Austritt ermittelt sich aus einem Ringflächenelement $2.\pi.r'.dr'$. Die senkrecht darauf stehende Austrittsgeschwindigkeit heißt $w(r')$:

$$d\dot{V} = 2.\pi.dr' \,.\, w(r') \quad .$$

Die Geschwindigkeiten $w(r')$ sind Stromfäden zugeordnet, wie z.B. dem Stromfaden $\overline{12}$ (Bild 12-10, Pos. b). Also darf man bei ruhender Spiegeloberfläche die Torricellische Formel, Gl. (12-11), verwenden, um die Stromfadenaustrittsgeschwindigkeit $w(r')$ zu berechnen:

$$w(r') = \sqrt{2.g.z'(R')} \,.$$

Die Gleichung für den Oberflächenverlauf entnimmt man dem auf Seite 149 abgehandelten Parallelbeispiel:

$$z' = f(R') = z_0 + \frac{\omega_F^2}{2.g} . (R'^2 - \frac{D}{8}) \quad .$$

In der übernommenen Gleichung mußte nur eine Symbolanpassung vorgenommen werden: $r' \rightarrow R'$!

Die neu aufgetauchte Abhängigkeit $r' = f(R')$ wird näherungsweise entschärft durch die sehr wahrscheinliche Annahme:

$$r'/R' = d/D \quad .$$

Nach Einsetzen aller dieser Zusammenhänge erhält man folgenden Lösungsansatz:

$$\dot{V}_r = 2.\pi.\sqrt{2.g}.\int_0^{d/2}\sqrt{z_o - \frac{\omega_F^2.D^2}{16.g} + \frac{\omega_F^2.D^2}{2.g.d^2}.r'^2}\;.r'.dr' \quad .$$

Substituiert man den Wurzelradikanden durch ρ^2 ,so folgt auch weiterhin: $r'.dr' = \frac{2.g.d^2}{\omega_F^2.D^2}.\rho.d\rho$. Nach der Integration und Resubstitution ergibt sich:

$$\dot{V}_r = \frac{8}{3}.\frac{\pi.g.\sqrt{2.g}.d^2}{\omega_F^2.D^2}.\left(\sqrt{z_o - \frac{\omega_F^2.D^2}{16.g} + \frac{\omega_F^2.D^2}{2.g.d^2}.r'^2}\right)^3\Bigg|_0^{d/2}$$

In Zahlen:

$$\dot{V}_r = \frac{8.\pi.9{,}81.\sqrt{2.9{,}81}.0{,}06^2}{3.10^2.0{,}5^2}.\left(\sqrt{0{,}8 - \frac{10^2.0{,}5^2}{16.9{,}81} + \frac{10^2.0{,}5^2.0{,}03^2}{2.9.81.0{,}06^2}}\right)^3 -$$

$$-\left(\sqrt{0{,}8 - \frac{10^2.0{,}5^2}{16.9{,}81}}\right)^3 \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{V}_r = 0{,}014\ m^3/s.}}$$

b) $\underline{\dot{V}}$:

Die Absolutgeschwindigkeit wird nach Gl.(9-7) angegeben mit $\vec{c} = \vec{v} + \vec{w}$. Bild 12-11 veranschaulicht die kinematischen Zusammenhänge.

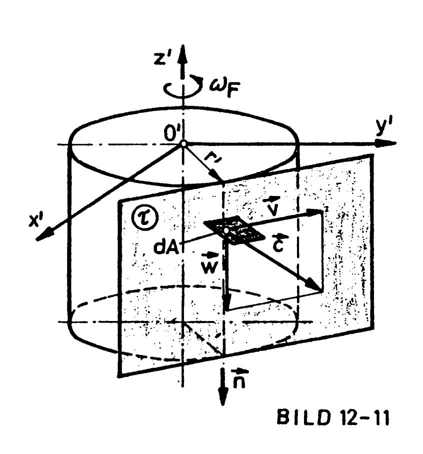


BILD 12-11

Der absolute Volumenstrom ist nach Gl.(11-24):

$$\dot{V} = \int_{(A)} \vec{n}.\vec{c}\,.dA = 2.\pi.\int_0^{d/2} w(r').dr' \;,$$

weil $\vec{n}.\vec{c} = \vec{w}$ ist,Bild 12-11. Der Normalenvektor liegt nämlich in der Tangentialebene τ ,in welcher die Absolutgeschwindigkeit gebildet worden ist. Infolgedessen gilt:

$$\underline{\underline{\dot{V} = \dot{V}_r = 0{,}014\ m^3/s.}}$$

c) $\underline{\dot{V}_o}$:

Der Volumenstrom im Zustand der Ruhe berechnet sich einfach mit:

$$\dot{V}_o = \int_{(A)} c.dA = \sqrt{2.g.z_o} . (\pi/4).d^2 = \sqrt{2.9.81.0,8} . (\pi/4).0,06^2 \quad ;$$

$$\dot{V}_o = 0,0112 \ m^3/s.$$

Bemerkung:

Der effektive austretende Volumenstrom bei rotierendem Behälter ist 25 % größer als bei ruhendem Gefäß.-"Geschirrspüler" drehen aufgrund einer Berufserfahrung die zu spülenden Flaschen,damit das Spülwasser schneller beim Leeren der Flaschen ausströmt!

8.Beispiel

Wasser fließt nach Bild 12-12 aus dem linken Gefäß in das rechte.Es gilt hier zu beachten,daß der bei 2 austretende Wasserstrahl in eine Flüssigzone eindringt.-Angaben: $h_1 = 2,2$ m; $h_2 = 0,9$ m ; d = 0,10 m. Man ermittle:

a) Die Durchtrittsgeschwindigkeit $\vec{c}_2$ in der runden Öffnung;

b) den entsprechenden Volumenstrom.

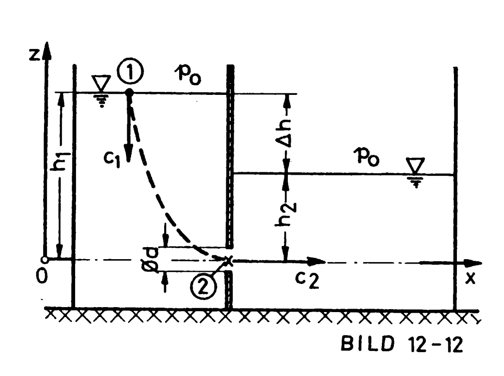


BILD 12-12

Lösungen:

a) $\vec{c}_2$:

Charakteristik: quasi-stationär; inkompressibel; reibungsfrei; ohne Arbeitsaustausch. Infolgedessen notiert man die Energiebilanzgleichung in der Art von Gl.(12-6):

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2 \ .$$

Im Zuge der Problemanpassung kann festgehalten werden:

$p_1 = p_o$; $c_1 = 0$ (Näherung von Torricelli) ; $z_1 = h_1$; $p_2 = p_o + \rho.g.h_2$: Das ist eine sehr wichtige Erkenntnis;die Umgebung,in welche der Strahl eindringt,steht unter diesem absoluten Druck!- $z_2 = 0$.-Unter Beachtung dieser Datenbeschaffung bleibt folgende Beziehung übrig:

$$c_2 = \sqrt{2.g.(h_1 - h_2)} = \sqrt{2.g.\Delta h} \ .$$

In Zahlen folgt: $c_2 = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot (2,2 - 0,9)}$; $\underline{\underline{c_2 = 5,050 \text{ m/s}}}$.

b) $\underline{\dot{V}}$:

Aus der Berechnungsgleichung für die Strömungsgeschwindigkeit ersieht man die überraschende Tatsache,daß die Geschwindigkeit nur von der Spiegeldifferenz abhängt,weshalb die Geschwindigkeit in der Übergangsöffnung überall konstant ist: Man muß nicht über den Querschnitt integrieren im Sinne eines relativ großen Stromrohres,sondern man darf die Methode der Volumenstromberechnung in einem Stromfaden übernehmen, wie es Gl.(11-21) vorschreibt:

$$\dot{V} = c \cdot A = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \cdot (\pi/4) \cdot d^2 = 5,05 \cdot (\pi/4) \cdot 0,1^2 \quad ; \quad \underline{\underline{\dot{V} = 0,0397 \text{ m}^3/\text{s}}}.$$

9.Beispiel

Das Mariottesche Gefäß ist ein geschlossener Behälter,der teilweise mit Luft und teilweise mit einer Flüssigkeit -hier mit Wasser- ausgefüllt wird,Bild 12-13.Außerdem ist ein Belüftungsrohr in die Flüssigzone eingeführt.Auf dem Wasserspiegel lastet der unbekannte Luftdruck p_x .Sobald er sich verringert,weil Flüssigkeit ausfließt und das Gasvolumen zunimmt,wird an der Rohrmündung Atmosphärenluft in Form von Luftblasen hochsteigen und den Druck p_x wieder ansteigen lassen.-Angaben:
$h_o = 0,2$ m; $d = 0,04$ m; $D = 0,4$ m .-Man bestimme:

a) die Ausflußgeschwindigkeit zu Beginn des Ausfließens;
b) die Ausflußgeschwindigkeit bei reduziertem h_x ;
c) den Volumenstrom für beide Fälle.

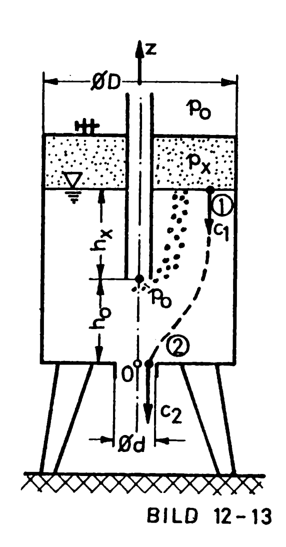


BILD 12-13

Lösungen:

a) $\underline{c_{2a}}$:

Charakteristik: quasi-stationär;inkompressibel;reibungsfrei;ohne Arbeitsaustausch.

Man notiere zunächst die Bernoulli-Formel nach Gl.(12-6) für die anfängliche Austrittsgeschwindigkeit:

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2$$

und vermerke gleichzeitig, daß gilt:

$p_1 = p_x$; $c_1 = (d/D)^4.c_2$ wegen der Kontinuität; $z_1 = h_o + h_x$; $p_2 = p_o$; $z_2 = 0$; $p_o = p_x + \varrho.g.h_x$ (Druckgleichheit an dèr Rohrmündung).-Setzt man diese Daten ein, so bleibt:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2.g.h_o}{1 -(d/D)^4}} \ .$$

In Zahlen:

$$c_2 = \sqrt{\frac{2.9,81.0,2}{1 - (0,04/0,4)^4}} \ ; \quad c_{2a} = 1,981 \text{ m/s} \ .$$

b) c_{2b} :

Da die in a) abgeleitete Gleichung zur Geschwindigkeitsberechnung nur von geometrischen Größen und nicht von der Zeit abhängt, bleibt die Austrittsgeschwindigkeit ständig konstant, solange $h_x \geqq 0$ ist.

$$c_{2a} = c_{2b} = 1,981 \text{ m/s} \ .$$

c) $\dot{V}_a$ und $\dot{V}_b$:

Wegen der Konstanz der Geschwindigkeit darf man wiederum den Volumenstrom mit Gl.(11-21) berechnen:

$\dot{V} = c.A = 1,981 \ . \ (\pi/4).0,04^2$; $\dot{V}_a = \dot{V}_b = 0,00249 \text{ m}^3/\text{s}$.

10.Beispiel

In einen horizontalen Wasserkanal, in dem die Strömungsgeschwindigkeit $c_1(x,y,z) = 1$ m/s vorherrscht, taucht man ein Pitot-Rohr (Hakensonde) bis zur Tiefe $h_o = 0,1$ m ein, Bild 12-14, Pos. a.-Man ermittle:

a) die Wasserstandshöhe h im Pitot - Rohr ;

b) die Bedeutung der Wassersäulendifferenz $h - h_o$;

c) die Höhen h_o und h im Falle, daß als Meßsonde eine Sersche Scheibe benützt wird.

d) Es ist ferner die Frage nachträglich zu beantworten, warum die beiden Geschwindigkeiten c_1 und c_2 bei Anwendung der Serschen Scheibe gleich sind (Bild 12-14, Pos. b).

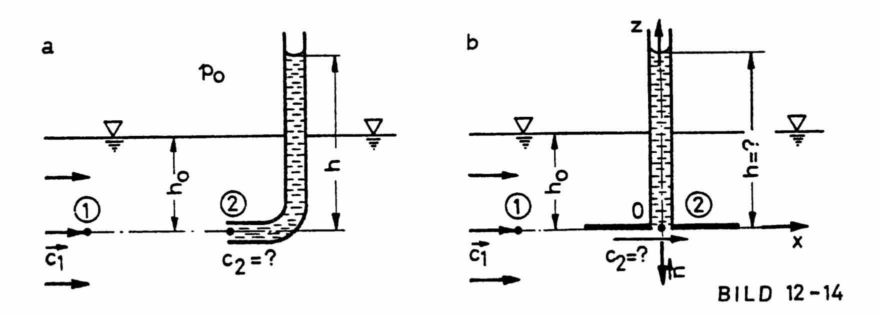


BILD 12-14

<u>Lösungen</u>:

a) <u>h</u> :

Für den Stromfaden $\overline{12}$ stellt man die Bernoulligleichung auf, nachdem die <u>Charakteristik</u> : stationär; inkompressibel; reibungsfrei; ohne Arbeitsaustausch - festgestellt worden ist: Gl. (12-6) :

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2$$

.-Datenbeschaffung: $p_1 = p_o + \rho.g.h_o$; $c = c_1 = 1$ m/s ; $z_1 = z_2 = 0$; $p_2 = p_o + \rho.g.h$; $c_2 = 0$, weil das Wasser nicht durch das Meßrohr fließt!-In 2 liegt ein sogenannter Staupunkt vor. Das Fluid wird bis auf die Geschwindigkeit null abgebremst!-Nach dem Einsetzen erhält man:

$$h = h_o + \frac{c^2}{2.g}\ .\ \text{In Zahlen}: h = 0{,}1 + \frac{1^2}{2.9{,}81}\ ;\quad h = 0{,}151\ \text{m}\ .$$

b) <u>$h - h_o$</u> :

Diese Differenz wird als $c^2/(2.g)$ Geschwindigkeitshöhe genannt. Man kann darunter auch die auf die Gewichtseinheit bezogene kinetische Energie verstehen. Übrigens kann man mit dieser Säulendifferenz die Strömungsgeschwindigkeit errechnen:

$$c = \sqrt{2.g.(h - h_o)} \quad .$$

c) h_o; h :

Das eingetauchte Sondenrohr (Bild 12-14,Pos. b) trägt am Ende eine kreisförmige Scheibe mit Meßbohrung.-Wiederum wird die Energiebilanz längs eines Stromfadens $\overline{12}$ in der bekannten Art aufgestellt.-Datenbeschaffung: $p_1 = p_o + \varrho.g.h_o$; $c_o = c_2 = c$; $z_1 = z_2 = 0$;

$p_2 = p_o + \varrho.g.h$.-Nach dem Einsetzen in die bereits angeführte Bernoulli-Formel bleibt noch übrig:

$$h = h_o \quad .$$

d) c_2 :

Die aufgeworfene Frage läßt sich folgendermaßen beantworten: Wenn man von der Strömungsverfälschung durch das Rohr und den Sondenkörper absieht,müßte c_2 im Falle der Ungleichheit eine x- und eine z-Komponente besitzen: c_{2x} und c_{2z} .Letztere wäre die Durchströmgeschwindigkeit im Meßrohr.Da aber gilt: $\vec{n} \perp \vec{c}$ und $\vec{n} . \vec{c} = 0$,muß $c_{2z} = 0$ sein.

Bemerkungen:

Die dem Bild 12-14 zugrundeliegenden Erkenntnisse veranlaßten L.Prandtl, eine Kombinationssonde zu entwickeln,wie Bild 12-15 sie zeigt.In 1 bildet sich ein Staupunkt aus: $c_1 = 0$. In der Ebene 22 befindet sich ein Ringspalt.Die Geschwindigkeit weit vor der Sonde c_∞ und diejenige in Ebene 22 : c_2 sind genügend genau gleich,wenn die Geschwindigkeitszunahme infolge der endlichen Sondendicke (Verdrängungseffekt) von c_∞ nach c_2 vernachlässigt werden darf.-Wenn man die Gl.(12-6) mit der Dichte multipliziert,dann bekommt jeder Teilausdruck die Dimen-

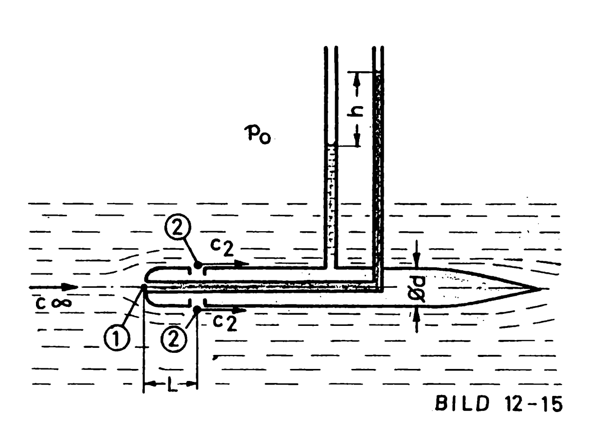


BILD 12-15

sion eines Druckes:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 \quad .$$

Das Symbol p steht für den sogenannten absoluten statischen Druck. Den Ausdruck

$$\boxed{p_k = \frac{\rho}{2} \cdot c^2} \qquad (12\text{-}16)$$

nennt man kinetischen Druck,Geschwindigkeitsdruck oder Staudruck.Beim Abbremsen,wie z.B. in dem Zentralrohr der Prandtlschen Meßsonde (Bild 12-15),wird p_k der ankommenden Strömung zusätzlich in statischen Druck umgewandelt,so daß hiermit die Summe aus dem statischen Druck unmittelbar vor der Sonde und dem Staudruck gemessen wird,weshalb der Summendruck

$$\boxed{p^* = p + p_k = p + \frac{\rho}{2} \cdot c^2} \qquad (12\text{-}17)$$

Gesamt- oder Totaldruck genannt wird.-Obige Bernoulligleichung läßt sich nun umschreiben:

$$p_1 + p_{k1} + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + p_{k2} + \rho \cdot g \cdot z_2 \quad .$$

Bei horizontaler Strömung ist $z_1 = z_2$ (im vorliegenden Sondenfall genügend genau) , so daß auch gilt:

$$\underline{p_1^* = p_2^*} \quad .$$

Voraussetzung hierzu ist natürlich der dissipationsfreie Übergang von 1 nach 2 .Im Punkte 1 wird der Totaldruck gemessen: p_1^* . Über den ringförmigen Meßspalt wird p_2 ,also der statische Druck in der Ebene 22 ,gemessen:

$$\underline{p_1^* = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2} \quad !$$

Über die Differenzdruckmessung $\rho \cdot g \cdot h$ läßt sich jetzt die Geschwindigkeit ermitteln:

$$\boxed{c_\infty = \sqrt{2 \cdot \frac{(p_1^* - p_2)}{\rho}} = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}} \qquad (12\text{-}18) .$$

In einem inkompressiblen Fluid ändert sich die Dichte während des Abbremsvorganges in Staupunktnähe nicht,wohl aber bei Abbremsung aus hoher Geschwindigkeit.Die Dichte steigt von der freien Strömung vor der Sonde an bis zum Staupunktszustand.Deshalb wird nicht $(\varrho/2).c_\infty^2$ gemessen,sondern ein größerer Wert,der als

$$p_{dyn} = \varepsilon \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot c_\infty^2 = \varepsilon \cdot p_k \qquad (12\text{-}19)$$

dynamischer Druck genannt werden möge.Der Faktor ε ist größer eins. Seine Ermittlung wird in Abschn. 21.5.2 (2. Beispiel) vorgeführt.

Untersuchungen Prandtls ergaben für die optimale Sondengeometrie u.a.: $L \approx 3.d$.

11.Beispiel

Bild 12-16 zeigt das Prinzip eines Venturi-Rohres.Die statischen Drücke p_1 und p_2 werden mittels Wandbohrungen erfaßt und über eine Ringleitung dem Meßkanal zugeführt.Im jeweiligen Ringsammler entsteht ein physikalischer Mittelwert.-Über eine Differenzdruckmessung kann auf den Volumenstrom geschlossen werden.

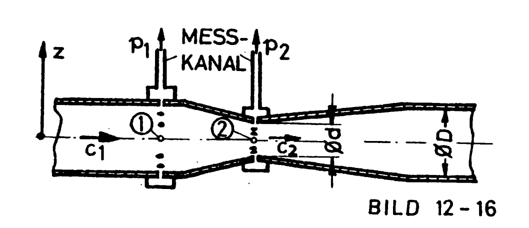


BILD 12-16

Angaben: d = 0,05 m; D = 0,16 m; $p_1 - p_2$ = 0,5 bar.
Man ermittle für Wasserstr.:
a) die Geschwindigkeit in der Rohrleitung;
b) den Volumenstrom.

Lösungen:

a) c_1 :

Man greife die Stromlinie $\overline{12}$ heraus und stelle,wie üblich,die Energiebilanz auf nach Gl.(12-6):

$p_1/\varrho + c_1^2/2 + g.z_1 = p_2/\varrho + c_2^2/2 + g.z_2$ und beachte,daß $z_1 = z_2 = 0$ ist:

$$(p_1 - p_2)/\varrho = (c_2^2 - c_1^2)/2 \quad .$$

Aus der Kontinuitätsbedingung,Gl.(11-20),folgt: $c_2 = (D/d)^2.c_1$.
Damit ergibt sich schließlich:

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{p_1 - p_2}{(D/d)^4 - 1}} \quad . \text{ In Zahlen:}$$

$$c_1 = \sqrt{\frac{2}{10^3} \cdot \frac{0{,}5.10^5}{(0{,}16/0{,}05)^4 - 1}} \quad ; \quad \underline{\underline{c_1 = 0{,}981 \text{ m/s}}} \quad .$$

b) $\underline{\dot{V}}$:

Gl.(11-21) : $\dot{V} = A.c = (\pi/4).D^2.c_1 = (\pi/4).0{,}16^2$; $\underline{\underline{\dot{V} = 10{,}045 \text{ m}^3/\text{s}}}$.

12.Beispiel

Aus einem Wassergefäß fließt Medium ab,wie es die Anordnung in Bild 12-17 verdeutlicht.Nach der Bodenöffnung vom Querschnitt A_2 schließt sich ein Austrittsdiffusor an.-Angaben: h = 2 m; L = 0,8 m ; D = 0,16m; d = 0,12 m ; $p_o = 1{,}015.10^5$ Pa ; Wassertemperatur $t = 20^oC$:

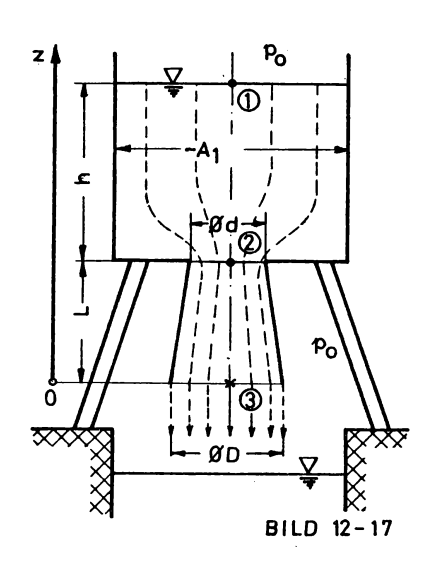


BILD 12-17

a) die Austrittsgeschwindigkeit c_3 am Anfang der Bewegung;
b) den Volumenstrom;
c) den statischen absoluten Druck in der Bodenöffnung p_2 ;
d) die gleichen Größen,nur ohne Austrittsdiffusor.
e) Besteht bereits die Gefahr der Kavitation in der Bodenöffnung?

Lösungen:

a) $\underline{c_3}$:

Für die vertikale Stromlinie $\overline{123}$ wird Gl.(12-6) angewandt:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{c_1^2}{2}+g.z_1=\frac{p_2}{\rho}+\frac{c_2^2}{2}+g.z_2=\frac{p_3}{\rho}+\frac{c_3^2}{2}+g.z_3.$$

Datenbeschaffung für den Fall,daß die Bernoulli-Formel zwischen den Kontrollebenen 1 und 3 eingesetzt wird: $p_1 = p_3 = p_o$; $c_1 \approx 0$ (Torricellische Näherung); $z_1 = h + L$; $z_3 = 0$ .Es folgt:

$c_3 = \sqrt{2.g.(h + L)}$.-In Zahlen: $c_3 = \sqrt{2.9,81.2,8}$; $c_3 = 7,412$ m/s .

b) $\dot{V}$:

Gl.(11-21): $\dot{V} = A_3.c_3 = (\pi/4).D^2.c_3 = (\pi/4).0,16^2.7,412$;

$$\dot{V} = 0,149 \text{ m}^3/\text{s} \quad .$$

c) p_2 :

Erstreckt man die Bernoulli-Formel zwischen den Stromlinienpunkten 1 und 2 ,dann erhält man wiederum nach Vernachlässigung von c_1 für den statischen Druck p_2 :

$$p_2 = p_o + \varrho .g.h - (\varrho/2).c_2^2 \quad .$$

Setzt man c_2 über die Volumenstromberechnung $c_2 = \dot{V}/A_2$ ein, dann ergibt sich:

$$p_2 = p_o + \varrho .g.h - (\varrho/2).(V/A_2)^2$$. In Zahlen:

$$p_2 = 1,015.10^5 + 10^3.9,81.2 - (10^3/2).[(4.0,149/(\pi.0,12^2)]^2$$

$$p_2 = 0,3434 \text{ bar.}$$

d) c_{20} ; $\dot{V}_0$; p_{20} :

Ohne Austrittsdiffusor gilt: $c_3 = c_{20}$ für $L = 0$; damit folgt:

$c_{20} = \sqrt{2.g.h} = \sqrt{2.9,81.2}$; $c_{20} = 6,264$ m/s .

Der Volumenstrom beträgt:

$\dot{V} = (\pi/4).0,12^2$; $\dot{V}_0 = 0,0708$ m^3/s .

Endlich ist auch $p_{20} = p_o = 1,015$ bar.

e) Kavitationsgefahr:

Der Dampfdruck des Wassers lautet für $t = 20^oC$: $p_{Dampf} = 0,02337$ bar. (Vgl. Abschn. 2.5).-Der Kavitationsdruck liegt nach Bild 2-3 etwas darüber.-Ein praktischer Näherungswert ist $p_K \approx 0,025$ bar .Da der Druck p_3 (Beispielposition c) etwa 13,7mal größer ist als der Kavitationsdruck p_K ,besteht keine Kavitationsgefahr.

Bemerkung: Der Austrittsdiffusor heißt bei Wasserturbinen auch noch Saugdiffusor.Er legt an die engste Stelle einen

niedrigeren Druck.Deshalb fließt mehr Fluid durch die Anlage!

13.Beispiel

Durch Einfügen eines Steigrohres in die engste Stelle eines Venturirohres erhält man einen Injektor,wie er zu Mischzwecken in der Verfahrenstechnik Verwendung findet,Bild 12-18.Folgende Systemdaten sind bekannt: $\dot{V} = 0{,}05\ m^3/s$; $D = 0{,}2\ m$; $d = 0{,}1\ m$; $d' = 0{,}05\ m$; Dichte des Treibmediums $\rho = 1000\ kg/m^3$;Dichte des angesaugten Mediums $\rho' = 1{,}3.10^3\ kg/m^3$; $h = 1\ m$; $p_2 = 0{,}05$ bar ;p_o=1,015 bar. Man bestimme:

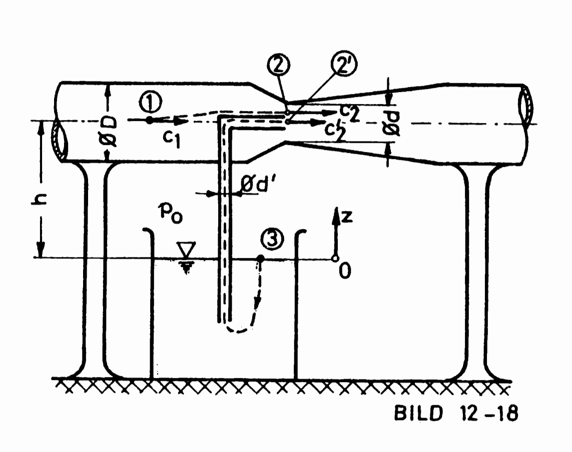


BILD 12-18

a) den angesaugten Massenstrom im Steigrohr $\dot{m}'$;

b) den gesamten Massenstrom $\dot{m}^*$;

c) den Massenanteil des angesaugten Fluids in der Mischung;

d) die Strömungsgeschwindigkeit c_1 ;

e) den absoluten statischen Druck p_1 .

Lösungen:

a) $\dot{m}'$:

Gl.(12-6) für die Passage $\overline{32'}$: $p_3/\rho' + c_3^2/2 + g.z_3 = p_2'/\rho' + c_{2'}^2/2 + g.z_2'$.

Datenbeschaffung: $p_3 = p_o$; $c_3 = 0$; $z_3 = 0$; $p_2' = p_2$; $z_2' = z_2$.

Die Datenverwertung ergibt:

$$c_2' = \sqrt{2.\left(\frac{p_o - p_2}{\rho'} - g.h\right)} \quad . \quad \text{In Zahlen:}$$

$$c_2' = \sqrt{2.\left(\frac{1{,}015.10^5 - 0{,}05.10^5}{1300} - 9{,}81.1\right)} \ ; \qquad \underline{\underline{c_2' = 11{,}35\ m/s}} \ .$$

Gl.(11-17) : $\dot{m}' = \rho'.A'.c_2' = 1300.(\pi/4).0{,}05^2.11{,}35$;

$$\underline{\underline{\dot{m}' = 28{,}974\ kg/s}} \ .$$

b) $\dot{m}^*$:

$\dot{m}^* = \dot{m} + \dot{m}' = \varrho . \dot{V} + \dot{m}' = 1000.0,05 + 28,974$; $\dot{m}^* = 78,974$ kg/s.

c) $x = m'/m^*$:

Das Massenverhältnis darf nach der Regel von de l'Hospital auch über das Verhältnis der Massenströme berechnet werden:

$$x = \frac{\dot{m}'}{\dot{m}^*} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta m'/\Delta t}{\Delta m^*/\Delta t} \right] ; \text{ in Zahlen : } x = \frac{28,974}{78,974} ; \quad x = 0,367 .$$

d) c_1 :

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt: $\dot{V} = A.c_1$;

$$c_1 = \frac{4.\dot{V}}{\pi . D^2} = \frac{4.\ 0,05}{\pi .0,2^2} ; \qquad c_1 = 1,5915 \text{ m/s} .$$

e) p_1 :

Gl.(12-6) für die Passage $\overline{12}$: $\frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2$;

Datenbeschaffung: $z_1 = z_2$; $c_2 = 4.\dot{V}/(d^2 - d'^2).1/\pi$.

$$c_2 = \frac{4.0,05}{\pi.(0,1^2 - 0,05^2)} ; \quad c_2 = 8,488 \text{ m/s}$$

; aus der Bernoulligleichung ergibt sich: $p_1 = p_2 + \frac{\varrho}{2}.(c_2^2 - c_1^2)$; in Zahlen:

$$p_1 = 0,05.10^5 + \frac{1000}{2}.(\ 8,488^2 - 1,5915^2) ; \quad p_1 = 0,3976 \text{ bar} .$$

14.Beispiel

Ein oben offenes Gefäß ist bis zur Höhe $z_1 = 1,8$ m mit Wasser gefüllt.Durch eine kleine Bodenöffnung kann Wasser ausfließen,Bild 12-19. Der sich einstellende Strömungsvorgang kann von vornherein als instationär deklariert werden.Die Ableitungen dürfen in diesem Zusammenhang ohne die in der Energiebilanzgleichung vorhandene Verzögerungsarbeit vorgenommen werden.-Man ermittle:

a) die Auslaufzeit t_a ,bis der Wasserspiegel sich auf eine Spiegelhöhe $z_3 = 0,3$ m abgesenkt hat; Gefäßdurchmesser $D = 1,2$ m;Durch-

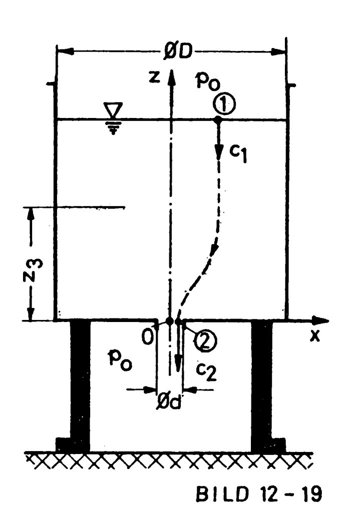


BILD 12-19

messer der Bodenöffnung d = 0,06 m;

b) die Zeit t_b für vollständige Entleerung des Gefäßes;

c) Abschätzung, ob die Vernachlässigung der Verzögerungsarbeit zu Recht besteht.

Lösungen:

a) t_a :

Charakteristik: instationär; inkompressibel; reibungsfrei; ohne Arbeitsaustausch.- Also bietet sich Gl.(12-3) als Energiebilanzgleichung an:

$$-\int_{1,2} \frac{\partial c}{\partial t} . ds + \frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} + g . z_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{c_2^2}{2} + g . z_2 .$$

Macht man jetzt Gebrauch von der zugestandenen Vernachlässigung der spezifischen Verzögerungsarbeit und erinnert man sich auch der Torricellischen Vereinfachung (siehe 1.Beispiel), dann erhält man eine Beziehung für die variable Austrittsgeschwindigkeit:

Datenbeschaffung: $p_1 = p_2 = p_o$; $z_1 = z$ (variabel!); $z_2 = 0$:

$$\boxed{c_2 = \sqrt{2.g.z}} .$$

Die weitere Lösungsphilosophie lautet: Die Volumenabnahme im Behälter ist gleich dem durch die Öffnung 2 abgeflossenen Wasser. Oder: Der Volumenstrom in 1 ist gleich dem in 2 .

$$\dot{V}_1 = A_1 . c_1 = \dot{V}_2 = A_2 . c_2 \quad ;$$

$$\boxed{D^2 . c_1 = d^2 . c_2} \; ;$$

Die Sinkgeschwindigkeit des Wasserspiegels c_1 wird folgendermaßen angegeben: $\boxed{c_1 = - dz/dt}$.

(Das Minuszeichen muß hier stehen, weil sich der Weg in negativer Richtung ändert). Jetzt liegt eine Differentialgleichung vor:

$$d^2 . \sqrt{2.g.z} = - D^2 . \frac{dz}{dt}$$; nach Trennung der Variablen folgt:

$$\boxed{dt = - \left(\frac{D}{d}\right)^2 . \frac{dz}{\sqrt{2.g.z}}}$$; die bestimmte Integration ergibt:

$$t = -\frac{D^2}{d^2 \cdot \sqrt{2.g}} \int_{z_1}^{z_2} z^{-1/2} .dz \quad ; \quad t = \left(\frac{D}{d}\right)^2 . \frac{2}{\sqrt{2.g}} .\left(\sqrt{z_1} - \sqrt{z_2}\right) .$$

In Zahlen:

$$t_a = \left(\frac{1,2}{0,06}\right)^2 . \frac{2}{\sqrt{2.9,81}} .\left(\sqrt{1,8} - \sqrt{0,5}\right) \quad ; \quad t = 114,6 \text{ s} = 1 \text{ min } 54,6\text{s}.$$

b) t_b :

Hierfür ist $z_2 = 0$ einzusetzen: $t_b = 242,31$ s = 4 min 2,31 s .

c) Nachweis für die berechtigte Vernachlässigung der Verzögerungsarbeit :

Die maximale Geschwindigkeitsänderung an der Stelle 2 ist

$c_2 = \Delta c = \sqrt{2.9,81.1,8} = 5,94$ m/s .Die gesamte Zeit,die für die Geschwindigkeitsabnahme zur Verfügung steht beträgt $t_b = 242,31$ s. Somit stellt sich an der Stelle 2 eine Lokalverzögerung ein von

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{5,94}{242,31} = 0,0245 \text{ m/s}^2$$

.Wenn man nun diesen Wert als konstant längs der Stromlinie 12 vorgibt,dann liegt man an der oberen Grenze,weil alle übrigen Lokalverzögerungen um den Faktor $D^2/d^2 = 400$ darunterliegen.-Der Maximalbetrag der massenspezifischen Verzögerungsarbeit lautet nun:

$$\int \frac{\partial c}{\partial t} .ds = \frac{\partial c}{\partial t} \int_{z_1}^{z_2} ds = \frac{\partial c}{\partial t} . z_1 = 0,0245.1,8 = 0,0441 \text{ m}^2/\text{s}^2.$$

Nimmt man aus der Energiebilanzgleichung z.B. das Glied $g.z_1$ zum Vergleich: $g.z_1 = 9,81.1,8 = 17,658$ m²/s² ,so fällt auf,daß die vernachlässigte Verzögerungsarbeit in diesem Vergleich nur 2,5 ‰ ist.Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht!

15.Beispiel

Aus einer gefüllten Badewanne fließt das Wasser durch die Bodenöffnung aus,Bild 12-20,Pos. a.Von einem bestimmten Grenzniveau h_G an

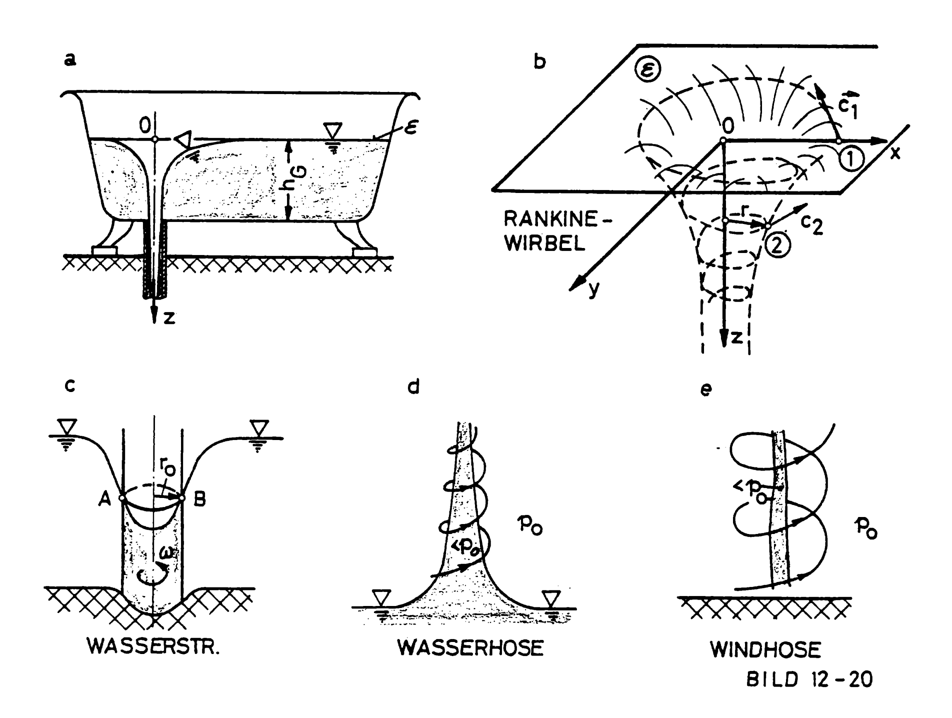


BILD 12-20

entsteht ein rotierender Wassertrichter,der Wasserstrudel oder Rankine-Wirbel heißt.- Man ermittle:

a) den Verlauf der freien Oberfläche,die Gleichung also der Meridianlinie;

b) den Oberflächenverlauf für den Fall eines in einem Flußlauf entstandenen Strudels;

c) Erläuterungen zum Phänomen der Wasser- und Windhose.

Lösungen:

a) $z = f(r)$:

Die horizontale Referenzebene heißt ε .Man betrachte das Geschehen längs einer Stromlinie $\overline{12}$ auf der freien Oberfläche.Die Bernoulli-Formel,Gl.(12-6) wird angeschrieben:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.\ z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2$$

; Datenbeschaffung : $p_1 = p_2 = p_0$; $c_1 = 0$ (Vereinfachung von Torricelli); $z_1 = 0$; $z_2 = -z$;

$c_2^2 = c_{2z}^2 + c_{2u}^2 \approx c_{2u}^2$,weil die Vertikalkomponente c_{2z} vernachlässigt werden möge; die Umfangs- oder Drallkomponente der Geschwindigkeit ergibt sich aus Gl.(11-52),womit die induzierte Geschwindigkeit $c_i = c_{2u}$ berechnet werden kann: $c_{2u} = \Gamma/(2.\pi.r)$. Aus der Bernoulli-Formel bleibt noch übrig (Bild 12-20,Pos. b) :

$$\frac{p_o}{\varrho} = \frac{p_o}{\varrho} + \frac{\Gamma^2}{8.\pi^2.r^2} - g.z \qquad \text{oder}$$

$$z = \frac{\Gamma^2}{8.g.\pi^2.r^2} = \frac{\Gamma^2}{8.g.\pi^2.(x^2 + y^2)} .$$

Das ist aber die Gleichung eines Rotationshyperboloids,dessen Meridianlinie die Gleichung:

$$z = \frac{\text{Konst}}{r^2} \qquad \text{besitzt.}$$

b) <u>z = f(r) in Flußstrudel</u> :

Durch eine unegale Grube am Flußboden (Bild 12-20,Pos. c) entsteht beim Überfluten eine unsymmetrische Ausfüllströmung,die allmählich in Rotation gerät.
Von der Wasseroberfläche an gerechnet bis hin zur Horizontalebene AB, gilt die obige Feststellung des hyperbolischen Verlaufs!-Dieser Bereich des Rankine-Wirbels ist nach Abschn. 11.3.3 ein Potentialwirbel. Nun aber beginnt wegen der nicht mehr zu vernachlässigenden Reibung die Zone eines Kernwirbels! -Deshalb liegt ein Oberflächenverlauf nach Gl.(9-21) vor.Die Oberfläche nimmt jetzt die Form eines Rotationsparaboloids an.
Der Rankine-Wirbel setzt sich nunmehr aus einem Potentialwirbel- und einem Kernwirbelbereich zusammen.

c) <u>Wasser- und Windhose</u> :

Man kennt auch Luftstrudel (Tornado).-An der Grenze des Wirbelkerns ist die induzierte Geschwindigkeit am größten (vgl. Bild 11-26).Für einen Punkt einer Oberflächenstromlinie muß dort neben der größten Geschwindigkeit auch der kleinste Druck vorliegen,weshalb der Umgebungsdruck p_o einmal z.B. Wasser in dem Wirbelschlauch hochdrückt (Bild 12-20,Pos. d: Wasserhose) oder Blätter,Dachziegel usw. wie im Falle einer Windhose (Bild 12-20,Pos. e).

16.Beispiel

In einem U-Rohr, Bild 12-21, Pos. a, ist eine Flüssigkeit eingefüllt. Die Rohrnennweite wird mit d und die Flüssigfadenlänge mit L bezeichnet.- Wenn nun die Flüssigkeitssäule zur Zeit $t = 0$ plötzlich um ein gewisses Maß z_o ausgelenkt würde, dann entstünden Schwingungen.

Man ermittle:

a) die Schwingungsgleichung für den reibungsfreien Fall;

b) die Schwingungsdauer.

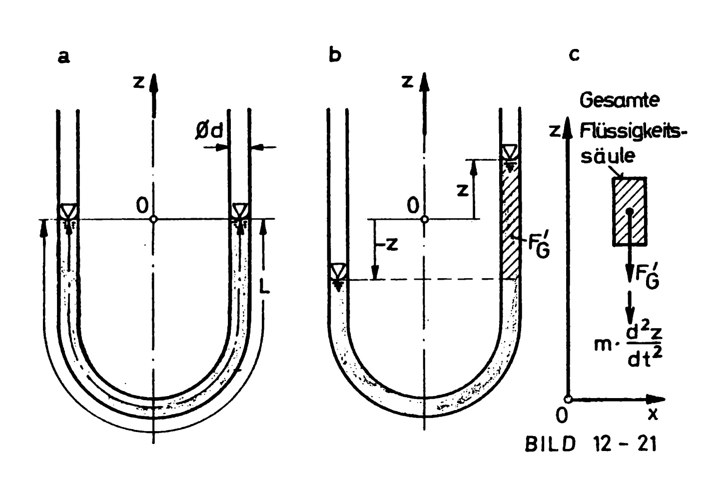


BILD 12 - 21

Lösungen:

a) $z = f(t)$:

Die Angaben bei beliebiger Auslenkung zeigt Bild 12-21, Pos. b. Schwingungen entstehen, wenn eine rücktreibende Kraft vorhanden ist und sich ein ständiges Wechselspiel von potentieller und kinetischer Energie anbietet.-Das dynamische Gleichgewicht für eine ruhende Ersatzmasse ist in Bild 12-21, Pos. c, angedeutet. Nach dem d'Alembert-Prinzip, etwa Gl. (8-7), folgt:

$$\sum F_{iz} = - m.\frac{d^2z}{dt^2} - F_G' = 0 \quad ;$$

Datenbeschaffung: die Masse des Flüssigkörpers beträgt : $(\pi/4).d^2.L.\rho$; die rücktreibende Gewichtskraft ist nur: $2.z.(\pi/4).d^2.\rho.g$! - Daraus folgt:

$$-\frac{\pi.d^2}{4}.L.\rho.\frac{d^2z}{dt^2} - 2.z.\frac{\pi.d^2}{4}.\rho.g = 0 \quad ;$$

es ergibt sich die Differentialgleichung der harmonischen Schwingungen:

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{2.g}{L}.z = 0 \quad .$$

Nach den Ausführungen auf Seite 120 und 128 sieht die Lösung dieser Dgl. folgendermaßen aus:

$$z = z_o . \sin(\omega . t + \varphi_1) \text{ oder}$$

$$z = z_o . \cos(\omega . t + \varphi_2) .$$

Es ist $\omega^2 = 2.g/L$.

b) Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2.\pi}{\omega} = 2.\pi . \sqrt{\frac{L}{2.g}} .$$

Sie ist umso größer, je länger der Flüssigfaden ist.

17. Beispiel

Ein Tantal-Gefäß, Bild 12-22, wird mit einem konstanten Volumenstrom $\dot{V}_o$ versorgt. Wenn der Wasserspiegel das Niveau 1 erreicht, springt der Ablaßheber (Siphon) an, und der Wasserspiegel fällt bis zum Niveau 2 ab. Dort gelangt Luft in die Abflußleitung, so daß das Ausströmen unterbunden ist.-Der konstante Volumenstrom füllt das Gefäß wieder bis zum Niveau 1 . Man ermittle:

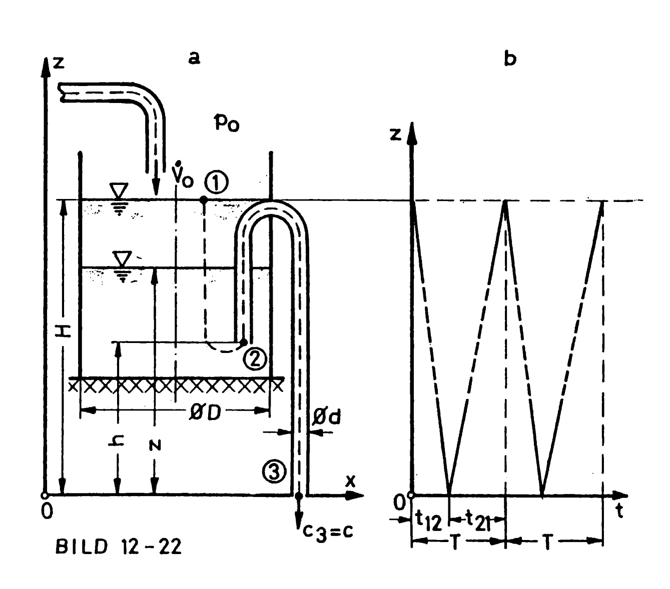


BILD 12-22

a) die Füllzeit t_{21} ;
b) die Strömungsgeschwindigkeit im Abflußrohr in allgemeiner Form und beim Beginn des Ausströmens;
c) die Entleerungszeit t_{12} ;
d) eine kurze Beschreibung der periodischen Bewegung.

Angaben: $D = 0{,}3$ m ; $d = 0{,}04$ m ; $H = 1{,}5$ m ; $h = 0{,}6$ m ; $\dot{V}_o = 0{,}002$ m^3/s; die Rohrwandstärke ist zu vernachlässigen!

Lösungen:

a) t_{21} :

Gl.(11-21): $\dot{V}_o = A.c_{21} = \frac{\pi}{4}.D^2 . \frac{H-h}{t_{21}}$; $t_{21} = \frac{\pi.D^2}{4}.\frac{H-h}{\dot{V}_o}$;

in Zahlen: $t_{21} = \frac{\pi}{4} . 0{,}3^2 . \frac{1{,}5 - 0{,}6}{0{,}002}$; $\underline{\underline{t_{21} = 31{,}81 \text{ s}}}$.

b) $c_3 = c$: Charakteristik : instationär;reibungsfrei;ink.;o.A.A.

Bei der Anwendung der Bernoulligleichung berufe man sich auf die Kontrollebenen 1-3 ,Gl.(12-3):

$$-\int_{1.3} \frac{\partial c}{\partial t} . ds + \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_3}{\rho} + \frac{c_3^2}{2} + g.z_3 \quad ;$$

Datenbeschaffung: Die Verzögerungsarbeit möge vernachlässigt werden (später ist eine Fehlerabschätzung vorzunehmen); $p_1 = p_3 = p_o$; $z_1 = z$; $c_3 = c$; $z_3 = 0$. Somit folgt:

$$\boxed{c_1^2 = c^2 - 2.g.z} \qquad (a).$$

Eine Volumenstrombilanz hilft weiter:

$$\dot{V}_3 = \dot{V}_o + \frac{\pi}{4}.(D^2 - d^2) = \frac{\pi}{4}.d^2.c;$$

$$\boxed{c_1 = \frac{d^2}{D^2 - d^2}.c - \frac{4.\dot{V}_o}{\pi.(D^2-d^2)}} \qquad (b).$$

Mit Hilfe dieser beiden Bestimmungsgleichungen ergibt sich die gesuchte Beziehung $c = f(z)$.

Zur Auflösung der Gleichung nach Einsetzen von (a) in (b) hält man z zunächst als Parameter konstant.Die Lösung der quadratischen Gleichung lautet:

$$c = -\frac{\dfrac{4.\dot{V}_o.d^2}{\pi.(D^2-d^2)^2}}{1-\dfrac{d^4}{(D^2-d^2)^2}} + \sqrt{\frac{\dfrac{16.\dot{V}_o^2.d^4}{\pi^2.(D^2-d^2)^4}}{\left[1-\dfrac{d^4}{(D^2-d^2)^2}\right]^2} + \frac{2.g.z+\dfrac{16.\dot{V}_o^2}{\pi^2.(D^2-d^2)^2}}{1-\dfrac{d^4}{(D^2-d^2)^2}}} \; ;$$

in Zahlen:

$$c = -5,2.10^{-4} + \sqrt{8,3.10^{-3} + 19,6264.z} \qquad (c).$$

$$c = -A + \sqrt{B + C.z} \qquad (d).$$

$$c = 5,426 \text{ m/s für } z = 1,5 \text{ m}.$$

c) t_{12}:

Die Kontinuitätsgleichung (b) läßt sich auch noch folgendermaßen weiterschreiben:

$$c_1 = -\frac{dz}{dt} = \frac{d^2}{D^2-d^2}.c - \frac{4.\dot{V}_o}{\pi.(D^2-d^2)} \qquad (e).$$

Setzt man (d)in (e) ein,dann ergibt sich nach Trennung der Variablen nachstehende Differentialgleichung:

$$dt = \frac{(D^2-d^2).dz}{d^2.(-A+\sqrt{B+C.z}) - (4/\pi).\dot{V}_o} \; ;$$

Die Integration wird folgendermaßen vorgenommen:

$$t_{12} = \frac{D^2-d^2}{d^2}\int_h^H \frac{dz}{\sqrt{B+C.z} - \underbrace{(A+\frac{4.\dot{V}_o}{\pi.d^2})}_{=a}} = \frac{D^2-d^2}{d^2}\int_h^H \frac{dz}{\sqrt{B+C.z} - a} \; ;$$

Mit der Substitution $u = \sqrt{B + C.z}$ folgt $u^2 = B + C.z$ und $2.u.du=C.dz$, was zu $dz = (2/C).u.du$ führt:

$$t_{12} = \frac{D^2-d^2}{d^2}\int_h^H \frac{2}{C}.\frac{u.du}{u-a} = \frac{D^2-d^2}{d^2}.\frac{2}{C}\int_h^H (1+\frac{a}{u-a}).du \; ;$$

$$t_{12} = \frac{2}{C} \cdot \frac{D^2-d^2}{d^2} \Big[u + a.\ln(u-a) \Big]_h^H = \frac{2}{C} \cdot \frac{D^2-d^2}{d^2} \cdot \Big[\sqrt{B+C.z} + a.\ln(\sqrt{B+C.z} - a) \Big]_h^H$$

$$t_{12} = \frac{2}{C} \cdot \frac{D^2-d^2}{d^2} \cdot \left(\sqrt{B+C.H} - \sqrt{B+C.h} + a.\ln \frac{\sqrt{B+C.H} - a}{\sqrt{B+C.h} - a} \right) .$$

In Zahlen:

$$a = 5{,}2.10^{-4} + \frac{4.0{,}002}{\pi .0{,}04^2} = 1{,}5921 \quad m/s \quad .$$

$$t_{12} = \frac{2}{19{,}6264} \cdot \frac{0{,}3^2-0{,}04^2}{0{,}04^2} \cdot \Big(\sqrt{8{,}3.10^{-3} + 19{,}6264.1{,}5} -$$

$$\sqrt{8{,}3.10^{-3} + 19{,}6264.0{,}6} + 1{,}5921.\ln \frac{\sqrt{8{,}3.10^{-3}+19{,}6264.1{,}5} - 1{,}5921}{\sqrt{8{,}3.10^{-3}+19{,}6264.0{,}6} - 1{,}5921} \Big)$$

$$t_{12} = 17{,}8 \quad s \quad .$$

d) Kurzbeschreibung der periodischen Bewegung:

Die Schwingungsdauer beträgt

$$T = t_{12} + t_{21} = 49{,}61 \ s \quad .$$

Es handelt sich um eine unharmonische Schwingung,da die Halbperioden verschieden sind.

Bemerkungen:

Tankstellen waren früher mit Zwillings-Tantal-Gefäßen als Volumenzähler ausgerüstet.

Eine ganz grobe Abschätzung des Fehlers aufgrund der Vernachlässigung der Verzögerungsarbeit $\int_{4.3} \frac{\partial c}{\partial t} .ds$ ergibt bei der Annahme einer mittleren Geschwindigkeitsabnahme von $c(z=H)/2 = 5{,}426/2 = 2{,}713$ m/s in der Zeit $t_{12} = 17{,}8$ s längs des Weges $s_{13} = 3{,}3$ m einen Wert von $0{,}5\ m^2/s^2$ für die massenspezifische Verzögerungsarbeit.Bezieht man sie auf den diesbezüglichen größten spezifischen Energieanteil

$g.z_1 = 9{,}81.1{,}5 = 14{,}715\ m^2/s^2$, so kann man sagen,daß die Totalenergie im Stromfaden etwa 3% zu groß angesetzt worden ist.

18.Beispiel

Ein Sprühwagen fährt auf ebener Straße,Bild 12-23.An seinem rechten Ende tritt aus ihm ein Wasserstrahl bei stationärer Strömung aus mit der Relativgeschwindigkeit $w = 0{,}5$ m/s .Die Austrittsöffnung beträgt $A = 0{,}04\ m^2$.-Man ermittle den absoluten Volumenstrom bei einer Fahrzeuggeschwindigkeit von $v = 1$ m/s bezüglich der Kontrollebene BB - sie befinde sich etwa 0,05 m außerhalb der Austrittsöffnung - für den Fall, daß

a) das Fahrzeug sich nach rechts und
b) nach links bewegt. - Man beachte besonders die Ausführungen zu Gl.(11-19).

Lösungen:

a) $\dot{V}_{rechts}$:

Die Absolutgeschwindigkeit lautet hier nach Gl.(9-7) betragsmäßig:

$$c = v_r + w = 1 + 0{,}5 = \underline{1{,}5\ m/s}.$$

Den absoluten Volumenstrom erhält man dann mit Gl.(11-21) zu:

$$\dot{V}_{rechts} = A.c = 0{,}04\ .\ 1{,}5\ ;\quad \underline{\underline{\dot{V}_{rechts} = 0{,}06\ m^3/s}}.$$

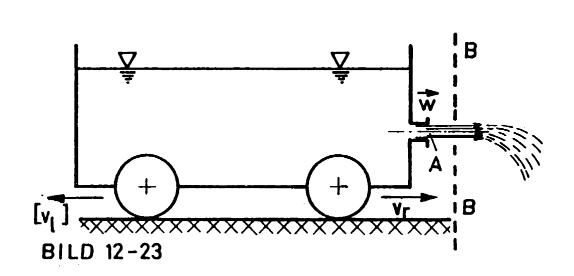


BILD 12-23

b) $\dot{V}_{links}$:

Sinngemäß erhält man hier für die Absolutgeschwindigkeit

$c = v_1 - w = 1 - 0{,}5$; $\underline{c = 0{,}5\ m/s}$.

Damit folgt für den absoluten Volumenstrom in diesem Fall:

$$\dot{V}_{links} = A.c = 0{,}04\ .\ 0{,}5\ ;\quad \underline{\underline{\dot{V}_{links} = 0{,}02\ m^3/s}}.$$

Bemerkungen:

In beiden Bewegungszuständen versteht sich der relative Volumenstrom ohne weiteres: Es handelt sich um den direkt das Fahrzeug verlassenden Volumenstrom.-Bei der Bewegung nach rechts schiebt sich der Wasserstrahl um die Fahrzeuggeschwindigkeit schneller durch die Kontroll-

ebene hindurch, weshalb der absolute Volumenstrom zunehmen muß. Im anderen Fall nimmt das Fahrzeug seinen Wasserstrahl mit, so daß eben weniger den Kontrollquerschnitt passiert.

12.3. Impulssätze (Euler, 1754)

12.3.1. Kräfte

Aus den drei Newtonschen Hauptsätzen der allgemeinen Mechanik: dem Trägheitsgesetz, der Proportionalität zwischen Kräften und Beschleunigungen bezüglich desselben beweglichen Körpers und dem Wechselwirkungsgesetz resultiert die Hauptgleichung für die Translation:

$$\boxed{\frac{d\,(m.\vec{c})}{dt} = \frac{d\vec{I}}{dt} = \sum \vec{F_i}} \qquad (12\text{-}20).$$

Die Größe

$$\boxed{\vec{I} = m.\vec{c} = \int_{(m)} dm.\vec{c} = f\,(t,s)} \qquad (12\text{-}21)$$

heißt Impulsvektor und muß in der Fluidmechanik als Integral angeschrieben werden, weil jedes Massenelement dm eine andere Geschwindigkeit im Kontrollraum haben kann.-Unter Kontrollraum versteht man die in die Betrachtung einbezogene und abgegrenzte Fluidmasse.-Die Weiterentwicklung der beiden letzten Gleichungen bringt für die Fluidmechanik folgende Zusammenhänge:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \frac{d}{dt}\int dm.\vec{c} = \int \frac{d(dm)}{dt}.\vec{c} + \int dm.\frac{d\vec{c}}{dt} = \int \frac{d}{dt}(\varrho.dV).\vec{c} + \int (\varrho.dV).(\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \vec{c}.\frac{\partial c}{\partial s}) = \sum \vec{F_i} \;;$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int \left[\frac{d\varrho}{dt}.dV + \varrho.\frac{d(dV)}{dt}\right].\vec{c} + \int (\varrho.dV).(\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \vec{c}.\frac{\partial c}{\partial s}) = \int (\frac{d\varrho}{dt}.dV + \varrho.\dot{dV}).\vec{c} + \int (\varrho.dV).(\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \vec{c}.\frac{\partial c}{\partial s})$$

da $\varrho = f(t,s)$ ist, folgt für $d\varrho = \frac{\partial \varrho}{\partial t}.dt + \frac{\partial \varrho}{\partial s}.ds$; weiterhin gilt dann:

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \underbrace{\int \frac{\partial \varrho}{\partial t}.\vec{c}.dV}_{\text{fällt weg, da stationär}} + \int \vec{c}.\frac{\partial \varrho}{\partial s}.c.dV + \underbrace{\int \varrho.\vec{c}.\dot{dV}}_{=\int \dot{dm}.\vec{c}} + \underbrace{\int \varrho.\frac{\partial \vec{c}}{\partial t}.dV}_{\text{fällt weg, da stationär}} + \int \varrho.\vec{c}.\frac{\partial c}{\partial s}.dV = \sum \vec{F_i} \;;$$

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{(V)} (\frac{\partial \varrho}{\partial s}.c + \varrho.\frac{\partial c}{\partial s}).\vec{c}.dV + \int_{(\dot{m})} \dot{dm}.\vec{c} = \int_{(V)} \frac{\partial(\varrho.c)}{\partial s}.(\vec{c}.dV) + \int_{(\dot{m})} \dot{dm}.\vec{c} = \sum \vec{F_i} \quad .$$

(Die Integrationsbereiche sind aus Platzgründen nur in der letzten Zeile angegeben worden.)

Wegen der Stationarität können die einzelnen Größen in den Integranden nur noch vom Weg s abhängig sein und nicht mehr von der Zeit t :

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \iint \vec{c}.dA.ds.\frac{\partial(\rho.c)}{\partial s} + \int d\dot{m}.\vec{c} = \int \vec{c}.ds.\frac{\partial}{\partial s}\underbrace{(\rho.c.dA)}_{= d\dot{m}} + \int d\dot{m}.\vec{c} = \sum \vec{F}_i \quad ;$$

wegen der Stationarität verschwindet zudem die konvektive Änderung des Massenstromes, so daß die zeitliche Änderung des Impulses für stationäre Strömungen nur noch lautet:

$$\boxed{\frac{d\vec{I}}{dt} = \int_{(\dot{m})} d\dot{m} \,.\, \vec{c} = \sum \vec{F}_i} \qquad (12\text{-}22).$$

Aus Gründen der Kontinuität ($\dot{m}_1 = \dot{m}_2$) folgt für einen Kontrollraum mit nur einem Eintritt und einem Austritt, wie es Bild 12-24 angibt:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i = \dot{m} \,.\, (\vec{c}_2 - \vec{c}_1) = \vec{\dot{I}}_2 - \vec{\dot{I}}_1} \qquad (12\text{-}23) \;,$$

wenn man mit

$$\boxed{\vec{\dot{I}} = \dot{m} \,.\, \vec{c}} \qquad (12\text{-}24)$$

die Größe des Impulsstromes einführt.-

Üblicherweise wird der Impulssatz für stationäre Strömungen dadurch abgeleitet, daß man von einem ruhenden Beobachtungsbereich (in Bild 12-24 gepunktet) mit nur einem Ein- und Austritt ausgeht und die zeitliche Änderung des Impulses des hindurchfließenden Fluids untersucht.

<u>Für das dünne Stromrohr (Stromfaden) gilt:</u>

In Bild 12-24 wird ein gekrümmter Stromfaden mit den beiden Querschnitt 1 und 2 gezeigt. Die einbezogene Fluidmasse ist m_{12} . In S , ihrem Schwerpunkt, trifft man auf die Schwerpunktgeschwindigkeit $\vec{c}$. nach dem Zeitintervall Δt befindet sich die Masse m_{12} nunmehr zwischen den Kontrollebenen 1'2': $m_{12} = m_{1'2'}$. Die Schwerpunktsgeschwindigkeit in S' heißt jetzt $\vec{c'}$. Beiden Massenbereichen ist die Teilmasse $m_{1'2}$ (punktiert) mit ihrem Schwerpunkt S" und ihrer Schwerpunktsgeschwindigkeit $\vec{c''}$ gemeinsam.

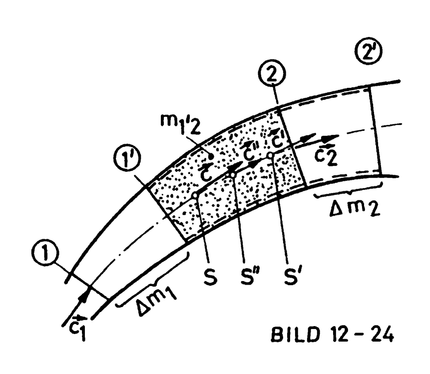


BILD 12-24

Die Weiterentwicklung von Gl.(12-22) ergibt hierfür:

$$\frac{d(m.\vec{c})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{1'2'}.\vec{c'} - m_{12}.\vec{c}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{m_{1'2}.\vec{c''} + \Delta m_2.\vec{c_2} - (\Delta m_1.\vec{c_1} + m_{1'2}.\vec{c''})}{\Delta t} = \sum \vec{F_i}$$

$$\frac{d(m.\vec{c})}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m_2.\vec{c_2} - \Delta m_1.\vec{c_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varrho_2.A_2.c_2.\Delta t.\vec{c_2} - \varrho_1.A_1.c_1.\Delta t.\vec{c_1}}{\Delta t} = \sum \vec{F_i} \;;$$

schließlich erhält man daraus:

$$\underline{\underline{\sum \vec{F_i}}} = \dot{m}_2 \cdot \vec{c_2} - \dot{m}_1 \cdot \vec{c_1} = \dot{m} \cdot (\vec{c_2} - \vec{c_1}) = \underline{\underline{\vec{\dot{I}_2} - \vec{\dot{I}_1}}} \;,$$

was zu beweisen war!

Die Differenz der Impulsströme bedeutet eine Massenträgheitskraft und gehört damit in die Familie der Widerstandskräfte.Der Trägheitseffekt ist bei einer stationären Strömung in der konvektiven Beschleunigung oder Verzögerung zu suchen;wegen der Stationarität fallen Lokalbeschleunigungen und Lokalverzögerungen weg!

Sind im weiteren Verlauf der Abhandlungen Kräfte gefragt,dann wird praktisch immer vom Gleichgewicht am Kontrollraum ausgegangen.

Wendet man die Philosophie des d'Alembertschen Prinzips auch für einen fluidischen Körper an (dynamisches Gleichgewicht am freigemachten fluidischen Körper,der ruhender Ersatzkörper genannt werden kann),dann folgt in Verallgemeinerung bei mehreren ein- und austretenden Impulsströmen folgende, allgemein gültige Generalgleichung:

$$\sum \vec{F_i} - \sum \vec{\dot{I}_{2i}} + \sum \vec{\dot{I}_{1i}} = 0 \quad .$$

Danach behalten bei einer Gleichgewichtsbetrachtung die eintretenden Impulsströme als Kraftwirkung auf den Kontrollraum ihre Richtung bei. Austretende Impulsströme dagegen wirken mit ihrer Reaktion auf den im Gleichgewicht befindlichen Kontrollraum zurück.Somit gilt:

$$\underline{\underline{\vec{\dot{I}'_{2i}} = - \vec{\dot{I}_{2i}}}} \quad .$$

Aus diesen Erkenntnissen heraus lautet der Impulssatz stationärer Strömungen

$$\sum \vec{F_i} + \sum \vec{\dot{I}_1} + \sum \vec{\dot{I}_2'} = 0 \qquad (12\text{-}25).$$

Schlüsselt man $\sum \vec{F_i}$ noch auf, so kommen hierfür folgende Kraftarten in Betracht (vgl. ebenso Abschn. 4) :

(1) Äußere Massenkraft : hier nur die Schwerkraft $\vec{F_G}$;

(2) Druckkräfte $\vec{F_p}$; sie sind bezüglich des freigemachten Kontrollraumes immer als Stützreaktionen zu werten und sind deshalb auf den Kontrollraum gerichtet. Sie rühren einmal her von der Einwirkung fester Wände und zum anderen von der losgetrennten fluidischen Nachbarschaft (z.B.: Kontrollebene 1 und 2 in Bild 12-24).

(3) Tangentialkräfte aufgrund von Reibungswirkungen. Bei vollkommenen Fluiden sind sie bekanntlich null.

Von Linienkräften (Kapillarkräften) wird nachfolgend Abstand genommen.

Es ist festzuhalten:

An einem fluidischen Körper (Kontrollraum) halten sich, sofern ein vollkommenes Fluid vorliegt, folgende Kräfte das dynamische Gleichgewicht: die Schwerkraft, Druckkraftreaktionen, eintretende Impulsströme und die Reaktionen austretender Impulsströme.

<u>Für die praktische Verwendung der Gl.(12-25) beachte man</u>:

(1) Sie gilt nur für stationäre Strömungen.
(2) Sie gilt auch für reibungsbehaftete Strömungen, weil bei der Ableitung keine Einschränkungen dieser Art vorgenommen worden sind.
(3) Die Kontrollraumbegrenzungen sind vorteilhaft so anzulegen, daß nach Möglichkeit feste Wände, Stromlinien und Normalen dazu geholt werden.
(4) Druckkräfte sind stets senkrecht auf die Kontrollflächen gerichtet.
(5) Eintretende Impulsströme und die Reaktionen der austretenden sind auf den Kontrollraum hin gerichtet.
(6) Die Untersuchungen sagen nichts über das Geschehen im Inneren des Kontrollraumes aus. Es können nur Beobachtungen über die Verhältnisse an der Oberfläche des Kontrollraumes angestellt werden.

Für das dicke Stromrohr gilt:

Überlegungen, die für einen Stromfaden angestellt worden sind und zu Gl.(12- 23) geführt haben, gelten jetzt für die Masse dm, Bild 12-25. Integriert man über die gesamte Kontrollraummasse, dann folgt:

$$\boxed{\int_{(\dot{m})} d\dot{m}.(\vec{c}_2-\vec{c}_1) = \sum \vec{F}_i} \qquad (12\text{-}26).$$

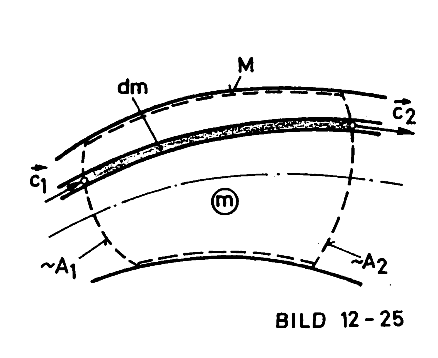


BILD 12-25

Für den dynamischen Gleichgewichtsfall eines Stromrohres läßt sich notieren:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i - \int_{(\dot{m})} d\dot{m}.(\vec{c}_2-\vec{c}_1) = 0} \qquad (12\text{-}27).$$

Wenn man $d\dot{m}$ durch $\rho.d\dot{V}$ ersetzt, ergibt sich ein Volumenintegral, das bekanntlich auch in ein Oberflächenintegral umwandeln läßt. Dann heißt der Integrationsbereich: Mantelfläche des Stromrohres M, Kontrollquerschnittsflächen A_1 und A_2.

Für den Volumenbereich gilt:

Rückt die Fläche A_2 in Richtung A_1, dann verschwindet die Mantelfläche, und die Untersuchungen sind dann völlig unabhängig von einem Stromrohr:

$$\boxed{\sum \vec{F}_i - \int_{(\dot{V})} \vec{c}.\rho.d\dot{V} = 0} \qquad (12\text{-}28).$$

12.3.2. Momente

Aufgrund der einleitenden Bemerkungen zu Abschn. 12.3.1 (S.265) ergibt sich auch für die Rotation eine Hauptgleichung:

$$\boxed{\frac{d\,(\vec{r} \times m.\vec{c}\,)}{dt} = \frac{d\vec{D}}{dt} = \sum \vec{M}_i} \qquad (12\text{-}29).$$

Die Größe $$\boxed{\vec{r} \times m.\vec{c} = \vec{D}}$$ (12-30)

heißt Impulsmoment oder Drall. Seine zeitliche Änderung wird durch die Einwirkung von Momenten verursacht und heißt kinetisches Moment. Da wegen der Fluidität (vgl. Abschn. 1.2, S.4) keine Momente übertragen werden können, sind Momenteneffekte nur in Verbindung fester Wände usw. möglich.

Bei stationärer Strömung und konstanter Momenteneinwirkung folgt aus Gl.(12-29):

$$\int_{1.2} d\,(\vec{r} \times m.\vec{c}) = \sum \vec{M_i} \,.\int_{1.2} dt$$; der Radiusvektor geht von einem Momentenbezugspunkt 0 aus. Es ist danach:

$$\vec{r_2} \times m.\vec{c_2} - \vec{r_1} \times m.\vec{c_1} = \Delta t \,.\sum \vec{M_i}$$ oder

$$\boxed{\vec{r_2} \times \dot{m}.\vec{c_2} - \vec{r_1} \times \dot{m}.\vec{c_1} = \sum \vec{M_i}} \quad (12\text{-}31).$$

Im Falle des dynamischen Gleichgewichtes gilt:

$$\boxed{\sum \vec{M_i} - \vec{r_2} \times \dot{m}.\vec{c_2} + \vec{r_1} \times \dot{m}.\vec{c_1} = 0} \quad (12\text{-}32).$$

Ist der Momentenbezugspunkt gleich dem Drehpunkt, dann gilt:

$$\boxed{\sum M_i - \dot{m}.c_{2u}.r_2 + \dot{m}.c_{1u}.r_1 = 0} \quad (12\text{-}33).$$

Analoge Betrachtungen sind anzustellen bei einem dicken Stromrohr und im Volumenbereich. Im wesentlichen interessieren die Zusammenhänge bei einer Stromfadenströmung.

12.3.3. Beispiele

1. Beispiel

Ein von Wasser durchströmter, horizontal gelagerter Rohrkrümmer wird in Bild 12-26 gezeigt. - Angaben: $d_1 = 0{,}2$ m ; $d_2 = 0{,}1$ m; $\alpha = 35^\circ$; $\beta = 45^\circ$; $c_1 = 2$ m/s ; $r = 0{,}25$ m; $p_{1ü} = 0{,}2$ bar. - Man ermittle:

a) den Volumenstrom $\dot{V}$ bei stationärer Strömung;

b) die Strömungsgeschwindigkeit c_2;

c) den statischen Überdruck $p_{2ü}$;

d) die Impulsströme am Ein- und Austritt $\vec{\dot{I}}_1$ und $\vec{\dot{I}}_2$,wobei es sich um eine Stromfadenströmung handeln möge (also enges Stromrohr!), was eine Vereinfachung darstellt;

e) die Überdruckkräfte $\vec{F}_{pü1}$ und $\vec{F}_{pü2}$;

f) die gleichgewichtshaltende Kraft $\vec{F}'_W$; sie wirkt von der Wand auf den Kontrollraum und ist als Stützreaktion zu verstehen aufgrund der Druckverteilung entlang der Rohrinnenwand. Man bestimme diese Kraft der Größe, Richtung und Lage nach auf grafische Art;

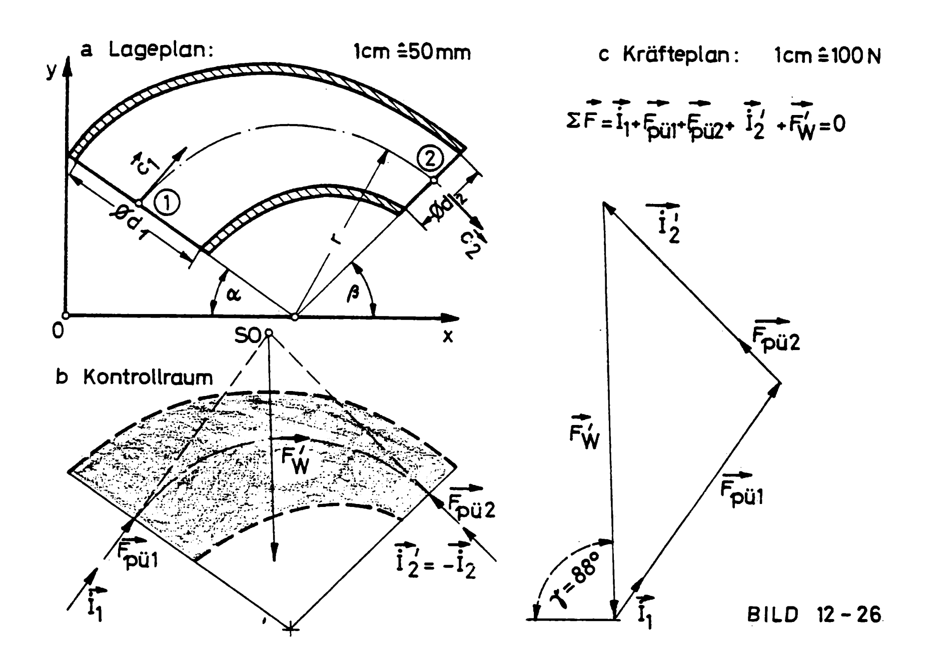
g) ebenso auf rechnerische Art;

h) die Kraftwirkung auf die Wand F_W .

Lösungen:

a) $\dot{V}$:

Der Volumenstrom berechnet sich einfach mit Gl.(11-21):



$$\dot{V} = A_1 . c_1 = (\pi/4) . d_1^2 . c_1 = (\pi/4) . 0{,}2^2 . 2 = \underline{\underline{0{,}0628\ m^3/s}}.$$

b) c_2 :

Die Kontinuitätsgleichung nach Gl.(11-20) ergibt: $c_1 . d_1^2 = c_2 . d_2^2$;

$$c_2 = 2.(0{,}2/0{,}1)^2 = \underline{\underline{8\ m/s}} \ ;$$

c) $\underline{p_{2ü}}$:

Die Strömungscharakteristik lautet: stationär;inkompressibel;reibungsfrei;ohne Arbeitsaustausch;horizontal.-Damit kommt die Bernoulligleichung nach Gl.(12-6) zum Zuge:

$$\frac{p_{1ü}+p_o}{\varrho}+\frac{c_1^2}{2}+g.z_1=\frac{p_{2ü}+p_o}{\varrho}+\frac{c_2^2}{2}+g.z_2$$,was mit $z_1=z_2$ ergibt:

$$p_{2ü}=p_{1ü}+\frac{c_1^2}{2}-\frac{c_2^2}{2};\quad p_{2ü}=0{,}2.10^5+\frac{2^2}{2}-\frac{8^2}{2};\quad \underline{\underline{p_{2ü}=0{,}1997\text{ bar.}}}$$

d) $\underline{\vec{\dot I}_1\ ;\ \vec{\dot I}_2}$:

Impulsströme berechnen sich nach Gl.(12-23):

$$\dot I=\varrho.A.c^2;\quad \dot I_1=1000.(\pi/4).0{,}2^2.2^2;\quad \underline{\underline{\dot I_1=125{,}66\text{ N}}};$$

$$\dot I_2=1000.(\pi/4).0{,}1^2.8^2;\quad \underline{\underline{\dot I_2=502{,}65\text{ N}}}.$$

e) $\underline{\vec F_{pü1}\text{ und }\vec F_{pü2}}$:

$$F_{pü1}=(\pi/4).0{,}2^2.0{,}2.10^5;\qquad \underline{\underline{F_{pü1}=628{,}32\text{ N}}};$$

$$F_{pü2}=(\pi/4).0{,}1^2.0{,}1997.10^5;\qquad \underline{\underline{F_{pü2}=156{,}84\text{ N}}}.$$

f) $\underline{\vec F'_W}$ <u>(grafische Lösung)</u> :

Zur Ermittlung von F'_W gehe man von einer Gleichgewichtsaufgabe aus. Alle am Kontrollraum einwirkenden Kräfte halten sich das Gleichgewicht: Aussage der Gl.(12-25),auch Impulssatz stationärer Strömungen genannt. Nach dem Erstarrungsprinzip betrachtet man den Kontrollraum,der nach der dritten Regieanweisung von Seite 268 (unten) so ausgewählt worden ist,wie es Bild 12-26,Pos. b,zeigt,als einen augenblicklichen Festkörper,so daß die Erkenntnisse aus der Statik für Festkörper entsprechende Anwendung finden,wie z.B.:

- Drei Kräfte können sich nur das Gleichgewicht halten,wenn ihre Wirkungslinien sich in einem Punkte schneiden und wenn das Krafteck sich schließt.
- Ist der Körper im Gleichgew. ,dann ist es auch jeder herausgetrennte,freigemachte Einzelteil.
- Die Kraft F'_W ist die unbekannte gleichgewichtshaltende Kraft von der Wand auf den Kontrollraum;die entgegengesetzt

wirkende, gleich große Kraft $\vec{F}_W = -\vec{F}'_W$ ist die Kraft, die vom Kontrollraum, also vom Fluid aus, auf die Wand wirkt.

- Ist die Kraft $\vec{F}_W$ gesucht, dann empfiehlt es sich, zuerst die Gleichgewichtsaufgabe zu lösen und zum Abschluß der Aufgabenlösung einfach den Richtungssinn umzukehren!

Den in der grafischen Statik üblichen maßstabsgetreuen Lageplan findet man in Bild 12-26, Pos. b. Die vier bekannten Kräfte: $\vec{\dot{I}}_1$; $\vec{F}_{pü1}$; $\vec{\dot{I}}_2$ und $\vec{F}_{pü2}$ werden angelegt. In Bild 12-26, Pos. c, ist dann der maßstabsgetreue Kräftezug angegeben. Das Krafteck wird von der gesuchten Kraft $\vec{F}'_W$ geschlossen. Damit liegen Größe und Richtung der Kraft fest:

$F'_W = 1095\ N$ bei $\gamma = 88^o$ (in den IV. Quadranten wirkend). - Verschiebt man nun diesen Kraftvektor parallel zu sich, bis er durch den Schnittpunkt SO im Lageplan hindurchgeht, dann kennt man auch die Lage der Wirkungslinie von $\vec{F}'_W$ (Bild 12-26, Pos. b). - Nunmehr kehrt man den Richtungssinn von $\vec{F}'_W$ um : Das Ergebnis ist die gesuchte Kraftwirkung auf den Rohrkrümmer $\vec{F}_W$! - (Vorgriff von h)).

g) $\vec{F}'_W$ (rechnerische Lösung) :

Da ein zentrales Kräftesystem vorliegt (Schnittpunkt SO), schreiben sich die beiden rechnerischen Gleichgewichtsbedingungen folgendermassen an:

$$(1.)\ \sum F_{xi} = 0 \quad \text{und} \quad (2.)\ \sum F_{yi} = 0 \quad .$$

Vgl. auch Gl.(5-1) und (5-2). Danach dürfte es also nie das Problem des Momentengleichgewichts geben, weil wegen der Fluidität keine Momente übertragbar sind. Seit Abschn. 12.3.2 weiß man aber, daß auch Momentenwirkungen möglich sind: Diese Realität ist an die Anwesenheit fester Wände gebunden. - Demnach ist der Hinweis auf ein zentrales Kräftesystem im vorliegenden Beispiel, wonach die Momentengleichgewichtsbedingung (3.) $\sum \vec{M}_i = 0$ wegfällt, nicht überflüssig.

Bild 12-27 zeigt einen qualitativen Lageplan mit angelegten Kräften.

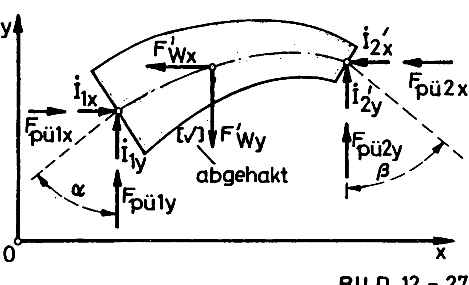


BILD 12 - 27

Zu beachten ist folgende wichtige Erkenntnis aus der Statik:

(a) Bei rechnerischen Lösungen dürfen die Komponenten unbekannter Kräfte in beliebiger Richtung angenommen werden.

(b) Eventuelle Reibungskräfte müssen, selbst wenn sie

unbekannt sind,in der korrekten Richtung eingetragen werden.Man erhält sie durch eine virtuelle Verschiebung.

(c) Ist ein Komponentenergebnis negativ,so bedeutet dies,daß die ursprüngliche Richtungsannahme falsch war.Erst nach Abschluß der gesamten Rechnung kehrt man im qualitativen Lageplan die Pfeilrichtungen um;ansonsten kann man durch Abhaken die Richtigkeit der Richtungsannahme quittieren.

Es folgt nun: (1.) $\sum F_{xi} = + \dot{I}_{1x} + F_{pü1x} - \dot{I}'_{2x} - F_{pü2x} - F'_{Wx} = 0$;

(2.) $\sum F_{yi} = + \dot{I}_{1y} + F_{pü1y} + \dot{I}'_{2y} + F_{pü2y} - F'_{Wy} = 0$.

Datenbeschaffung:

$\dot{I}_{1x} = \dot{I}_1 . \sin\alpha$; $F_{pü1x} = F_{pü1} . \sin\alpha$; $\dot{I}'_{2x} = \dot{I}'_2 . \sin\beta$; $F_{pü2x} = F_{pü2} . \sin\beta$;

$\dot{I}_{1y} = \dot{I}_1 . \cos\alpha$; $F_{pü1y} = F_{pü1} . \cos\alpha$; $\dot{I}'_{2y} = \dot{I}'_2 . \cos\beta$; $F_{pü2y} = F_{pü2} . \cos\beta$.

Somit folgt:

(1.) : $F'_{Wx} = 125,66 . \sin 35^\circ + 628,32 . \sin 35^\circ - 502,65 . \sin 45^\circ - 156,84 . \sin 45$

$$\underline{\underline{F'_{Wx} = - 33,86 \text{ N}}} \quad .$$

(2.) : $F'_{Wy} = 125,66 . \cos 35^\circ + 628,32 . \cos 35^\circ + 502,65 . \cos 45^\circ + 156,84 . \cos 45$

$$\underline{\underline{F'_{Wy} = + 1083,95 \text{ N}.}}$$

Die Richtungsannahme von F'_{Wx} ist falsch gewesen,diejenige von F'_{Wy} richtig (abhaken im Lageplan).Die Kraft $\vec{F'_W}$ wirkt in den IV.Quadranten hinein.-Der Betrag berechnet sich mit

$$\underline{\underline{F'_W}} = \sqrt{F'^2_{Wx} + F'^2_{Wy}} = \sqrt{33,86^2 + 1083,95^2} = \underline{\underline{1084,48 \text{ N}}} \; .$$

Man stellt aufgrund der Zeichenungenauigkeit einen Fehler von 1% fest gegenüber der grafischen Lösung.-Außerdem folgt:

$$\text{tg}\,\gamma = |F'_{Wx}| \,/\, F'_{Wy} = 33,86/1083,95 \quad ; \quad \underline{\underline{\gamma = 1,789^\circ}} \; .$$

Mit Hilfe des Momentensatzes ließe sich auch noch die genaue Lage der Wirkungslinie bestimmen.

h) $\underline{\vec{F}_W}$:

Nach den Bemerkungen auf S.273 (oben) muß man jetzt nur den Richtungspfeil umkehren,d.h.: die Kraft $\vec{F}_W$ wirkt vom Kontrollraum,also dem

Fluid, in Richtung des II. Quadranten.

2. Beispiel

Aus einer Düse gelangt ein Wasser-Freistrahl auf eine Prallplatte.- Wie groß ist die Kraft auf die Wand $\vec{F}_W$? - Die Anordnung ist dem Bild 12-28 zu entnehmen.

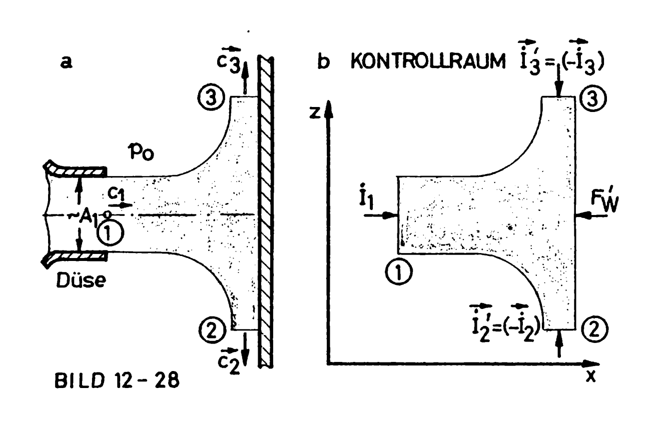


BILD 12-28

Lösung:

Ohne Schwerkrafteinfluß verteilt sich das Wasser symmetrisch. Der Kontrollraum wird wieder so gewählt, daß eine feste Wand, Stromlinien und Normalen dazu die Begrenzungen darstellen.

Die Kontrollebenen 2 und 3 sind übrigens so weit entfernt gelegt worden, damit Wandnormalen auch senkrecht auf den darüber befindlichen Stromlinien stehen: Damit entfallen mögliche x-Komponenten der Impulsströme $\dot{I}_2$ und $\dot{I}_3$!-Da im Freistrahl und um den Freistrahl herum überall der gleiche statische Druck: p_0, der Atmosphärendruck, vorhanden ist, entfallen bei der Kraftangabe am Kontrollraum (Bild 12-28, Pos. b) die Überdruckkräfte. Da sich aus Symmetriegründen die Impulsstromwirkungen in z-Richtung aufheben, bleibt nur die Untersuchung des Kräftegleichgewichts in x-Richtung:

$\sum F_{xi} = \dot{I}_1 - F_W' = 0$. -Datenbeschaffung: $\dot{I}_1 = \rho \cdot A_1 \cdot c_1^2$.

Die gleichgewichtshaltende Kraft heißt $F_W' = \rho \cdot A_1 \cdot c_1^2$. Da sie ein positives Ergebnis erwarten läßt, ist die Richtungsannahme nach links korrekt. Somit wirkt das Fluid aus dem Kontrollraum heraus nach rechts auf die Prallplatte mit

$$\boxed{F_W = \rho \cdot A_1 \cdot c_1^2} \qquad (12\text{-}34).$$

3. Beispiel

Ein Wasserstrahl trifft auf eine schräg angestellte Platte, Bild 12-29, Pos. a.- Es handle sich um ein ebenes Problem, so daß mit einer Tiefe

(senkrecht zur Bildebene) von $b = 1$ m gerechnet werden möge. Angaben: $B = 0{,}1$ m; $c_1 = 1{,}5$ m/s; $\alpha = 60^\circ$. – Man ermittle:

a) den Volumenstrom $\dot{V}_1$;
b) die Kraftwirkung des Strahles auf die Wand $\vec{F}_W$;
c) die Volumenströme $\dot{V}_2$ und $\dot{V}_3$.

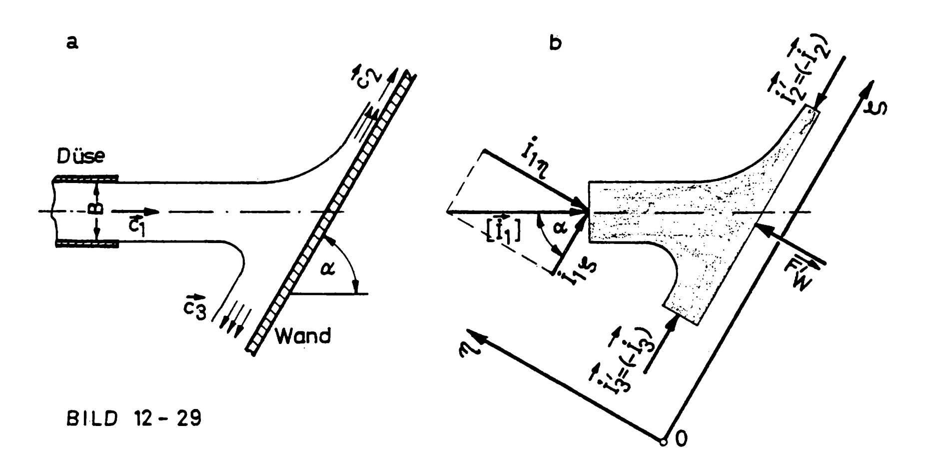


BILD 12-29

Lösungen:

a) $\dot{V}_1$:

Mit Gl.(11-21) folgt: $\dot{V}_1 = B.b.c_1 = 0{,}1.1.1{,}5 = 0{,}15\ m^3/s$.

b) $\vec{F}_W$:

Bild 12-29, Pos. b, zeigt den Kontrollraum, der von Stromlinien, der festen Wand und Normalen zu den Stromlinien gebildet wird (s.S. 268). Druckkräfte im Strahl entfallen, da es sich ja um einen Freistrahl handelt. Es halten sich die drei Impulsströme: $\vec{\dot{I}}_1$, $(-\vec{\dot{I}}_2)$, $(-\vec{\dot{I}}_3)$ und die Kraft von der Wand auf den Kontrollraum das Gleichgewicht: F'_W. – Die beiden Gleichgewichtsgleichungen lauten:

(1.) $\sum F_{i\xi} = 0$: $\quad \dot{I}'_3 - \dot{I}'_2 + \dot{I}_{1\xi} = 0$;

(2.) $\sum F_{i\eta} = 0$: $\quad -\dot{I}_{1\eta} + F'_W = 0$. – Hieraus folgt sofort:

$F'_W = \rho .A.c_1^2 . \sin\alpha = 1000.0{,}15.1{,}5.\sin 60^\circ = 194{,}86$ N . – Nach Pfeilumkehr erhält man die Kraft vom Fluid auf die Wand!

$$\boxed{F_W = \rho.A.c_1^2.\sin\alpha} \qquad (12\text{-}35).$$

c) $\dot{V}_2$ und $\dot{V}_3$:

Aus der ersten Gleichgewichtsbedingung ergibt sich:

$$\varrho \cdot \dot{V}_3 \cdot c_3 - \varrho \cdot \dot{V}_2 \cdot c_2 + \varrho \cdot \dot{V}_1 \cdot c_1 \cdot \cos\alpha = 0$$; da $c_1 \approx c_2 = c_3$ gilt,

folgt nach Kürzung: $\boxed{\dot{V}_3 - \dot{V}_2 + \dot{V}_1 \cdot \cos\alpha = 0}$.

Eine weitere Bestimmungsgleichung liefert die Kontinuitätsbedingung:

$$\boxed{\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3} \ .$$

Aus diesen beiden Beziehungen erhält man:

$$\boxed{\dot{V}_2 = \frac{1 + \cos\alpha}{2} \cdot \dot{V}_1 \quad \text{und} \quad \dot{V}_3 = \frac{1 - \cos\alpha}{2} \cdot \dot{V}_1} \qquad (12\text{-}36).$$

In Zahlen: $\underline{\underline{\dot{V}_2 = 0{,}1125 \ m^3/s}}$ und $\underline{\underline{\dot{V}_3 = 0{,}0375 \ m^3/s}}$.

4. Beispiel

Wie im zweiten Beispiel trifft ein Wasserstrahl eine Prallplatte. Dieses Mal aber ist die Platte als Fahrzeug zu verstehen, weil sie sich mit der Fahrzeuggeschwindigkeit v nach rechts bewegt, Bild 12-30, Pos. a.-Angaben: $d = 0{,}1$ m; $v = 0{,}5$ m/s; $c_1 = 1{,}5$ m/s.-Man ermittle:

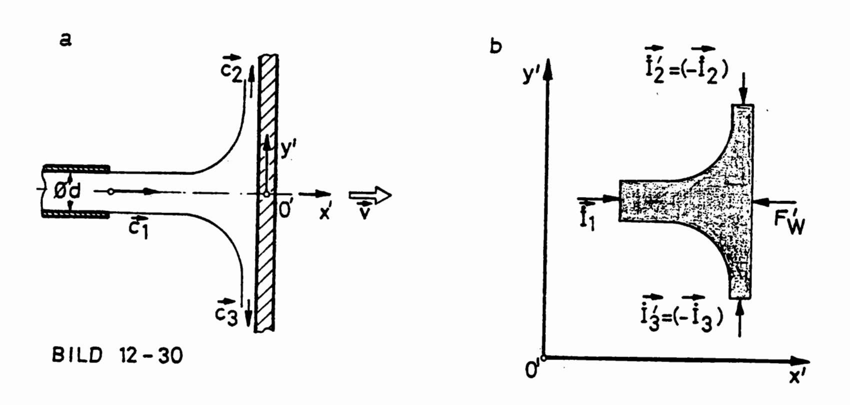


BILD 12-30

a) die Kraft $\vec{F}_W$, mit welcher der Strahl auf die Platte (Fahrzeug) einwirkt;

b) die auf das Fahrzeug übertragene fluidische Leistung P;

c) das Geschwindigkeitsverhältnis v/c_1, für welches maximale Leistung übertragen wird.

Lösungen:

a) F_W :

Da die Impuls-Aufgaben aus didaktischen Gründen zunächst immer als Gleichgewichtsaufgaben verstanden werden mögen, ermittle man als erstes die Kraft von der Wand auf den Kontrollraum (Bild 12-30, Pos. b): F_W' .-Es gilt sofort $\sum F_{ix'} = \dot{I}_1 - F_W' = 0$.
Problematisch ist hier nur die Ermittlung des eintretenden Impulsstromes: $\dot{I}_1$. Das dynamische Gleichgewicht am Kontrollraum fußt auf dem relativen Massenstrom und der Relativgeschwindigkeit, weil sie allein spürbar auf das Fahrzeug einwirken. Man beachte auch Gl.(11-19) und Beispiel 18 von Abschn.12.2.2, Seite 264.

$$F_W' = \dot{m}_r \cdot w = \varrho \cdot A_1 \cdot (c - v) \cdot (c-v) = \varrho \cdot A_1 \cdot (c - v)^2 \qquad (12\text{-}37).$$

$F_W' = 1000 \cdot (\pi/4) \cdot 0{,}1^2 \cdot (1{,}5 - 0{,}5)^2 = 7{,}854\ \mathrm{N}$. - Mit der gleich grossen Kraft entgegengesetzter Richtung wirkt der Strahl auf die Platte.

b) P :

Die Leistung berechnet sich bekanntlich mit

$$P = F \cdot v ,$$

und zwar für das Fahrzeug.-In Zahlen: $P = 7{,}854 \cdot 0{,}5 = 3{,}927\ \mathrm{W}$.

c) $(v/c_1)_{opt}$:

Wenn man die Leistungsgleichung $P = \varrho \cdot A_1 \cdot (c-v)^2 \cdot v = \cdot A_1 \cdot (c^2 \cdot v - 2 \cdot c \cdot v^2 + v^3)$ nach v differenziert und null setzt, dann ergibt die Lösung einer quadratischen Gleichung eine Lösung für die minimale Leistung bei $v=c$ (Leistung null) und eine Lösung für die maximale Leistung:

$$v_{opt} = (1/3) \cdot c_1 \quad : \quad (v/c_1)_{opt} = 1/3 \quad .$$

5.Beispiel

Das Prinzip eines unterschlächtigen Wasserrades ist in Bild 12-31, Pos. a, gezeigt.-Angaben: Wassergeschwindigkeit $c_1 = 2$ m/s; Fahrzeuggeschwindigkeit versteht sich hier als Umfangsgeschwindigkeit $v=u=1{,}5$ m/s; Radbreite $b \approx 0{,}8$ m (zunächst näherungsweise gleich der Gerinnebreite B). Wassertiefe $H = 0{,}2$ m. - Man ermittle:

a) die Kraft auf eine Schaufelplatte $\vec{F}_W$;
b) die übertragene fluidische Leistung P ;
c) die maximal übertragbare fluidische Leistung P_{max} und die dazugehörige optimale Umfangsgeschwindigkeit u_{opt};

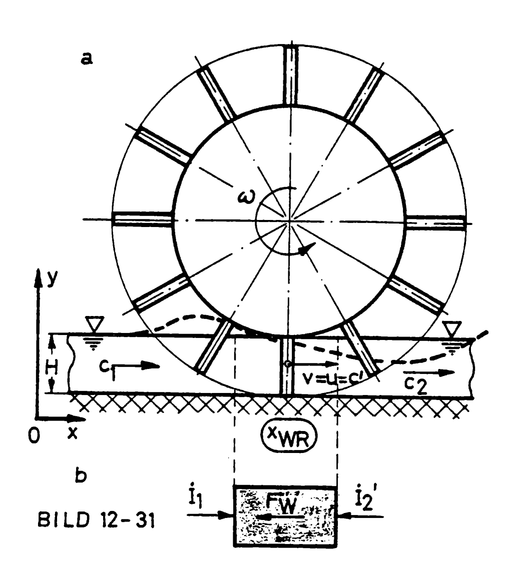


BILD 12-31

d) den Wirkungsgrad .

Lösungen:

a) $\overrightarrow{F_W}$:

Trotz Wellenbildung verwende man einen quaderförmigen Kontrollraum (Bild 12-31, Pos. b).

$\sum F_{xi} = \dot I_1 - F_W' - \dot I_2' = 0$;

$F_W' = \dot I_1 - \dot I_2' = \dot m.(c_1 - c_2)$; $|F_W'| = |F_W|$.

Der kinetischen Energie des Oberwassers wird Arbeit entzogen, so daß $c_2 < c_1$ ist. Damit bewegt sich das Wasserrad zwangsweise mit einer Geschwindigkeit c', die zwischen c_1 und c_2 liegt. Wegen der Verlangsamung ist die Kanalführung nur bis x_{WR} vorzunehmen, damit sich der Wasserstrom aus Kontinuitätsgründen verbreitern kann.-Ermittlung der mittleren Durchströmungsgeschwindigkeit: Entzug der kinetischen Energie ist gleich der verrichteten Arbeit: $0{,}5.\dot m.(c_1^2 - c_2^2) = \dot m.(c_1 - c_2).c'$; $c' = (c_1 + c_2)/2$! - Bis zum Rad ist die Strömungsgeschwindigkeit schon zur Hälfte abgebaut.

$$\boxed{c' = u = v = 0{,}5.(c_1 + c_2)} \qquad (12\text{-}38a).$$

Volumenstrom in Höhe x_{WR}:

$$\boxed{\dot V = A.c' = B.H.0{,}5.(c_1 + c_2)} \qquad (12\text{-}38b).$$

Schaufelkraft:

$$\boxed{F_W = \rho.B.H.0{,}5.(c_1^2 - c_2^2)} \qquad (12\text{-}38c)$$

Schaufelleistung:

$$\boxed{P = F_W.u = 0{,}25.\rho.B.H.(c_1^2 - c_2^2)(c_1 + c_2)} \qquad (12\text{-}38d).$$

Maximale Schaufelleistung:

Mit $\Delta c = c_1 - c_2$ wird $P = \rho.A.\Delta c.(c - \Delta c/2)^2$; Maximum bei $\Delta c = 2/3.c_1$!

$$\boxed{u_{max} = 2/3.c_1 \quad ; \quad P_{max} = (8/27).\rho.B.H.c_1^3} \qquad (12\text{-}38e).$$

In Zahlen:

$F_W = 1000.0{,}8.0{,}2.0{,}5.(2^2 - 1^2)$ N ; $\underline{\underline{F_W = 240\ \text{N}}}$.

b) $\underline{P}$:

Mit Gl.(12-38d) folgt: $\underline{\underline{P}} = 240.0{,}5.(2+1) = \underline{\underline{360\ \text{W}}}$.

c) u_{max} ; P_{max} :

Gl.(12-38 e) : $u_{max} = 4/3$ m/s ; $P_{max} = \frac{8}{27}.1000.0,8.0,2.2^3$ W

$P_{max} = 379,26$ W .

d) η :

Definiert man den Wirkungsgrad $\eta = P / P_W$ mit $P_W = 0,5.\dot{m}.c_1^2$, dann erhält man:

$P_W = 0,5.1000.0,8.0,2.1,5.2^2 = 480$ W . - $\eta = 360/480$;

$\eta = 0,75$.

Maximalwert: $\eta = 0,79$.

Die diesbezüglichen realen Wirkungsgrade liegen tiefer wegen der Reibungs- und Spaltverluste !

6.Beispiel

Eine Pelton-Turbine wird in Bild 12-32 prinzipiell dargestellt.Aus einer Düse kommend,trifft ein Wasserstrahl auf eine Becherschaufel, die den Wasserstrahl kraft einer Zentralschneide (Schnitt A-B) halbiert.Zahlreiche Becherschaufeln sind gleichmäßig am Umfang der Tur-

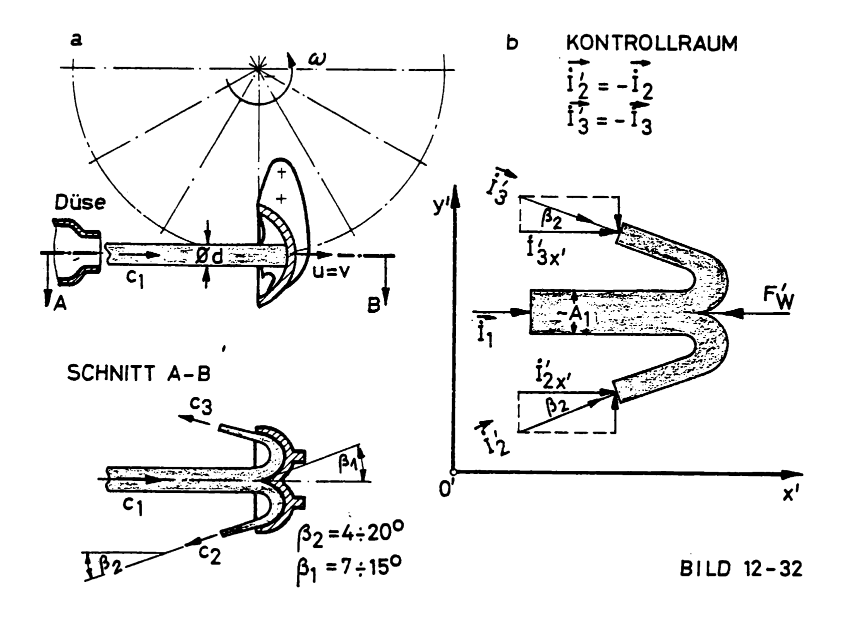


BILD 12-32

binenscheibe verteilt.Da der statische Druck im Strahl überall gleich ist,heißt dieser Turbinentyp auch noch Freistrahlturbine.-Man ermittle:

a) die Düsenaustrittsgeschwindigkeit bei einem Gefälle von $H = 200$ m;
b) die Kraft $\vec{F}_S$,die vom Strahl auf die Schaufel ausgeübt wird (Durchmesser des Wassersstrahls $d = 0{,}15$ m;Umfangsgeschwindigkeit $u = v = 25$ m/s ; $\beta_2 = 8^o$) .
c) die übertragene Leistung P ;
d) die maximal übertragbare Leistung P_{max} und die dazugehörende optimale Umfangsgeschwindigkeit u_{opt}.

Lösungen:

a) c_1 :

Mittels der Torricelli-Formel (Gl.12-11) berechnet sich die Düsenaustrittsgeschwindigkeit:

$$c_1 = \sqrt{2.g.H} = \sqrt{2.9{,}81.200} = 62{,}64 \text{ m/s} .$$

b) $\vec{F}_S$:

Die das Gleichgewicht haltenden Kräfte sind in Bild 12-32,Pos. b,angeführt: der eintretende Impulsstrom $\vec{\dot{I}}_1$, die Reaktionen der beiden austretenden Impulsströme sowie die Kraft von der Schaufelwand auf den Kontrollraum $\vec{F}_W$.-Aus Symmetriegründen heben sich die Kräfte in y'-Richtung auf,so daß es keinen Axialschub auf die Turbinenwelle gibt.
Das Gleichgewicht in x'-Richtung (Fahrzeugkoordinatensystem) lautet:

$$\sum F_{ix'} = \dot{I}_1 + \dot{I}'_{2x'} + \dot{I}'_{3x'} - F'_W = 0 .$$

Datenbeschaffung: $\dot{I}_1 = \varrho . A_1 . c_1 . (c_1 - u)$;

hierfür ist folgende Überlegung anzustellen: Da genügend viele Laufschaufeln am Umfang verteilt sind,schneiden sie den mit Absolutgeschwindigkeit ankommenden Wasserstrahl in Stücke auf von der Länge einer Schaufelteilung;die in Drehrichtung forteilende Schaufel hat also keine Zeit,dem Absolutstrahl zu entgehen.So erklärt sich der Sachverhalt,daß der Massenstrom eben mit der Absolutgeschwindigkeit gebildet werden muß.Da in der gezeichneten Schaufelposition die Fahrzeuggeschwindigkeit voll zum Tragen kommt,ist die Strahlkraftwirkung auf die Relativgeschwindigkeit zurückzuführen.-Da der Strahl halbiert wird und die Geschwindigkeiten gleich sind,folgt:

Wenn man näherungsweise für den Erstentwurf $w_1 \approx w_2$ annimmt, dann gilt:

$$\dot{I}'_{2x'} = \dot{I}'_{3x'} = 0{,}5 . \varrho . A_1 . c_1 . (c_1 - u) . \cos\beta_2 \quad .$$

Somit folgt nach Richtungsumkehr von $\vec{F}'_W$ für die Kraft auf die Schaufel:

$$\boxed{F_S = \varrho . A_1 . c_1 . (c_1 - u) . (1 + \cos\beta_2)} \qquad (12\text{-}39).$$

In Zahlen:

$$F_S = 1000 . (\pi/4) . 0{,}15^2 . 62{,}64 . (62{,}64 - 25) . (1 + \cos 8^o) = 82{,}925 \text{ kN.}$$

c) P :

Die bekannte Gleichung $P = F_S \cdot u$ führt zu:

$$P = 82\,925 \cdot 25 = 2{,}073 \text{ MW} .$$

d) P_{max} und u_{opt} :

Die ausführliche Leistungsgleichung heißt:

$$\boxed{P = \varrho \cdot (\pi/4) . d^2 . c_1 . (c_1 - u) . (1 + \cos\beta_2) \cdot u} \qquad (12\text{-}40).$$

Durch Differenzieren und Nullsetzen ($dP/du = 0$) erhält man,da die zweite Ableitung negativ ist,ein Maximum für die Leistung bei

$$\boxed{u_{opt} = 0{,}5 \cdot c_1} \qquad (12\text{-}41).$$

Der Ausdruck für die maximale Leistung heißt danach:

$$\boxed{P_{max} = (1/16) . \varrho . \pi . d^2 . c_1^3 . (1 + \cos\beta_2)} \qquad (12\text{-}42).$$

In Zahlen:

$$P_{max} = (1/16) . 1000 . \pi . 0{,}15^2 . 62{,}64^3 . (1 + \cos 8^o) \quad ;$$

$$P_{max} = 2{,}1611 \text{ MW} .$$

Die optimale Umfangsgeschwindigkeit wird dann:

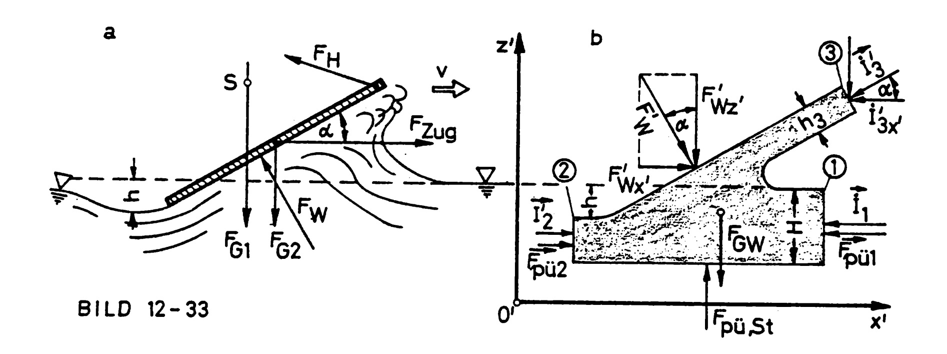
$$u_{opt} = 0{,}5 \cdot 62{,}64 \quad ; \qquad u_{opt} = 31{,}32 \text{ m/s} \quad .$$

7. Beispiel

Ein Wasserskiläufer wird mit einer Fahrzeuggeschwindigkeit von $v = 5$ m/s geschleppt, Bild 12-33, Pos. a.-Hinter dem Wasserski sinkt das Wasserniveau um $h = 0{,}15$ m ab. Die Breite des Skis beträgt $B=0{,}45$m. Man ermittle:

a) die Zugkraft im Zugseil $\vec{F}_Z$ bei einer Skineigung von $\alpha = 25^\circ$;

b) die erforderliche Zugleistung P_Z .



Lösungen:

a) $\vec{F}_Z$:

In Bild 12-33, Pos. a, sind diejenigen Kräfte angedeutet, die auf den Wasserski einwirken: Gewicht des Wasserskiläufers $\vec{F}_{G1}$; Skigewicht $\vec{F}_{G2}$; Zugkraft $\vec{F}_Z$; Haltekraft $\vec{F}_H$; Stützkraft vom Wasser auf den Wasserski $\vec{F}_W$.-Vernachlässigt man die Haltekraft $\vec{F}_H$, dann ist die Horizontalkomponente von $\vec{F}'_W$ letzten Endes betragsmäßig gleich der gesuchten Zugkraft $\vec{F}_Z$.

Die Problemlösung wird über eine Gleichgewichtsbetrachtung am Kontrollraum (Bild 12-33, Pos. b) angestrebt. Ohne Dissipationseffekte halten sich dabei folgende acht Kräfte das Gleichgewicht:

$\vec{\dot{I}}_1$: eintretender Impulsstrom, der sich im dynamischen Gleichgewicht (das Koordinatensystem ist fest mit dem Fahrzeug verbunden) mittels der Relativgeschwindigkeit $\vec{w}_1 = -\vec{v}$ (das Wasser selbst ist ja in absoluter Ruhe) berechnen läßt : $\dot{I}_1 = \rho.B.H.v.v = \rho.B.H.v^2$;

$\vec{F}_{pü1}$: Resultierende aus der Überdruckverteilung infolge der Wassertiefe H;

$\vec{F}_{GW}$: Gewicht des Kontrollraumwassers (wird vernachlässigt);

$\vec{F}_{pü,St}$: Stützkraft aufgrund der Druckverteilung am unteren Kontrollraumrand;

$\vec{\dot{I}}'_2$: Reaktion des austretenden Impulsstromes $\dot{I}_2$; aus einer Bernoullibetrachtung läßt sich zeigen,daß die drei Strömungsgeschwindigkeiten alle gleich sind: $w_1 = w_2 = w_3 = v$!-Deshalb berechnet sich $\dot{I}'_2$ wie folgt: $\dot{I}'_2 = \varrho.B.(H - h).v^2$;

$\vec{F}_{pü2}$: Resultierende aus der Überdruckverteilung infolge der Wassertiefe h ; $F_{pü1}$ und $F_{pü2}$ werden wegen Geringfügigkeit vernachlässigt;

$\vec{\dot{I}}'_3$: Reaktion des austretenden Impulsstromes $\dot{I}_3$;Berechnung: $\dot{I}'_3 = \varrho.B.h_3.v^2$;

$\vec{F}'_W$: Kraftwirkung vom Wasserski auf die Kontrollraummasse.

Das vertikale Gleichgewicht wird nicht weiter verfolgt.Hier interessiert das horizontale Gleichgewicht:

$\sum F_{ix'} = \dot{I}'_2 - \dot{I}_1 + F'_{Wx'} - \dot{I}'_{3x'} = 0$; in entwickelter Form lautet diese Gleichung:

$$\varrho.B.(H - h).v^2 - \varrho.B.H.v^2 + F'_{Wx'} - \varrho.B.h_3.v^2.\cos\alpha = 0 \quad .$$

$$F'_{Wx'} = \varrho.B.v^2.(h + h_3.\cos\alpha) \quad .$$

Die Höhe h_3 läßt sich über eine Kontinuitätsbetrachtung ermitteln:

$\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$; $B.H.v = B.(H - h).v + B.h_3.v$; $h_3 = h$. Somit folgt:

$$F'_{Wx'} = F_Z = \varrho.B.v^2.h.(1 + \cos\alpha) \quad .$$

In Zahlen:

$$F_Z = 1000.0{,}45.5^2.0{,}15.(1 + \cos 25^o) = 3{,}217 \text{ kN} \quad .$$

b) P_Z :

$$P_Z = F_Z \cdot v = 3217 \cdot 5 = 16{,}08 \text{ kW} \quad .$$

8.Beispiel

Ein horizontaler Wasserstrahl trifft auf eine vertikal stehende Platte mit scharfer Schneide,Bild 12-34,Pos. a.Ein Teil des Hauptstrahls wird zwangsweise der Platte folgen,der andere wird überraschenderweise um

den Winkel α abgelenkt.-Angaben: $c_1 = 10$ m/s; $\dot{V}_1 = 0{,}03\ m^3/s$; $\dot{V}_2 = 0{,}012\ m^3/s$.-Reibungseffekte sind zu vernachlässigen.-Man ermittle:

a) den Ablenkungswinkel α ;

b) die Kraft F_W auf die Platte .

Lösungen:

a) α :

Das System verlangt die Ermittlung von drei Unbekannten: $\dot{V}_3$, α und $\vec{F}_W$! Somit sind drei Bestimmungsgleichungen zu erstellen: zwei Kräftegleichgewichtsgleichungen nach Bild 12-34,Pos. b,und eine Kontinuitätsbeziehung.

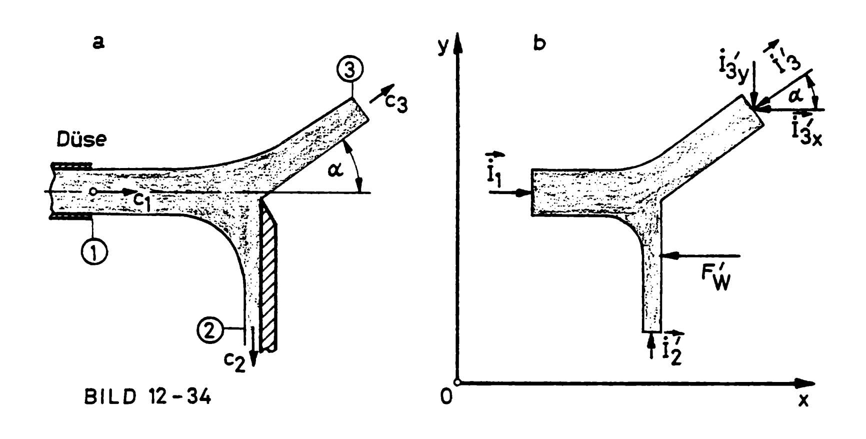


BILD 12-34

(1.) $\sum F_{ix} = 0$: $\dot{I}_1 - F'_W - \dot{I}'_{3x} = 0$;

(2.) $\sum F_{iy} = 0$: $\dot{I}'_2 - \dot{I}'_{3y} = 0$;

(3.) $\dot{V}_1 = \dot{V}_2 + \dot{V}_3$;

im Freistrahl kennt man wiederum keine Druckkräfte.Nach der Datenbeschaffung folgt unter Beachtung,daß gilt $c_1 = c_2 = c_3$:

(1.)' $\varrho.\dot{V}_1.c_1 - F'_W - \varrho.\dot{V}_3.c_3.\cos\alpha$; $\quad F'_W = \varrho.c_1.(\dot{V}_1 - \dot{V}_3.\cos\alpha)$;

(2)' $\varrho.\dot{V}_2.c_2 - \varrho.\dot{V}_3.c_3.\sin\alpha = 0$; $\quad \dot{V}_2 = \dot{V}_3.\sin\alpha$;

(3.)' $\quad \dot{V}_3 = \dot{V}_1 - \dot{V}_2$.

Setzt man (3.)'in (2.)' ein,dann folgt:

$\sin\alpha = \dot{V}_2/(\dot{V}_1 - \dot{V}_2)$; in Zahlen : $\sin\alpha = 0{,}012/(0{,}03 - 0{,}012)$;

$$\alpha = 41{,}81^\circ .$$

b) $\vec{F_W}$:

Die gleichgewichtshaltende Kraft F_W' berechnet sich aus den Beziehungen (1)' und (3)':

$$F_W' = \varrho \cdot c_1 \cdot \left[\dot{V}_1 - (\dot{V}_1 - \dot{V}_2) \cdot \cos\alpha \right] .$$

In Zahlen: $F_W' = 1000.10. \left[0{,}03 - (0{,}03 - 0{,}012).\cos 41{,}81^\circ \right]$;

$$|F_W'| = |F_W| = 165{,}84 \text{ N} \quad .$$

Bemerkung:

Eine ähnlich gestaltete Vorrichtung dient als Strahlablenker bei der Pelton-Turbine.

9.Beispiel

Aus einer horizontalen Rohrleitung kommend,platzt das Wasser in eine plötzliche Rohrerweiterung hinein.Die Erfahrung zeigt,daß sich aufgrund von Reibungseffekten(Erläuterungen hierzu finden sich in Abschn. 17) Wirbelecken bilden.In den Wirbeln steckt Rotationsenergie,die der Transportenergie entzogen worden ist und sich allmählich in Reibungswärme umformt.Die Systemanordnung zeigt Bild 12-35,Pos. a.In der Ebene 1 war die Wirbelenergie noch als Transportenergie vorhanden;in der Ebene 3 steht sie nicht mehr als Transportenergie zur Verfügung im Sinne der Bernoulligleichung,die ja das Wechselspiel mehrerer Erscheinungsformen von Transportenergie in der Gesamtsumme innerhalb eines Stromfadens verfolgt.-Man ermittle:

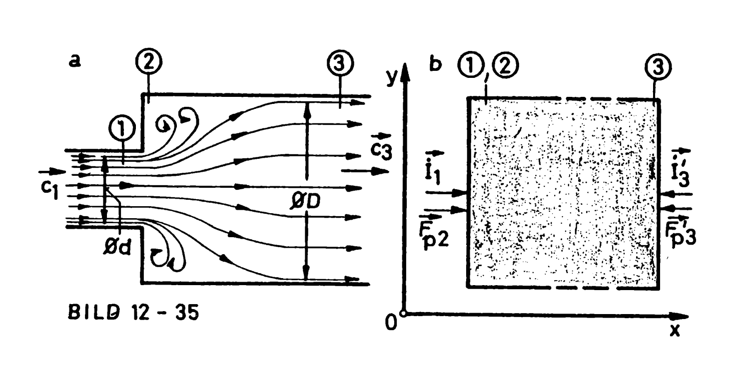


BILD 12 - 35

a) den Druck in Ebene 3 im Falle verlustloser Strömung p_3 ;

b) den Druck in Ebene 3 im Falle der Wirbelbildung $p_{3'}$;

c) Größe und Bedeutung des Druckunterschiedes $\Delta p = p_3 - p_{3'}$.

Angaben: d = 0,08 m; D = 0,18 m; c_1 = 10 m/s; p_1 = 3 bar .

Lösungen:

a) p_3 :

Für einen mittleren Stromfaden zwischen den Kontrollebenen 1 und 3 liegt folgende Charakteristik vor: stationär, inkompressibel, reibungsfrei und horizontal. Damit lautet die Bernoulligleichung nach Gl.(12-6):

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_3}{\varrho} + \frac{c_3^2}{2} \quad ; \quad \text{die Kontinuität ergibt: } c_1 . A_1 = c_3 . A_3 :$$

$$c_3 = 10.(0{,}08^2/0{,}18^2) = 1{,}975 \text{ m/s} \quad \text{.Damit wird} \quad p_3 = 3.10^5 + \left[\frac{10^2}{2} - \frac{1{,}975^2}{2}\right].10^3$$

$$p_3 = 3{,}4805 \text{ bar.}$$

b) $p_{3'}$:

Dieser Druck wird mittels einer Kräftegleichgewichtsbetrachtung am Kontrollraum (Bild 12-35, Pos. b) ermittelt.

$$\sum F_{ix} = 0 : \quad \dot{I}_1 + F_{p2} - F_{p3'} - \dot{I}_{3'} = 0 \quad .$$

– Die Datenbeschaffung ist bis auf F_{p2} unproblematisch. – Allgemein gilt, daß es senkrecht zu parallelen Stromlinien keinen Druckgradienten gibt, weil kein Anlaß besteht, eventuelle Zentrifugalwirkungen zu kompensieren. Da nun aus Trägheitsgründen die Stromlinien an der Sprungstelle der Querschnittserweiterung 1/2 noch kurzzeitig quasi-parallel sind, gibt es senkrecht zu ihnen keine Druckänderung, weshalb sich der Druck p_1 auch in der Ebene 2 antreffen läßt. Die Richtigkeit dieser Überlegungen wird durch Experimente nachgewiesen. Damit folgt:

$$\varrho.(\pi/4).d^2.c_1^2 + p_1.(\pi/4).D^2 - (\pi/4).D^2.p_{3'} - \varrho.(\pi/4).D^2.c_3^2 = 0 \; .$$

Daraus ergibt sich:

$$p_{3'} = \varrho . \frac{d^2}{D^2} . c_1^2 + p_1 - \varrho . c_3^2 \quad ; \text{ in Zahlen:}$$

$$p_{3'} = 1000.(0{,}08/0{,}18)^2.10^2 + 3.10^5 - 1000.1{,}975^2 \quad ;$$

$$p_{3'} = 3{,}1585 \text{ bar} \quad .$$

c) Δp :

Zunächst beträgt der Druckunterschied

$$\Delta p = p_3 - p_{3'} = 0{,}322 \text{ bar} \quad .$$

Dividiert man diesen Druckverlust durch die Dichte des Fluids,dann erhält man eine massenspezifische Dissipation,die sich zunächst in den Wirbeln als Rotationsenergie und später stromab als Reibungswärme wiederfindet.Man kann also den Druckverlust über eine Temperaturmessung feststellen.
Bei der plötzlichen Rohrerweiterung spricht man auch vom "ideal schlechten" Diffusor.Der Druckverlust ist auch unter dem Namen "Carnotscher" Stoßverlust bekannt.-Obige Ableitungen erlauben auch folgende Schreibweise:

$$\Delta p_C = \frac{\rho}{2} \cdot (c_1 - c_3)^2 \qquad (12\text{-}43).$$

10.Beispiel

Die Sohle eines Wassergerinnes von rechteckigem Querschnitt ist um den Winkel α geneigt,Bild 12-36,Pos. a.An der Stelle C liegt ein Knick im Sohlenverlauf (allgemeiner gesprochen eine Störstelle) vor. Dadurch entsteht unter gewissen Bedingungen eine Anhebung des Wasserspiegels bei entsprechender Geschwindigkeitsverringerung.Man spricht

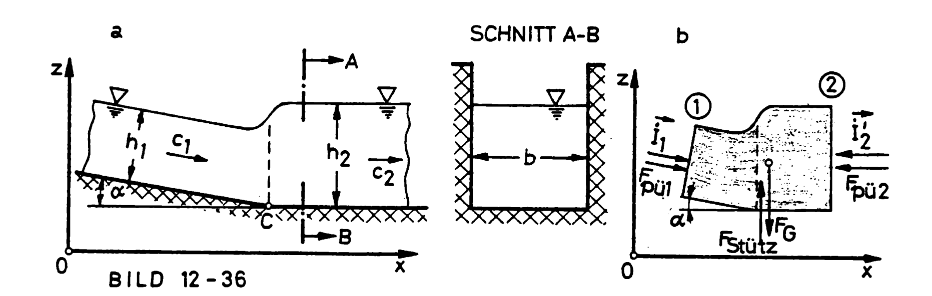


BILD 12-36

sinnigerweise von einem Wassersprung.-Angaben: $\alpha = 10^o$; $c_1 = 4{,}5$ m/s; $h_1 = 1{,}5$ m; b = 2 m.- Man ermittle unter Vernachlässigung der Seitenwandreibung:

a) den allgemeinen Ausdruck für die Strömungsgeschwindigkeit c_2 ;
b) den allgemeinen Ausdruck für die Wassertiefe h_2 ;
c) die Voraussetzung für die Möglichkeit eines Wassersprungs ;
d) die kritische Strömungsgeschwindigkeit;
e) betragsmäßige Werte für c_2 und h_2 .

Lösungen:

a) c_2 :

Die Kontinuitätsgleichung, Gl. (11-20), liefert sofort folgenden Zusammenhang: $c_1 . b . h_1 = c_2 . b . h_2$;

$$c_2 = c_1 \cdot (h_1/h_2) \qquad (1).$$

b) h_2 :

Nach den auf S.268 zusammengestellten Richtlinien für die Aufstellung eines Kontrollraumes entsteht Bild 12-36, Pos. b. Es interessiert hier nur das Kräftegleichgewicht in x-Richtung:

$\sum F_{ix} = 0$: $\dot{I}_{1x} + F_{pü1} - \dot{I}_{2x} - F_{pü2} = 0$; mit der Datenbeschaffung läßt sich dann angeben, sofern man nach Bidone auf den Einfluß von $\cos\alpha$ verzichtet - sonst stieße man auf eine kubische Gleichung:

$$\rho . b . h_1 . c_1^2 + \rho . g . \frac{h_1^2}{2} . b - \rho . g . \frac{h_2^2}{2} . b - \rho . b . h_2 . c_2^2 = 0 \quad .$$

Das führt zu einer quadratischen Gleichung:

$$h_2 = -\frac{h_1}{2} + \sqrt{\frac{h_1^2}{4} + \frac{2 . h_1 . c_1^2}{g}} \qquad (2).$$

c) Bedingung für Wassersprung:

Sie erhält man für den Grenzfall, daß es zu keiner Spiegelanhebung kommt: $h_1 = h_2$! - Setzt man diesen Wert in (2) ein, dann folgt:

$$c_1 = c_{1,Grenz} = \sqrt{g . h_1} \qquad (3).$$

d) $c_{1,krit} = c_{1,Grenz}$:

$c_{1,krit} = \sqrt{9{,}81 . 1{,}5}$; $\quad c_{1,krit} = 3{,}836$ m/s .

Immer dann, wenn die Strömungsgeschwindigkeit c_1 größer als die kritische Geschwindigkeit ist, spricht man von schießendem Abfluß, der bei einer Sohlenstörung zu dem Phänomen Wasserstoß führt. Sonst ist die Rede von strömendem Abfluß. - Im vorliegenden Beispiel ist mit $c_1 = 4{,}5$ m/s

die Voraussetzung für einen Wassersprung erfüllt.

e) c_2 und h_2 :

Mit (2) ergibt sich jetzt: $h_2 = -\frac{1,5}{2} + \sqrt{(1,5/2)^2 + \frac{2.1,5.4,5^2}{9,81}}$;

$$h_2 = 1,85 \text{ m} \quad .$$

11. Beispiel

Aus einem Fahrzeug strömt Wasser aus, Bild 12-37, Pos. a . Da $A_1 \gg A_2$ angenommen wird, soll in der Anfahrphase stationäre Strömung vorliegen.-Angaben: $A_2 = 5.10^{-4}$ m^2 ; h_1 = 0,8 m; ρ = 1000 kg/m^3.-Man ermittle:

a) die Kraftwirkung auf das Fahrzeug $\vec{F_W}$;

b) die Art der Fahrzeugbewegung in der Startphase.

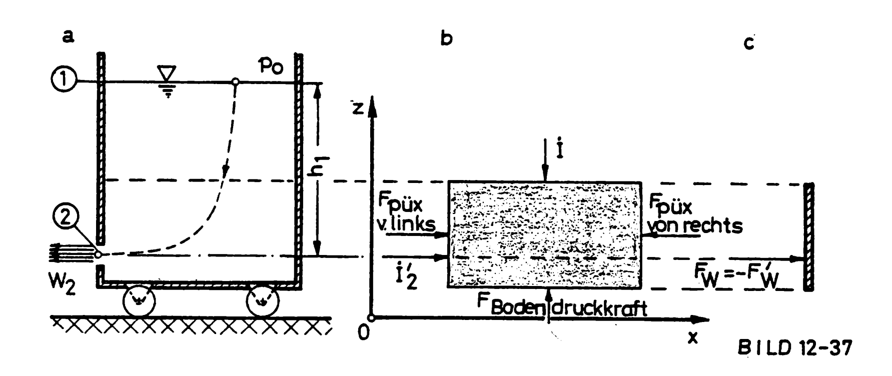


BILD 12-37

Lösungen:

a) $\vec{F_W}$:

Feste Wände und Normalen zu den Stromlinien bilden die Kontrollraumbegrenzung (Bild 12-37, Pos. b).-Das interessierende Kräftegleichgewicht in x-Richtung lautet:

$$\sum F_{ix} = 0 : \quad F_{püx,links} + \dot{I}_2' - F_{püx,rechts} = 0 \quad ;$$

man setze

$$F_{püx,rechts} - F_{püx,links} = F_W' \quad ,$$

dann folgt auch:

$\dot{I}_2' - F_W' = 0$. Mit der Datenbeschaf-

fung erhält man für die resultierende Druckkraft von der Wandung auf den Kontrollraum:

$$\boxed{F'_W = \dot{I}'_2 = \rho \cdot g \cdot A_2 \cdot w_2^2} \quad . \qquad (12\text{-}44).$$

Kehrt man die Wirkrichtung von $\vec{F}'_W$ um, dann erhält man die gesuchte Kraft $\vec{F}_W$, die vom Kontrollraum auf die Wand einwirkt !-Die Strömungsgeschwindigkeit berechnet sich bekanntlich mit $w_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_1}$, so daß insgesamt folgt:

$$\underline{F_W = 2 \cdot \rho \cdot g \cdot A_2 \cdot h_1} \quad .$$

In Zahlen erhält man:

$$\underline{\underline{F_W}} = 2 \cdot 1000 \cdot 9{,}81 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}8 = \underline{\underline{7{,}848\ N}} \quad .$$

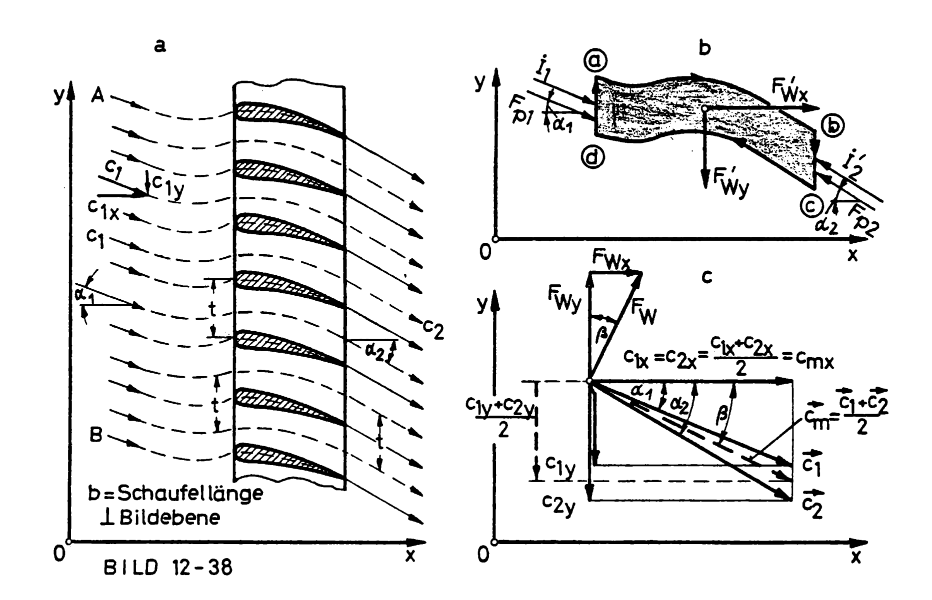
b) Bewegungsart:

Wegen der vorausgesetzten Stationarität bleibt die Austrittsgeschwindigkeit konstant, so daß sich auch die Schub- oder Rückstoßkraft nach Gl.(12-44) nicht ändert. Wird aber ein freibeweglicher Körper einer konstanten Krafteinwirkung ausgesetzt, dann stellt sich eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung hier ein.

12. Beispiel

Ein ebenes und ruhendes Schaufelprofilgitter wird durch die Strömungsfront AB von der Geschwindigkeit $\vec{c}_1$, gemessen weit vor dem Gitter, angeströmt. Die Neigung zur x-Achse beträgt α_1, Bild 12-38, Pos. a. Die Erfahrung zeigt, daß das Fluid weit hinter dem Gitter unter dem Winkel α_2 abströmt.-Äußerst wichtig ist hier zu wissen, daß ein ideales Fluid (s.S. 180) ohne Umlenkung das Gitter passieren würde.-Man gehe ja in diesem Buch immer von einem natürlichen Fluid aus. Im vorgelegten Beispiel handle es sich um eine wirbelfreie Zuströmung, so daß von einem vollkommenen Fluid gesprochen werden kann. Offensichtlich trägt nun das Gitter zur Drehung der Strömungsfront bei ($\alpha_1 \rightarrow \alpha_2$), weshalb nach den Erläuterungen von S.221 die Zone 2 vorliegt, die wirbelfreie Strömung mit Zirkulation genannt wird. Wie es zur Ausbildung dieser Zirkulation kommt, wird in Abschn. 18.1 gezeigt ! - Man ermittle:

a) die x-Komponente der Kraft vom Fluid auf eine Schaufel F_{Wx} ;
b) die y-Komponente der Kraft vom Fluid auf eine Schaufel F_{Wy} ;
c) die resultierende Kraft vom Fluid auf eine Schaufel $\vec{F}_W$;
d) ebenso $\vec{F}_W$, aber nun unter Einbeziehung der Zirkulation Γ;
e) Bemerkungen zur Richtung der Schaufelkraft .



Lösungen:

a) $\underline{F_{Wx}}$:

Den Kontrollraum, in dem eine mittlere Schaufel eingebettet liegt, findet man in Bild 12-38, Pos. b. Längs der den Kontrollraum begrenzenden Stromlinien heben sich die Druckverteilungen aus Symmetriegründen gegenseitig auf. Es halten sich deshalb folgende Kräfte das Gleichgewicht: Druckkräfte am Ein- und Austritt, der eintretende Impulsstrom, die Reaktion des austretenden Impulsstromes und die Kraft von der Schaufel auf das im Kontrollraum eingeschlossene Fluid. - Die Komponenten der unbekannten Kraft dürfen beliebig in der Richtung angenommen werden. Das Vorzeichen nach erfolgter Rechnung bestätigt oder verneint die Richtungsannahme ! - Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung lautet:

$$\sum F_{ix} = 0 : \quad \dot{I}_1 \cdot \cos\alpha_1 + F_{p1} - \dot{I}_2' \cdot \cos\alpha_2 - F_{p2} + F_{Wx}' = 0 \; .$$

Datenbeschaffung:

$$\rho \cdot \dot{V} \cdot c_{1x} + F_{p1x} - \rho \cdot \dot{V} \cdot c_{2x} - F_{p2x} + F_{Wx}' = 0 \; .$$

Der Volumenstrom berechnet sich mit $\dot{V} = t \cdot b \cdot c_{1x} = t \cdot b \cdot c_{2x}$; damit ist

$$\underline{\underline{c_{1x} = c_{2x}}} \; .$$

Die Gleichgewichtsgleichung vereinfacht sich:

$$F_{p1} - F_{p2} + F'_{Wx} = 0 .$$

$$F'_{Wx} = t.b.(p_2 - p_1) \quad . \quad (a).$$

Mittels der Bernoulli-Gleichung gilt für eine Stromlinie (außer der Staupunktsstromlinie):

$$\frac{p_1}{\varrho} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{c_2^2}{2} \quad ; \quad p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}.(c_{2x}^2 + c_{2y}^2 - c_{1x}^2 - c_{1y}^2) \; ;$$

$$p_1 - p_2 = \frac{\varrho}{2}.(c_{2y}^2 - c_{1y}^2)$$

. Setzt man diese Beziehung in (a) ein, dann folgt:

$$F'_{Wx} = \frac{\varrho}{2}.t.b.(c_{1y}^2 - c_{2y}^2) < 0$$

nach den vorgelegten Zusammenhängen. Also war die Richtungsannahme von F'_{Wx} falsch.

Die x-Komponente der Kraft von der Schaufel auf den Kontrollraum weist nach links.

Die x-Komponente der Kraft vom Kontrollraum auf die Schaufel ist also danach korrekterweise nach rechts gerichtet:

$$\boxed{F_{Wx} = (\varrho/2).t.b.(c_{2y}^2 - c_{1y}^2)} \qquad (12\text{-}45).$$

Die Vertauschung in der Klammer wurde nur deshalb vorgenommen, um einen positiven Wert zu erhalten.

b) $\underline{F_{Wy}}$:

Hier heißt das Kräftegleichgewicht:

$$\sum F_{iy} = 0 : \qquad -\dot{I}_{1y} - F'_{Wy} + \dot{I}_{2y} = 0 \; ;$$

Datenbeschaffung:

$$-\varrho.\dot{V}.c_1.\cos\alpha_1 - F'_{Wy} + \varrho.\dot{V}.c_2.\cos\alpha_2 = 0 \; ;$$

$$F'_{Wy} = \varrho.t.b.c_{1x}.(c_{2y} - c_{1y}) > 0 .$$

Das Ergebnis wird wegen $c_{2y} - c_{1y} > 0$ im vorliegenden Fall, positiv, weshalb die Richtungsannahme von F_{Wy} richtig gewesen war.-Die Richtungsumkehr führt zur Kraftkomponente vom Kontrollraum auf die Schaufel:

Die y-Komponente der Kraft vom Kontrollraum auf die Schaufel ist somit nach oben gerichtet.

$$\boxed{F_{Wy} = \rho \cdot t \cdot b \cdot c_{1x} \cdot (c_{2y} - c_{1y})} \qquad (12\text{-}46).$$

c) $\vec{F_W}$:

Mit Hilfe der Beziehung

$$\boxed{F_W = \sqrt{F_{Wx}^2 + F_{Wy}^2}} \qquad (12\text{-}47).$$

Diese Kraft weist hier in den ersten Quadranten hinein.

d) $\vec{F_W}$ unter Verwendung der Zirkulation:

Nach Gl.(11-49),S. 216,erhält man für die Zirkulation beim Umlauf um den Kontrollraum:

$$\Gamma = \oint_{(abcda)} \vec{c} \cdot d\vec{r} = \int_{ab} \vec{c} \cdot d\vec{r} + \int_{bc} \vec{c} \cdot d\vec{r} + \int_{cd} \vec{c} \cdot d\vec{r} + \int_{da} \vec{c} \cdot d\vec{r} \quad ;$$

$$\Gamma = (-c_{2y}) \cdot (-t) + (-c_{1y}) \cdot t \quad ; \quad \underline{\Gamma = t \cdot (c_{2y} - c_{1y})} \qquad (b).$$

Diese Beziehung wird nun in den Komponentengleichungen eingebaut:

Gl.(12-45): $$F_{Wx} = \rho \cdot b \cdot \Gamma \cdot \frac{c_{1y} + c_{2y}}{2} = \rho \cdot b \cdot \Gamma \cdot c_{my} ,$$

wenn man unter c_{my} den arithmetischen Mittelwert der y-Komponenten der Geschwindigkeiten versteht;

Gl.(12-46): $F_{Wy} = \rho \cdot b \cdot \Gamma \cdot c_{1x}$. - Faßt man die beiden letzten Beziehungen nach Gl.(12-47) zusammen,so ergibt sich:

$$F_W = \rho \cdot \Gamma \cdot b \cdot \sqrt{c_{1x}^2 + c_{my}^2} = \rho \cdot \Gamma \cdot b \cdot c_m$$

mit $\vec{c_m}$ als der mittleren Geschwindigkeit (Bild 12-38,Pos. c):

$$\boxed{\vec{c_m} = (1/2) \cdot (\vec{c_1} + \vec{c_2})} \qquad (12\text{-}48).$$

Abschließend kann man unter Verwendung der Zirkulation für die Kraft auf die Schaufel notieren:

$$\boxed{\vec{F}_W = \varrho \cdot \Gamma \cdot b \cdot \vec{c}_m} \qquad (12\text{-}49).$$

e) Bemerkungen zur Richtung der Schaufelkraft:

Bildet man beispielsweise $\operatorname{tg}\beta$ (Bild 12-38,Pos. c) im angedeuteten Kräfteplan mit den Gl.(12-45) und Gl.(12-46),dann erhält man:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{(c_{1y} + c_{2y})/2}{c_{1x}}$$

,ein Wert,der sich auch dem angezeigten Geschwindigkeitsplan entnehmen läßt.

Daraus ergibt sich die Gleichheit der β genannten Winkel,was nun bedeutet:

> Die Schaufelkraft steht senkrecht auf dem vektoriellen Mittelwert der Durchströmungsgeschwindigkeit des Gitters!

Gl.(12-49) und die soeben festgestellte Richtungsaussage bezüglich der Schaufelkraft sind der Inhalt des Kutta-Joukowskyschen Auftriebssatzes. Neben dem dynamischen Auftrieb spricht man auch von Quertrieb.-Wie der Geltungsbereich dieser Gesetzmäßigkeit vom Profilgitter auf den Einzelflügel ausgedehnt wird,ist im folgenden Beispiel veranschaulicht. - Übrigens ist zum Richtungssinn noch zu sagen,daß die Kraft $\vec{F}_W$ um 90° gegen die mittlere Durchströmgeschwindigkeit im Gegenuhrzeigersinn gedreht ist,sofern die Zirkulation im Uhrzeigersinn als positiv gewertet worden ist.

13.Beispiel

Ein einzelner unendlich langer Tragflügel wird durch eine Parallelströmung von der Geschwindigkeit $\vec{c}_\infty$,gemessen weit vor dem Flügel, angeströmt.Die sich einstellende Strömung bei der Tragflügelumströmung sei wirbelfrei,aber mit Zirkulation versehen,d.h.: Es liegt ein vollkommenes Fluid vor (kein ideales,sondern ein natürliches Fluid). Außerdem ist das Fluid als inkompressibel zu betrachten.-Man ermittle den dynamischen Auf- oder Quertrieb.

Lösung:

Zur Untersuchung dieses ebenen Strömungsproblems wird ein kreiszylindrischer Kontrollraum mit dem Radius R herausgegriffen, Bild 12-39. Das Koordinatensystem ist parallel und senkrecht zur ankommenden Strömungsfront angeordnet. Die Flügelspannweite heißt b .

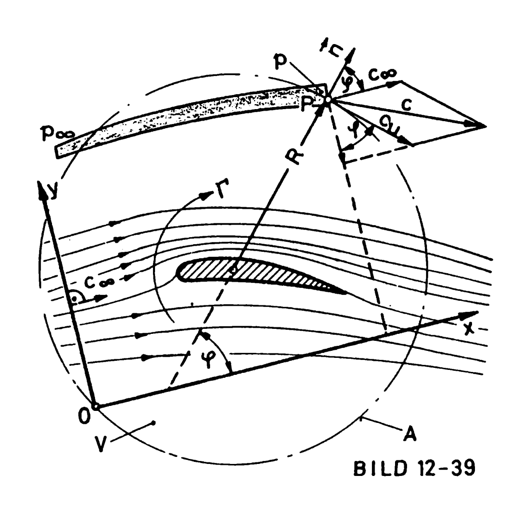


BILD 12-39

Am Kontrollraum halten sich folgende Kräfte das Gleichgewicht:

$\vec{F}'_W$, die Kraft vom Profil auf das Fluid im Kontrollraum ;

$\sum \vec{F}_{pi}$, die Summe aller Druckkräfte von der fluidischen Umwelt auf den Kontrollraum; es handelt sich um eine Stütz-Reaktion;

$\sum \vec{\dot{I}}_i$, die Summe aller eintretender Impulsströme und den Reaktionen der austretenden Impulsströme. – Somit läßt sich anschreiben:

Gl. (12-28): $\sum \vec{F}_i - \oint \vec{\dot{c}} \cdot \varrho \cdot dV = 0$, was für das dynamische Gleichgewicht im Volumenbereich gilt;

$$\vec{F}'_W + \sum \vec{F}_{pi} + \sum \vec{\dot{I}}_i = 0 \;;$$

$$\vec{F}'_W - \oint_{(A)} \vec{n} \cdot p \cdot dA - \oint_{(V)} \vec{c} \cdot \varrho \cdot d\dot{V} = 0 \quad .$$

Gl. (4.4.) und (5.4.)   Gl. (12.28)

Bringt man $\vec{F}'_W$ auf die andere Gleichungsseite, kehrt man also sein Vorzeichen um, dann erhält man die gesuchte Kraft vom Kontrollraum auf den Einzelflügel $\vec{F}_W$:

$$\vec{F}_W = -\oint_{(A)} \vec{n} \cdot p \cdot dA - \oint_{(V)} \vec{c} \cdot \varrho \cdot d\dot{V} \quad .$$

Diese Kraftvektoren werden nun alle auf die y-Achse projiziert, so daß man schließlich $\vec{F}_{Wy} = \vec{F}_A$, die dynamische Auftriebskraft, erhält.

Bestimmung des Druck-Integrals:

Die Bernoulli-Gleichung liefert:

$$\frac{p_\infty}{\varrho} + \frac{c_\infty^2}{2} = \frac{p}{\varrho} + \frac{c^2}{2} = \frac{p}{\varrho} + \frac{1}{2}.(c_\infty^2 + c_u^2 + 2.c_\infty.c_u.\sin\varphi)$$

$$p = p_\infty + (\varrho/2).c_u^2 - \varrho.c_\infty.c_u.\sin\varphi = K - \varrho.c_\infty.c_u.\sin\varphi;$$

in einem beliebigen Punkt P heißt die resultierende Geschwindigkeit

$$\vec{c} = \vec{c}_\infty + \vec{c}_u \quad ,$$

wobei man mit c_u die induzierte Geschwindigkeit vor sich hat.- Gl.(11-52) hilft hier weiter:

$$c_u = \Gamma/(2.\pi.R) \;\hat{=}\; \text{const} \quad \text{wegen } R=\text{const}.$$

Deshalb kann oben bei p mit der Konstanten K weitergerechnet werden.

$$\int_{(A)} \vec{j}.\vec{n}.p.dA = \int_0^{2.\pi} b.(K - \varrho.c_\infty.c_u.\sin\varphi).\sin\varphi.R.d\varphi = -\frac{1}{2}.b.\varrho.c_\infty.\Gamma.$$

Bestimmung des Impulsstrom-Integrals:

$$\int_{(V)} \varrho.c_y.d\dot{V} = \int_0^{2\cdot\pi} \varrho.c_y.\vec{n}.\vec{c}_\infty.b.R.d\varphi = \int_0^{2\cdot\pi} \varrho.c_y.c_\infty.\cos\varphi.b.R.d\varphi \quad ;$$

ersetzt man im Integranden c_y mit $c_y = -c_u.\cos\varphi \;\hat{=}\; -\frac{\Gamma}{2.\pi.R}.\cos\varphi$, dann folgt:

$$\int_{(V)} \varrho.c_y.d\dot{V} = -\frac{\varrho.\Gamma}{2.\pi.R}.c_\infty \int_0^{2.\pi} \cos^2\varphi.b.R.d\varphi = -(1/2).\varrho.c_\infty.\Gamma.b \quad .$$

Damit ergibt sich für die gesuchte Kraft auf die Schaufel in y-Richtung:

$$\boxed{F_A = \varrho.c_\infty.\Gamma.b} \qquad (12\text{-}50).$$

Das ist der allgemeine Beweis für den Kutta-Joukowskyschen Auftriebssatz.Die Kraftrichtung ist wie im vorigen Beispiel um 90° im Gegenuhrzeigersinn gegenüber der Anströmgeschwindigkeit gedreht,sofern der Drehsinn der Zirkulation im Uhrzeigersinn als positiv angesetzt worden ist.

13. POTENTIALBEWEGUNG

13.1. Einführung

Wenn der Wirbelvektor in einem Fluidgebiet überall verschwindet,dann kann die Strömungsgeschwindigkeit in jedem Punkt $P(x_k;y_k;z_k)$ durch partielles Ableiten einer skalaren Ortsfunktion,die Potentialfunktion (s.S. 218 und 219) heißt,ermitteln.Die Geschwindigkeitskomponenten lauten damit:

$$c_{xk} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right]_k \; ; \; c_{yk} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right]_k \; ; \; c_{zk} = \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right]_k \qquad (13\text{-}1).$$

Die beiden Differentialgleichungen der Stromlinien,Gl.(11-9),führen letztlich zu zwei Stromfunktionen: $\psi(x,y)$ = Konst ,Gl.(11-33b),und $\chi(y,z)$ = Const.Die Stromfunktion ψ entspricht allen Stromlinien,die in Parallelebenen z = const sich befinden;genauso entspricht die Stromfunktion χ allen Stromlinien,die in Parallelebenen x = const sich befinden.

Weiterhin mögen hier nur ebene Probleme (z = const) angesprochen werden.In einer ebenen und wirbelfreien Strömung gibt es also zwei entscheidende Funktionen zur Beschreibung der Strömungsvorgänge: die Potentialfunktion φ und die Stromfunktion ψ .

13.2. Ebene Potentialbewegung

Faßt man die Aussagen der Gl.(11-33) und (13-1) zusammen,so ergeben sich nachstehende Gleichheiten:

$$c_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \; ; \qquad c_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (13\text{-}2).$$

Es ist ein interessanter,die weiteren Berechnungen vereinfachender Zufall,daß sich die Potential- und die Stromfunktion zu einer analytischen Funktion zusammenfassen lassen.-Eine Funktion heißt analytisch,wenn sie bei komplexer,unabhängiger Variablen $z = x + i.y$

im ganzen Fluidgebiet stetig und eindeutig und damit eben differenzierbar ist.-Identifiziert man in einer komplexen Funktion $f(z)$ den Realteil mit der Potentialfunktion φ und den Imaginärteil mit der Stromfunktion ψ ,dann ist $f(z)$ deshalb eine analytische Funktion,weil die beiden Gleichheiten in Gl.(13-2) - sie sind unter dem Namen Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen bekannt - erfüllt sind:

$$\boxed{f(z) = f(x + i.y) = \varphi(x,y) + i.\psi(x,y)} \qquad (13\text{-}3).$$

Außerdem ist die Ableitung $df(z)/dz$ von der Richtung unabhängig und deshalb nach allen Seiten gleich.So genügt also beispielsweise schon die partielle Ableitung in x-Richtung:

$$\boxed{\frac{df(z)}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} + i.\frac{\partial \psi}{\partial x} = c_x - i.c_y} \qquad (13\text{-}4).$$

Die analytische Funktion wird komplexes Potential genannt,ihre Ableitung heißt sinngemäß "komplexe Geschwindigkeit". - Ersetzt man in z die kartesischen Koordinaten durch Polarkoordinaten,so sind folgende Zusammenhänge zu beachten,Bild 13-1:

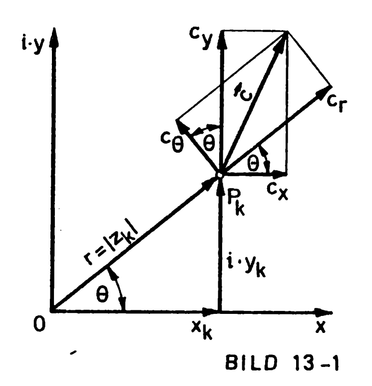


BILD 13-1

$$\boxed{\begin{aligned} & x = r.\cos\theta \;;\; y = r.\sin\theta; \\ & r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z| \;; \\ & \theta = \text{arctg}\, y/x \;; \\ & z = x + i.y = r.(\cos\theta + i.\sin\theta); \\ & z = r.\, e^{i.\theta} \;;\; \bar{z} = x - i.y \end{aligned}} \qquad (13\text{-}5).$$

Multipliziert man $df(z)/dz$ mit $e^{i.\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta$,dann ergibt sich:

$$\boxed{e^{i.\theta} . \frac{df(z)}{dz} = c_r - i.c_\theta} \qquad (13\text{-}6).$$

Darüberhinaus läßt sich für die beiden neuen Geschwindigkeitskompo-

nenten vermerken:

$$c_r = c_x.\cos\theta + c_y.\sin\theta \quad ; \quad c_\theta = c_y.\cos\theta - c_x.\sin\theta \qquad (13\text{-}7).$$

13.3. Konforme Abbildung

In der z-Ebene - man nenne sie auch Stammebene - sind zwei Kurven: s_1 und s_2 ,die vom Punkt p(x,iy) ausgehen sollen,gegeben,Bild 13-2.

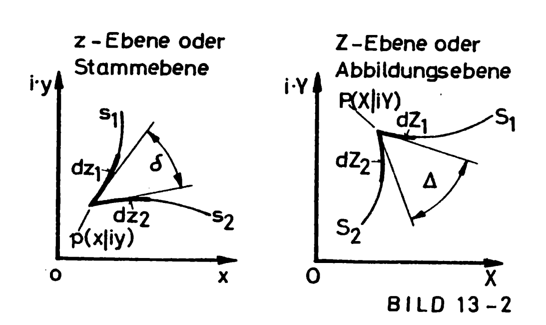


BILD 13-2

Eine komplexe Funktion Z(z) erlaubt die Übertragung oder Abbildung von Punkten,Kurven und Bereichen aus der z-Ebene (Stammebene) in die Z-Ebene (Abbildungsebene):

$$Z(z) = X(z)+iY(z) \qquad (13\text{-}8).$$

Diese Abbildungsfunktion darf wieder als analytisch bezeichnet werden, wenn sie den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\partial X/\partial x = \partial Y/\partial y \quad \text{und} \quad \partial X/\partial y = -\,\partial Y/\partial x \qquad (13\text{-}9)$$

genügt.Weil,wie schon auf S.299 erwähnt,bei analytischen Funktionen die Ableitung nach z von der Richtung unabhängig ist,gibt es in einem Punkt p für Z(z) nur eine Ableitung,die für alle Richtungen, die man von p aus einschlägt,gilt.Daraus folgt: $dZ_1/dz_1 = dZ_2/dz_2$ oder: $dz_1/dz_2 = dZ_1/dZ_2$,was bedeutet,daß bei differentiellen Änderungen geometrische Bereiche winkeltreu bzw. ähnlich abgebildet werden,weshalb nach Gauß von "konformer Abbildung" gesprochen wird.-Bedeutung für ebene,wirbelfreie Strömungsfelder: Kennt man beispielsweise die Strömungsverhältnisse um einen umströmten Zylinder (ebenes Problem),dann läßt sich durch eine Abbildungsfunktion,von der Stammebene ausgehend,das Strömungsgeschehen um einen anderen geometrisch verzerrten Körper in der Abbildungsebene bestimmen.

13.4. Beispiele

1. Beispiel

Von einem Strömungsfeld wird das komplexe Strömungspotential mit

$$f(z) = c_\infty . e^{-i.\alpha} . z$$

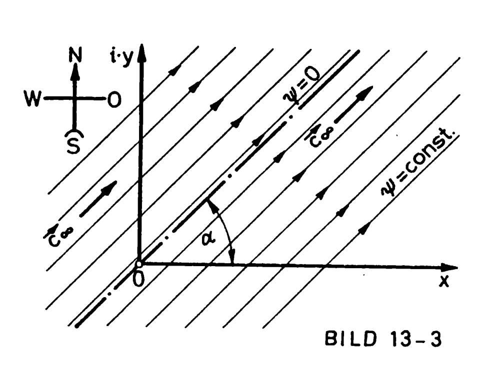


BILD 13-3

gegeben; zudem kennt man die Windgeschwindigkeit $c_\infty = 2$ m/s sowie die Neigung der Strömungsfront gegen die x-Achse $\alpha = 45^0$, Bild 13-3.- Man ermittle:

a) die Geschwindigkeitskomponenten in einem beliebigen Punkt c_x und c_y ;

b) die Funktion für das Strömungspotential φ und die Stromfunktion ψ ;

c) die Gleichung für die Stromlinienschar $\psi(x,y)$ = Konst;

d) eine physikalische Interpretation.

Lösungen:

a) c_x und c_y :

Die Ableitung des komplexen Strömungspotentials erbringt nach Gl.(13-4):

$$df(z)/dz = c_\infty . e^{-i.\alpha} = c_x - i.c_y = c_\infty .(\cos\alpha - i.\sin\alpha)$$,wenn

man auch Gl.(13-5) beachtet.-

$c_x = c_\infty . \cos\alpha = 2.\cos 45^0 = 1,414$ m/s ; $c_y = c_\infty . \sin\alpha = 2.\sin 45^0 = 1,414$ m/s.

b) φ und ψ :

Aufgrund von Gl.(13-3) läßt sich angeben:

$$f(z) = c_\infty .(\cos\alpha - i.\sin\alpha).(x + i.y) = c_\infty .(x.\cos\alpha + y.\sin\alpha) + \\ + i.c_\infty .(y.\cos\alpha - x.\sin\alpha).$$

Der Realteil RTf(z) entspricht der Potentialfunktion und der Imaginärteil ITf(z) der Stromfunktion:

$$\varphi(x,y) = c_\infty .(x.\cos\alpha + y.\sin\alpha) \quad ;$$

$$\psi(x,y) = c_\infty .(y.\cos\alpha - x.\sin\alpha) \quad .$$

c) Stromlinienschar:

Schreibt man der Stromfunktion einen konstanten Wert zu,dann läßt sich die Gleichung für die Stromlinienschar folgendermaßen ermitteln:

$\Psi(x,y) = c_\infty.(y.\cos\alpha - x.\sin\alpha) = \text{Konst};$ $\quad y = m.x + b \quad \text{mit } m = \text{tg}\alpha$

und b dem y-Achsenabschnitt.

$$y = x + b \quad .$$

Es handelt sich demnach um parallele Geraden von der Steigung 1 . Die Gerade $y = x$,auf der $\Psi = 0$ gilt,stellt eine Grenze dar für $b < 0$ und $b > 0$,aber ohne physikalische Bedeutung (Bild 13-3).

d) Physikalische Interpretation:

Bei der Strömungsfront handelt es sich um einen konstanten Wind,der von SW nach NO über eine Ebene bläst,und zwar mit $c_\infty = 2\ \text{m/s} = 7{,}2\ \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

2.Beispiel

Für eine Eckenströmung bei $\alpha = \pi/2$ kennt man das komplexe Potential $f(z) = B.z^2$ mit $B = 0{,}2$ 1/s bei Wasser als Strömungsmittel.- Man ermittle:

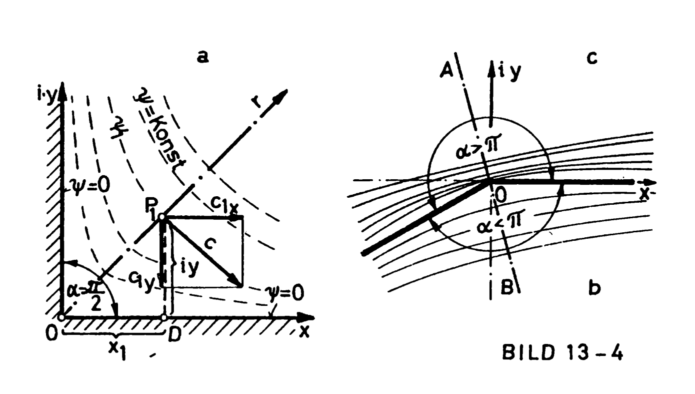


BILD 13-4

a) die Geschwindigkeitskomponenten c_{x1} und c_{y1} für den Punkt P_1(3m,3m),Bild 13-4,Pos. a.

b) Geltungsbereich der Geschwindigkeitsverteilung;

c) die Potentialfunktion φ und die Stromfunktion Ψ ;

d) die Gleichung der Stromlinienschar $\Psi(x,y) = \text{Konst}$;

e) den Volumenstrom,der eine rechteckige Fläche von OP_1 als Breite und $h = 1$ m (senkrecht auf Bildebene) als Höhe durchsetzt;

f) die Druckkraft $F_{pü}$ auf einen Wandausschnitt von der Länge OD und der Breite $b = 1$ m,wenn der Überdruck in 0 mit $p_{0ü} = 0{,}1$ bar

gegeben wird;

g) eine physikalische Interpretation des Strömungsgeschehens;

h) den Einfluß des Eckenwinkels auf die Geschwindigkeitsverteilung.

Lösungen:

a) c_{x1} und c_{y1} :

Gl.(13-4): $df(z)/dz = 2.B.z = 2.B.(x + i.y) = c_x - i.c_y$;

$c_{x1} = 2.B.x_1 = 2.0,2.3 = 1,2$ m/s ; $c_{y1} = -2.B.y_1 = -2.0,2.3 = -1,2$ m/s .

b) Geltungsbereich der Geschwindigkeitsverteilung:

Die Zusammenfassung der Komponenten ergibt:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2} = 2 . B . r \quad ;$$

da für $r \to \infty$ die Geschwindigkeit ebenfalls unendlich groß würde, was physikalisch unmöglich ist, gilt dieses Berechnungsverfahren nur im Bereich der Ecke.-Der Koordinatenursprung ist wegen $r = 0$ und $c = 0$ ein Staupunkt.

c) φ und ψ :

Entwickelt man das gegebene komplexe Strömungspotential, dann kann man im Sinne der Gl.(13-3) die beiden gesuchten Funktionen ablesen:

$$f(z) = B.z^2 = B.(x + iy)^2 = B.(x^2 - y^2) + i.2.B.x.y \quad ;$$

$$\varphi = B.(x^2 - y^2) \quad ; \quad \psi = 2.B.x.y$$; gleichseitige Hyperbeln !

d) $\psi(x,y) = \text{Konst}$:

Gibt man der Stromfunktion einen konstanten Wert, dann erkennt man sofort, daß es sich bei der Kurvenschar der Stromlinien um gleichseitige Hyperbeln handelt:

$$\psi = 2.B.x.y = \text{Konst} \longrightarrow y = \frac{\text{Const}}{x} \quad .$$

Die Stromlinie für $\psi = 0$ liegt vor bei $x = 0$ (y-Achse) und bei $y = 0$ (x-Achse).

e) $\dot{V}$:

Der Volumenstrom durch $\overline{OP_1}$. h hindurch ist gleich demjenigen, der

die Fläche $\overline{P_1D}$. h (Bild 13-4,Pos. a) passiert:

$$\dot{V} = \int_0^3 c_x.h.dy = 2.B.h \int_0^3 x.dy$$; da $x = x_1 = 3$ m ist,folgt aus der Integration $\dot{V} = 2.B.h.x_1.y \Big|_0^3 = 3{,}6\ m^3/s.$

Zum gleichen Ergebnis gelangt man unter Verwendung der Stromfunktion, wobei an die Ausführungen auf den S.200 und 201 erinnert wird.

$$\dot{V} = \Delta\Psi.h = h(\Psi_1 - \Psi_o) = (2.B.x_1.y_1 - 2.B.x_o.y_o).h$$

$$\dot{V} = (2.0{,}2.3.3 - 0).1 = 3{,}6\ m^3/s \quad .$$

f) $F_{püy}$:

Die Bernoulligleichung längs der Staupunktsstromlinie $\Psi = 0$ bezüglich der x-Achse lautet:

$p_{ü0}/\varrho + c_o^2/2 = p_{üx}/\varrho + c_x^2/2$; mit $c_0 = 0$ folgt:

$p_{üx} = p_{ü0} - \frac{\varrho}{2}.c_x^2 = p_{ü0} - \frac{\varrho}{2}.(2.B.x)^2$,gültig für den laufenden Punkt von 0 nach D.Es folgt:

$$F_{püy} = h . \int_0^3 p_{üx}.dx = h . \int_0^3 (p_{ü0} - \frac{\varrho}{2}.4.B^2.x^2).dx \quad ;$$

$$F_{püy} = h.x_1.(p_{ü0} - \frac{2}{3}.\varrho.B^2.x_1^2) = 1.3.(10^4 - \frac{2}{3}.1000.0{,}2^2.3^2)$$

$$F_{püy} = 29{,}28\ kN.$$

g) Physikalische Interpretation des Strömungsgeschehens:

Auf S.205,2.Beispiel,und in Bild 11-13 ist die Eckenströmung beschrieben worden !

h) Einfluß des Eckenwinkels auf die Geschwindigkeitsverteilung:

Ein monomiales komplexes Strömungspotential beschreibt immer die Strömung in einem Dyeder:

$$f(z) = C.z^n \quad \text{mit } \alpha = \frac{\pi}{n} \qquad (13\text{-}10).$$

Beispiele:

n = 1 : Parallelströmung wie im 1.Beispiel ; $\alpha = \pi$;

n = 2 : Eckenströmung wie im vorliegenden Beispiel; $\alpha = \pi/2$.

Zwei Grenzwertbetrachtungen geben wichtige Auskunft:

$z \to 0$ bei $n > 1$ bzw. $\alpha < \pi$

$$\lim_{z\to 0} df(z)/dz = C.n. \lim_{z\to 0} z^{n-1} = 0$$

. Der Koordinatenursprung ist in diesem Fall Staupunkt, Bild 13-4, Pos. b .

Aus Kontinuitätsgründen rücken die Stromlinien hier auseinander!

$z \to 0$ bei $n < 1$ bzw. $\alpha > \pi$

$$\lim_{z\to 0} df(z)/dz = C.n. \lim_{z\to 0} z^{n-1} = \lim_{z\to 0} \frac{C \cdot n}{z^{1-n}} \longrightarrow \infty .$$

Der Koordinatenursprung ist in diesem Fall ein Punkt im Strömungsgebiet, an den sich die Stromlinien äußerst eng anlegen, Bild 13-4, Pos. c .
Die Geschwindigkeit ist dort also sehr groß !

3. Beispiel

Es wird das komplexe Strömungspotential $f(z) = B.\ln z$ vorgegeben.

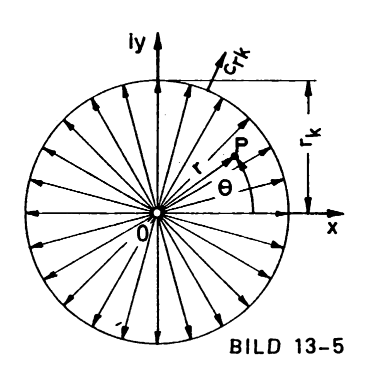


BILD 13-5

Man ermittle:

a) die Geschwindigkeitskomponenten c_r und c_θ ;
b) die Potential- und die Stromfunktion;
c) die Gleichung der Stromlinienschar;
d) die Bedeutung der Konstanten B ;
e) die physikalische Interpretation der Strömung .

Lösungen:

a) c_r und c_θ :

Gl.(13-6): $$e^{i.\theta} .df(z)/dz = e^{i.\theta} . \frac{B}{z} = e^{i.\theta} . \frac{B}{r.e^{i\theta}} = \frac{B}{r} = c_r - i.c_\theta .$$

Daraus kann abgelesen werden:

$$c_r = B / r \quad \text{und} \quad c_\theta = 0$$, Bild 13-5.

Da bei $r \to 0$ die Geschwindigkeit $c_r \to \infty$ geht, ist der Nullpunkt ein singulärer Punkt und ist durch das komplexe Strömungspotential $f(z)$ nicht definiert.

b) φ und ψ:

Sinngemäß nach Gl.(13-3) folgt: $f(z) = B.\ln z = B.\ln(r.e^{i.\theta})$

$$f(z) = B.\ln r + i.B.\theta \quad .$$

$$\varphi(r,\theta) = B.\ln r \quad ; \quad \psi(r,\theta) = B\,.\,\theta \quad .$$

c) Gleichung der Stromlinienschar:

Nimmt ψ einen konstanten Wert an, folgt: $\psi(r,\theta) = B.\theta = \text{Konst}$; schreibt man für den Winkel $\theta = \text{arc tg}\,(y/x)$, dann erhält man auch:

$$\psi(r,\theta) = B.\ \text{arc tg}\ (y/x) = \text{Konst} \quad . - \ y/x = \text{tg}\ (\text{Konst}/B) = m \ ;$$

$$y = m\,.\,x \quad .$$

Die Stromlinien sind Nullpunktsgeraden mit der Steigung m .

d) Bedeutung von B :

Da die Radialgeschwindigkeit längs eines Kreises vom Radius r_k überall gleich ist, berechnet sich der Volumenstrom, der die Zylinderfläche $2.\pi.r_k.h$ (h steht senkrecht auf der Bildfläche) durchströmt:

$$\dot{V} = 2.\pi.r_k.h.c_r \quad ; \quad \dot{V} = 2.\pi.r_k.h.\frac{B}{r_k} \quad ; \quad \dot{V} = 2.\pi.h.B \quad .$$

Man sieht, daß der Volumenstrom unabhängig vom Radius ist. Nunmehr wird die Bedeutung von B offensichtlich:

$$B = \frac{\dot{V}}{2\,.\pi.\,h} = \frac{\dot{V}'}{2.\,\pi} \quad .$$

e) Physikalische Interpretation:

Man spricht hier von einem Quellfaden mit der Ergiebigkeit von $\dot{V}/h$, dem Volumenstrom pro 1 m Quellfadenlänge.

4. Beispiel

Man gibt das komplexe Strömungspotential $f(z) = i.K.\ln\,(z/r_o)$ vor. Man ermittle :

a) die Geschwindigkeiten c_r und c_θ ;
b) die Potential- und die Stromfunktion ;
c) die Gleichung der Stromlinienschar $\psi(r,\theta) = \text{Konst}$;
d) die Bedeutung der Konstanten K ;
e) die physikalische Interpretation der Strömung ;
f) die Gleichung der Stromlinienschar für den Fall,daß man ein neues komplexes Strömungspotential bildet,und zwar durch Überlagerung (Superposition) der Funktionen f(z) des dritten und vierten Beispiels .

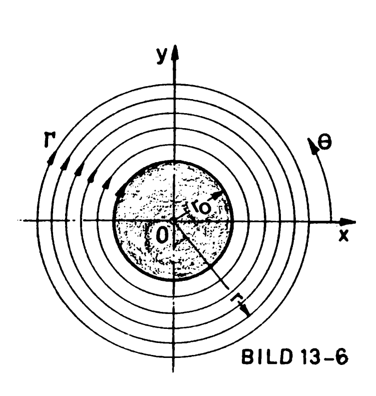


BILD 13-6

Lösungen:

a) c_r und c_θ :

Gl.(13-6) erbringt

$$e^{i.\theta}\cdot\frac{df(z)}{dz} = e^{i.\theta}\cdot\frac{i.K}{z} = \frac{i.K}{r} = c_r - i.c_\theta$$

$c_r = 0$ und $c_\theta = -K/r$,Bild 13-6.

Das Minuszeichen bedeutet,daß die Geschwindigkeit im Uhrzeigersinn gerichtet ist,wogegen die θ-Richtung Linksumsinn vorweist.-Der Koordinatenursprung 0 ist wiederum ein singulärer Punkt,weil die Geschwindigkeit gegen unendlich geht,sofern der Radius verschwindet.

b) φ und ψ :

Die Entwicklung des vorgelegten komplexen Strömungspotentials zeigt

$f(z) = i.K.\ln(r.e^{i.\theta}/r_o) = -K.\theta + i.K.\ln(r/r_o)$; man liest ab:

$$\varphi = -K.\theta \quad ; \quad \psi = K.\ln(r/r_o) \quad .$$

c) die Gleichung der Stromlinienschar $\psi(r,\theta) = \text{Konst}$:

Setzt man etwa Konst = 0 ,dann erkennt man,daß $\psi = 0$ ist,wenn $r = r_o$ ist.Die Stromlinie $\psi = 0$ ist demnach ein Kreis vom Radius r_o ! Alle übrigen Stromlinien $\psi = K.\ln(r/r_o) = \text{Konst}$ sind wegen $r/r_o = e^{\text{Const}}$ ebenfalls konzentrische Kreise,die der Gleichung genügen:

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad .$$

d) <u>die Bedeutung der Konstanten K</u> :

Längs eines Stromlinienkreises ist die Tangentialgeschwindigkeit c_θ überall gleich. Deshalb kann man die Zirkulation einfach berechnen:

$$\text{Gl.(11-49)}: \quad \Gamma = \oint \vec{c} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} c_\theta \cdot r \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{K}{r}\right) \cdot r \cdot d\theta = -2\cdot\pi\cdot K \quad .$$

Daraus folgt ohne weiteres die Bedeutung der Konstanten K:

$$K = -\frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \quad .$$

Somit darf das komplexe Potential auch noch folgendermaßen angeschrieben werden:

$$f(z) = -\frac{i\cdot\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \ln(z/r_0) \quad .$$

e) <u>Physikalische Interpretation der Strömung</u> :

Vergleicht man $|c_\theta| = K/r$ mit Gl.(11-52) und beachtet die Ausführungen auf S.220/221, so erkennt man, daß es sich bei der vorgelegten Strömungsform um den Potentialwirbel handelt !-(Siehe auch die S.256 bis 258).

f) <u>Stromlinienschar, durch Superposition erhalten</u>:

Überlagert man das komplexe Strömungspotential einer Fadenquelle $\Psi(r,\theta) = (\dot{V}'/2\cdot\pi)\cdot\theta$ und dasjenige eines Potentialwirbels (hier kann man von einem Wirbelfaden sprechen) $f(z) = -(i\cdot\Gamma/2\cdot\pi)\cdot\ln(z/r_0)$.

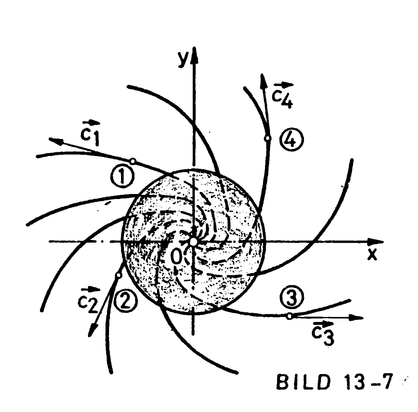


BILD 13-7

Wandelt man in der letzten Gleichung das Vorzeichen um, dann dreht der Potentialwirbel eben im Gegenuhrzeigersinn. Aus der Superposition folgt:

$$f(z) = \frac{\dot{V}' + i\cdot\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \ln(z/r_0) \quad .$$

Die Entwicklung dieser komplexen Potentialfunktion liefert:

$$f(z) = \left(\frac{\dot{V}'}{2\cdot\pi} \cdot \ln\frac{r}{r_0} - \frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \theta\right) + i\cdot\left(\theta \cdot \frac{\dot{V}'}{2\cdot\pi} + \frac{\Gamma}{2\cdot\pi} \cdot \ln\frac{r}{r_0}\right).$$

Der Imaginärteil entspricht der gesuchten Stromfunktion, weshalb sich

auch die Gleichung für die Stromlinienschar sofort angeben läßt:

$$\Psi = \frac{\Gamma}{2.\pi} . \ln (r/r_o) + \frac{\dot{V}'}{2.\pi} . \theta = \text{Konst} \quad ;$$

Diese Gleichung beschreibt logarithmische Spiralen, Bild 13-7. Diese Strömungsform hat eine besondere Bedeutung in der Theorie der radialen Strömungsmaschinen.

5. Beispiel

Für das komplexe Strömungspotential $f(z) = c_\infty .(z + \frac{r_o^2}{z})$ sind zu bestimmen:

a) die radiale und die tangentiale Geschwindigkeitskomponenten c_r und c_θ ;

b) die Potential- und die Stromfunktion ;

c) die Gleichung für die Stromlinienschar ;

d) die physikalische Interpretation der Strömungsbewegung .

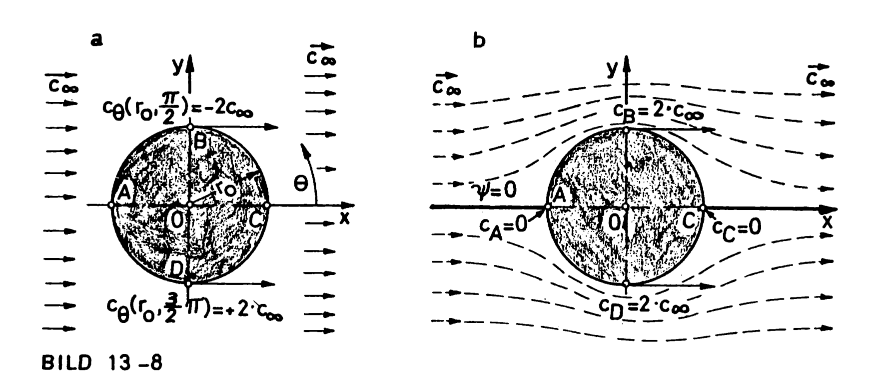


BILD 13-8

Lösungen:

a) c_r und c_θ :

Gl.(13-6): $e^{i.\theta} . \frac{df(z)}{dz} = c_\infty . e^{i.\theta} . (1 - \frac{r_o^2}{z^2}) = c_\infty . e^{i.\theta} . (1 - \frac{r_o^2}{r^2} . e^{-2i\theta})$

$$e^{i.\theta} . \frac{df(z)}{dz} = c_\infty . (\cos\theta + i.\sin\theta) - c_\infty . \frac{r_o^2}{r^2} . (\cos\theta - i.\sin\theta) = c_r - i.c_\theta \ .$$

$$c_r = c_\infty . \cos(1 - \frac{r_o^2}{r^2}) \quad \text{und} \quad c_\theta = - c_\infty . (1 + \frac{r_o^2}{r^2}) . \sin\theta \quad .$$

Einige Grenzwerte: $c_{r\infty} = \lim_{r\to\infty} c_r = c_\infty.\cos\theta$; $c_{\theta\infty} = \lim_{r\to\infty} c_\theta = -c_\infty.\sin\theta$.
Damit folgt:

$\theta = 0$, $c_{r\infty} = c_\infty$ und $c_{\theta\infty} = 0$;

$\theta = \pi$, $c_{r\infty} = -c_\infty$ und $c_{\theta\infty} = 0$. - Für $r \to r_o$ findet man in allen Punkten des Kreises vom Radius r_o ,daß $c_r = 0$ ist,Bild 13-8,Pos. a.Interessant sind noch die Geschwindigkeiten in den Punkten A ,B,C und D :

In Punkt A gilt: $\theta = \pi$; $c_\theta = 0$: Staupunkt ;
in Punkt C gilt: $\theta = 0$; $c_\theta = 0$: Staupunkt ;

$$c_\theta = -2.c_\infty.\sin\theta \;;$$

in Punkt B gilt: $\theta = \pi/2$; $c_\theta = -2.c_\infty$: das Minuszeichen sagt aus,daß die Geschwindigkeit gegen die θ-Richtung auftritt;
in Punkt D gilt: $\theta = (3/2).\pi$; $c_\theta = 2.c_\infty$.
In den Punkten C und D trifft man auf Maximalgeschwindigkeiten ! - Siehe Bild 13-8,Pos. b .

b) φ und ψ :

Die Entwicklung des komplexen Strömungspotentials führt zu den gesuchten Funktionen:

$$f(z) = c_\infty.(r.e^{i.\theta} + \frac{r_o^2}{r}.e^{-i.\theta}) = c_\infty.\cos\theta.(r + \frac{r_o^2}{r}) + i.c_\infty.(r - \frac{r_o^2}{r}) = \varphi + i.\psi \,.$$

$$\varphi = c_\infty.\cos\theta.(r + \frac{r_o^2}{r}) \quad \text{und} \quad \psi = c_\infty.\sin\theta.(r - \frac{r_o^2}{r}).$$

c) Gleichung der Stromlinienschar :

Die Gleichung der Stromlinien (Bild 13-8,Pos. b) wird durch

$$c_\infty.\sin\theta.(r - r_o^2/r) = \text{Konst}$$ dargestellt.

$\psi = 0$ liegt vor beim Kreis mit Radius r_o und bei $\theta = 0^o$ und $\theta = \pi$.
(Gesamte x - Achse !)

d) Physikalische Interpretation:

Es handelt sich offensichtlich um die translatorische Umströmung eines Zylinders von der Höhe h = 1 m .

6.Beispiel

Ein Flugzeugschuppen wird durch einen starken Wind ($c_\infty = 10$ m/s)

von der Seite her angeblasen,Bild 13-9,Pos. a .Als Innendruck gilt der Atmosphärendruck mit $p_0 = 1{,}015$ bar.Der Durchmesser wird mit $D = 2.r_0 = 30$ m angegeben;die Schuppenlänge lautet $L = 50$ m.Als mittlere Luftdichte verwende man $\varrho = 1{,}225\ kg/m^3$.-Man ermittle die Kraft in y-Richtung,mit welcher die Halle aufgrund der Überdruckwirkung "angehoben" wird.

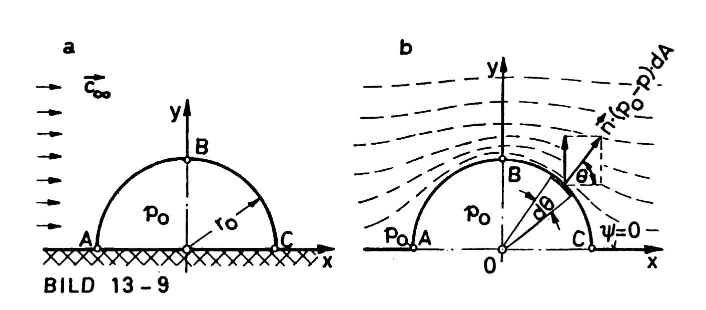


BILD 13-9

Lösungen:

Zunächst sei daran erinnert, daß das Strömungsfeld hier gerade der oberen Hälfte des Strömungsbildes von Beispiel 5 entspricht. Infolgedessen darf man auf die dort ermittelte Geschwindigkeitsverteilung zurückgreifen.Es interessiert nur die Geschwindigkeitsverteilung längs des Stromlinienabschnitts ABC.-Die Druckverteilung lautet nach Bernoulli: $p_0 - p = (\varrho/2).c_\theta^2$,wenn man bei der Luftströmung berechtigterweise von den Höhengliedern absieht.Aus der Geschwindigkeitsverteilung ist abzulesen,daß der äußere Druck bis auf die Staupunkte A und C überall längs der kreisförmigen Hallenkontur niedriger liegt als der in der Halle vorherrschende Atmosphärendruck!-Die Kraft in y-Richtung berechnet sich folgendermaßen (Bild 13-9,Pos. b) :

$$F_{püy} = L.r_0.\int_0^\pi (p_0 - p).\sin\theta\,.d\theta = L.r_0.\int_0^\pi \left(\frac{\varrho}{2}.c_\theta^2\right).\sin\theta\,.d\theta$$

$$F_{püy} = L.r_0.\frac{\varrho}{2}.\int_0^\pi (-2.c_\infty\,.\sin\theta)^2.\sin\theta\,.d\theta = 2.\varrho.L.r_0.c_\infty^2.\int_0^\pi \sin^3\theta.d\theta$$

$$\underline{\underline{F_{püy} = \frac{8}{3}.\varrho.L.r_0.c_\infty^2}}\quad . \quad - \quad \text{In Zahlen:}$$

$$\underline{\underline{F_{püy}}} = (8/3).1{,}225.50.15.10^2 = \underline{\underline{245\ kN}}\ .$$

Bemerkungen:

Diese verhältnismäßig große Kraft verdeutlicht,warum Hausdächer bei starkem Wind abgedeckt werden(Unterdruckeffekt).

Im Nachtrag zum 5.Beispiel kann gesagt werden,daß bei einer vollen Umströmung eines Zylinders aus Symmetriegründen die gleich große Kraft

nach "unten" wirkt, so daß die Kraftwirkungen in y-Richtung keine Resultierende haben. Analoges gilt für jede andere Diagonallage. Das ist aber ein Sonderfall des d'Alembertschen Paradoxons, wonach in einer zirkulationsfreien Strömung eines vollkommenen Fluids es zu keiner Druckkraftwirkung auf umströmte, geschlossene Körperoberflächen kommt.

7. Beispiel

Ein hoher, zylindrischer Schornstein ist der "Kernhalter" einer Windhose, Bild 13-10, Pos. a, geworden. Die diesbezügliche Zirkulation beträgt $\Gamma = 5\ m^2/s$. Der Schornstein wird zudem durch einen mäßigen Wind von $c_\infty = 2$ m/s angeblasen. - Man ermittle für einen Durchmesser von d = 2 m und eine Teilhöhe h = 10 m sowie der Luftdichte $\rho = 1{,}225\ \frac{kg}{m^3}$:

a) die Windkraft F_A (Bild 13-10);
b) die Geschwindigkeiten für einen beliebigen Querschnitt in den Punkten A, B, C und D;
c) das komplexe Strömungspotential;
d) die Lage der Staupunkte A' und C';
e) die strömungstechnische Bedeutung der vorgelegten Strömungsform.

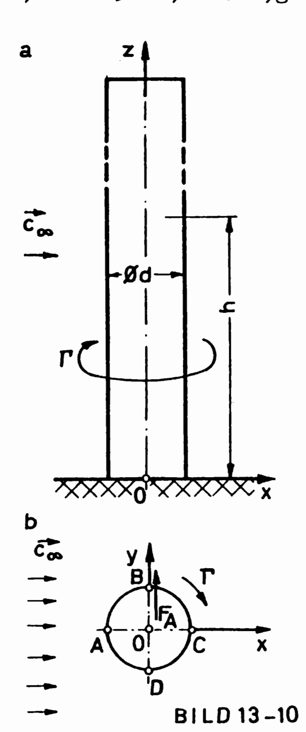


BILD 13-10

Lösungen:

a) F_A:

Eine Zirkulation ergibt nach Kutta und Joukowsky im Zusammenspiel mit einer Parallelströmung einen dynamischen Auf- bzw. Quertrieb, und zwar nach Gl. (12-50):

$F_A = \rho \cdot c_\infty \cdot \Gamma \cdot b = 1{,}225 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 10 = 122{,}5$ N .

Entsprechend der gemachten Ausführungen auf S. 295 ist in diesem Falle die Windkraft in y-Richtung wirkend (Bild 13-10, Pos. b).

b) $c_{\theta A}$, $c_{\theta B}$, $c_{\theta C}$ und $c_{\theta D}$:

Es kommt zur Überlagerung der Geschwindigkeiten nach Bild 13-8, Pos. b, und der durch den Potentialwirbel (Windhose) verursachten induzierten Geschwindigkeit $c_i = \Gamma/(2 \cdot \pi \cdot r_o) = \text{const}$ (Gl. 11-52).

$c_i = 5/(2.\pi.1) = 0{,}796$ m/s . - Damit ergeben sich:

$$c_{\theta A} = c_i = 0{,}796 \text{ m/s} \; ; \; c_{\theta B} = 2.c_\infty + c_i = 2.2 + 0{,}796 = 4{,}796 \text{ m/s} \; ;$$

$$c_{\theta C} = c_i = 0{,}796 \text{ m/s} \; ; \; c_{\theta D} = 2.c_\infty - c_i = 2.2 - 0{,}796 = 3{,}204 \text{ m/s} \; .$$

Diese Geschwindigkeitsvektoren sind auch in Bild 13-11 angedeutet.

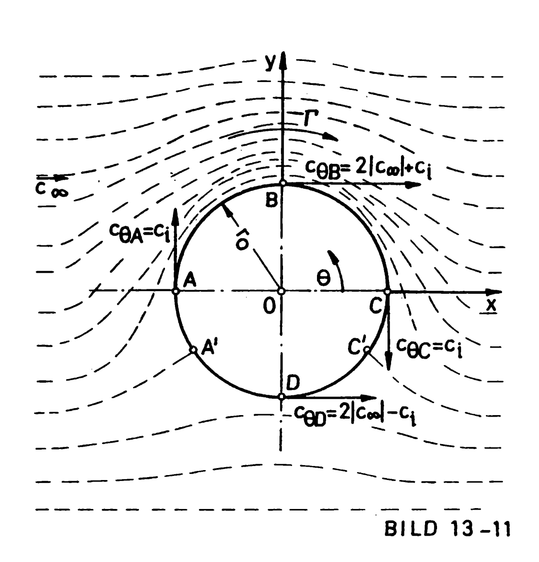


BILD 13-11

c) Komplexes Potential:

Die Zusammenfassung der Teilpotentiale aus Beispiel 4 und 5 (Potentialwirbel und Parallelumströmung eines Zylinders) ergeben:

$$f(z) = c_\infty . (z + \frac{r_0^2}{z}) - \frac{i.\Gamma}{2.\pi} . \ln \frac{z}{r_0} .$$

RTf(z) : Potentialfunktion;
ITf(z) : Stromfunktion.

d) Staupunkte A' und C':

Unter Beachtung der Winkelorientierung für c_θ (s.S.309 unten) erhält man zusammen mit c_i, was c_θ entgegengesetzt wirkt:

$$- 2.c_\infty . \sin\theta - c_i = 0 \quad ; \quad \sin\theta_{A';C'} = - \frac{\Gamma}{4.\pi.r_0.c_\infty} .$$

Die beiden Staupunkte sind ebenfalls in Bild 13-11 eingetragen.

e) Strömungstechnische Bedeutung:

Daß ein rotierender Zylinder zusammen mit einer Parallelströmung einen Quertrieb ergibt,hat schon Magnus erkannt (Magnus-Effekt;Flettner-Rotorschiff).Kutta und Joukowsky haben diesen Effekt mathematisch erklärt.

Die Superposition einer Parallelströmung und eines Potentialwirbels ist die Basis der Tragflügeltheorie in der Aerodynamik.Durch konforme Abbildung kann man die umströmte Kreiskontur des umströmten Zylinders in ein Profil umwandeln.Somit lassen sich für das Profil das Stromlinienspektrum,die Geschwindigkeitsverteilung,die Druckverteilung,

Kräfte,Momente und Angriffspunkte beschaffen.

8.Beispiel

Es wird ein Kreis gegeben vom Radius r_o und der Mittelpunktslage M(-a; b),gültig für das Koordinatensystem oxy ,Bild 13-12.-Man ermittle:

a) die konforme Abbildung der Kreiskontur aus der Stammebene (oxy) in die Abbildungsebene (OXY);aus praktischen Gründen für eine einprägsame Zuordnung sind beide Ebenen übereinandergelegt;insbesondere bilde man die Punkte p_1,p_2,p_3 und p_4 ab und ermittle die Punkte P_I,P_{II},P_{III} und P_{IV} ;
die Abbildungsfunktion heißt: $Z = z + \frac{q^2}{z}$ mit dem Parameter q , welcher der Strecke $\overline{ol}$ entspricht; diese Funktion stammt von Joukowsky; ferner kommentiere man

b) die Profilumströmung bei translatorischer Anströmung;

c) die Profilumströmung bei Zirkulation;

d) die Profilumströmung bei translatorischer Anströmung und Zirkulation.

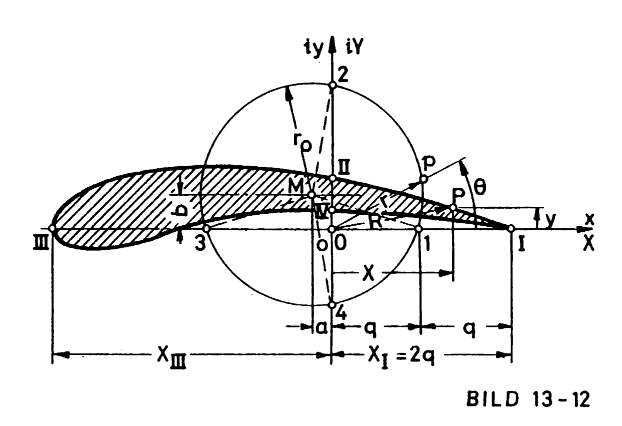


BILD 13-12

Lösungen:

a) Konf.Abbildung:

Jedem Punkt der Stammebene $p(r,\theta) = p(x,y)$ entspricht ein Punkt der Abbildungsebene $P(R,\theta) = P(X,Y)$. Die Abbildungsfunktion läßt sich mit Hilfe von $z = r.e^{i\theta}$ umformen:

$$Z = r.e^{i\theta} + \frac{q^2}{r}.e^{-i\theta} = r.(\cos\theta + i.\sin\theta) + \frac{q^2}{r}.(\cos\theta - i.\sin\theta) ;$$

$Z = X + i . Y$; daraus folgen die Koordinaten der Abbildungspunkte:

$$\underline{\underline{X = (r + \frac{q^2}{r}).\cos\theta}} \quad ; \quad \underline{\underline{Y = (r - \frac{q^2}{r}).\sin\theta}} \quad .$$

Nun werden die Koordinaten der Ausgangspunkte und der Abbildungspunkte in der Art $p(r,\theta) \longrightarrow P(X,Y)$ ermittelt:

$p_1\ (q,0);$	$X = 2.q$	$Y = 0 \qquad : P_I$
$p_2(b+\sqrt{r_o^2-a^2},\frac{\pi}{2});$	$X = 0\ ;$	$Y = b+\sqrt{r_o^2-a^2}-\frac{}{b+\sqrt{r_o^2-a^2}} \quad : P_{II}$
$p_3(a+\sqrt{r_o^2-b^2},\pi);$	$X = -(a+\sqrt{r_o^2-b^2}+\frac{}{a+\sqrt{r_o^2-b^2}});$	$Y = 0 \qquad : P_{III}$
$p_4(\sqrt{r_o^2-a^2}-b,\frac{3.\pi}{2});$	$X = 0\ ;$	$Y = b+\frac{}{\sqrt{r_o^2-a^2}-b}-\sqrt{r_o^2-a^2} \quad : P_{IV}$.

Mit diesem Verfahren kann man alle Profilpunkte ermitteln.

b) <u>nur translatorische Profilumströmung</u>:

Im 5.Beispiel ist die translatorische Umströmung einer Zylinderkontur (Kreisform) vorgeführt worden (Bild 13-8).Da man mit Hilfe der Joukowskyschen Abbildungsfunktion die Kreiskontur in ein Profil verzerren läßt,kann man analogerweise auch das Strömungsspektrum der Stammebene abbilden,Bild 13-13,Pos. a.Die Zylinderstaupunkte A und C werden zu Profilstaupunkten A' und C' .Gleichzeitig stellen sich an der scharfen Profilhinterkante HK sehr hohe Geschwindigkeiten ein,die im Falle einer Schneide gegen unendlich gehen (Bild 13-4,Pos. c),so daß der Hinterkantenpunkt zum singulären Punkt wird,was physikalisch irreal ist.Außerdem wird nach S.311/312 keine Kraftwirkung auf das Profil festgestellt;Analoges folgt aus Gl.(12-50) wegen $\Gamma = 0$.

c) nur Profilumströmung mit Zirkulation:

Auch hierbei folgt aus dem Auftriebssatz $F_A = \varrho . \Gamma . c_\infty . b$ (Gl.12-50), daß die Kraftwirkung wegen Fehlens der Translationsgeschwindigkeit verschwindet.Das Strömungsbild ist Bild 13-13,Pos. b,zu entnehmen. Der Hinterkantenpunkt wird gleichfalls zum singulären Punkt,denn die Hinterkante muß ja mit unendlich großer Geschwindigkeit umströmt werden,was wie im Fall b)(oben)physikalisch unmöglich ist.

d) Profilumströmung mit Parallelströmung und Zirkulation :

Nunmehr kann nach dem Kutta-Joukowskyschen Auftriebssatz ein Auftrieb entstehen,aber nur unter Einhaltung einer notwendigen Bedingung:

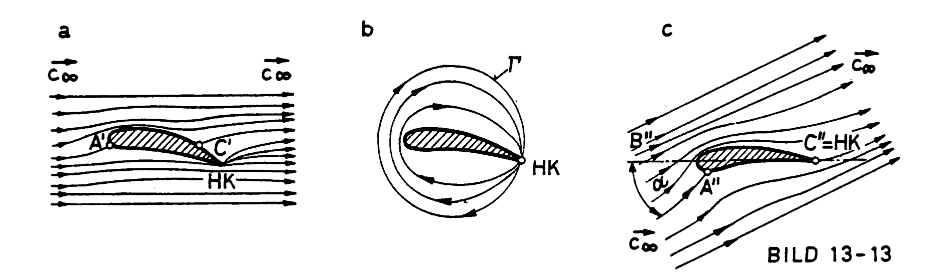


BILD 13-13

Eine angelegte Zirkulation - über ihre Entstehung wird in Abschn.18 berichtet - verschiebt verständlicherweise den Staupunkt C' weiter zur Hinterkante hin.Solange dieser Staupunkt noch vor der Hinterkante liegt,stellt man,theoretisch gesehen,immer eine unendlich große Umströmungsgeschwindigkeit fest,was physikalisch unmöglich ist.Also muß eine derart bemessene Zirkulation aufgebracht werden,daß der Staupunkt C'' in der Profilhinterkante HK zu liegen kommt;erst dann herrscht dort eine endlich große Geschwindigkeit,Bild 13-13,Pos. c.Da Strömungsbeobachtungen diese Überlegungen bestätigen,kann das wirkliche Geschehen folgendermaßen beschrieben werden:

> Wenn sich bei einer Profilumströmung eine glatte Hinterkantenabströmung einstellt,dann muß sich eine Zirkulation aufgebaut haben,damit der hintere Staupunkt mit der Profilhinterkante zusammenfällt.Dies ist die Joukowskysche Abflußbedingung.

Die Berechnungsmethode ist jetzt klar: Der Hinterkante entspricht aufgrund der Abbildungsfunktion ein Punkt der Kreiskontur;letzterer wird zum Staupunkt gemacht über $c = 0$ .Die daraufhin notwendige Anströmungsfront ist um den Winkel α gegen die Horizontale geneigt. Man spricht vom Anstellwinkel α .Die Achse B"C" heißt Nullauftriebsachse.

Dem Bild 13-13,Pos. c,ist auch zu entnehmen:Die Stromliniendichte an der Profiloberseite ist größer als auf der Unterseite.Eng anliegende Stromlinien weisen auf größere Strömungsgeschwindigkeit und nach Bernoulli auf kleinere Drücke hin;Entsprechendes gilt für die Unterseite: Es stellt sich am Profil ein von unten nach oben wirkender Druckunterschied ein,der ebenfalls die Kraftwirkung am Tragflügel erklären läßt.

14. WASSERSTOSS

14.1. Theorie

Aus einem Hochbehälter fließt Wasser durch eine gerade Rohrleitung ab.-Man nehme nun im Punkte 0 an,daß der Schieber plötzlich die Leitung absperren möge.Dieser technisch unmögliche Fall dient als Grenze für die sich anschließenden Betrachtungen.In Bild 14-1,Pos.a, ist das Anlagenschema gezeigt.Die Wassersäule wird abgebremst,wobei die kinetische Energie in Formänderungsarbeit des Wassers und des Rohres übergeht, da es sich bei beiden um elastische Körper handelt.Durch die Abbremsung baut sich in 0 ein zusätzlicher Überdruck $\Delta p_{ü}$ auf.Gleichzeitig wandert die Druckfront mit Schallgeschwindigkeit c_S nach oben der noch ankommenden Flüssigkeit entgegen (Bild 14-1,Pos.b). Hinter der Front ist das Fluid zur Ruhe gekommen.Damit gelangt nach der Zeit Δt eine Wassermasse von $\rho . A . L$ zum Stillstand,wenn man die Säulenlänge $\overline{OP} = L$ mit

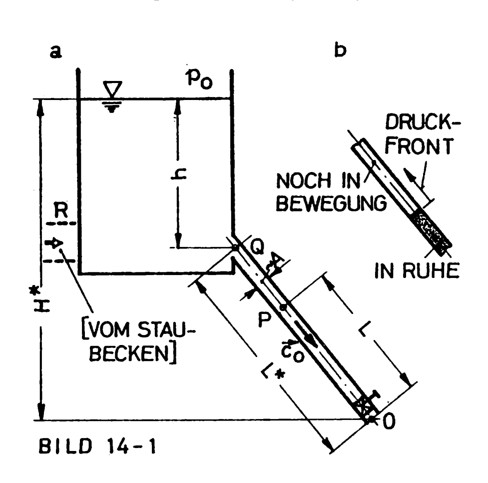


BILD 14-1

$$L = c_S \cdot \Delta t$$

berechnet.Schreibt man der Wassersäule vor der Verzögerung die Geschwindigkeit c_0 zu,dann folgt aus dem Kräftegleichgewicht für den Abbremsvorgang unter Vernachlässigung von Reibung und Wassergewicht:

Gl.(8-7): $\sum \vec{F_i} - m.\vec{a} = 0$; $\Delta p_{ü} . A = \rho . A . L . (c_0/\Delta t)$;

$\Delta p_{ü} = \rho . c_0 . (L/\Delta t)$;

$$\boxed{\Delta p_{ü} = \rho \cdot c_0 \cdot c_S} \qquad (14\text{-}1).$$

Wird der Absperrschieber nur teilweise geschlossen,aber ebenfalls plötzlich,dann bleibt eine Restgeschwindigkeit im Rohr übrig.Der dabei sich einstellende zusätzliche Überdruck lautet:

$$\boxed{\Delta p_{ü}' = \rho \cdot c_S \cdot (c_0 - c)} \qquad (14\text{-}2).$$

Hat die Druckwelle das Leitungsende in Q erreicht,dann wird der Überdruck dort oben eine Wasserströmung aus dem Rohr in den Behälter in Gang setzen.Es setzt gleichzeitig eine Nachrückbewegung des Wassers

ein, so daß eine Unterdruckwelle nach unten läuft. Ohne Dissipationen und Reflexionen stellt sich der Sachverhalt ein, daß Überdruck und Unterdruck betragsmäßig gleich sind. Nach der Zeit $t^* = 2.L^*/c_S$ erreicht die Unterdruckwelle den Absperrschieber in O. Nun kehrt die Strömung schlagartig ihre Richtung wieder um, das Wasser fließt augenblicklich nach unten und füllt die Drucksenke aus. Es entsteht wieder das ursprüngliche Druckmaximum. Theoretisch würde sich dieser Schwingungsvorgang wiederholen. - Während der ersten Periode spricht man vom "direkten Wasserstoß". Die "indirekten Wasserstöße" verlaufen mit abnehmenden Amplituden für $t_S > 2.L^*/c_S$. - "t_S" bedeutet Schließzeit.
Nicht nur die Überdrücke im Punkt O , sondern auch die Unterdrücke im Punkt Q können sehr gefährlich für die Rohrleitung sein.
Setzt man bezüglich des indirekten Wasserstoßes die Annahme einer linearen Geschwindigkeitsabnahme von $c = c_o.(1 - t/t_S)$ in Gl.(14-2) ein - letztere ist ja für plötzliches Schließen angegeben - , so erhält man damit wiederum einen oberen Grenzwert für die maximale statische Druckzunahme:

$$\Delta p_{ü}'' = \varrho . c_S . \left[c_o - c_o(1 - t/t_S) \right] = \varrho . c_S . c_o . \frac{t}{t_S} = \Delta p_{ü} . \frac{t}{t_S} .$$

Den diesbezüglichen Maximalwert erzielt man natürlich bei allen Vereinfachungen - wie z.B., daß die Schallgeschwindigkeit unabhängig von der Rohrelastizität sei, - nur während der Zeit $t = 0$ bis $t = t^* = 2.L^*/$
Durch Einsetzen in obige Gleichung erhält man die Grenzbeziehung von Michaud:

$$\boxed{\Delta p_{ü}'' = \varrho . c_o . 2.L^*/t_S} \qquad (14-3).$$

14.2. Beispiel

Einlaufbauwerke, Rohrleitungen usw. von Wasserkraftwerken (Speicherkraftwerken) sind durch schachtartige Schwallräume gegen Druckstöße abgesichert. - Nach Bild 14-1 befinde sich in O der Absperrschieber im Turbinenhaus, bei R kommt das Wasser durch einen Stollen oder eine Rohrleitung vom Staubecken her, der Behälter selbst übernehme die Rolle des Wasserschlosses. - Angaben: $p_o = 0{,}96$ bar; $c_S = 1420$ m/s; $L^* = 400$ m; $c_o = 0{,}75$ m/s ; $H^* = 150$ m ; $h = 25$ m ; $t_S = 2$ s . -
Man ermittle:

a) den Nachweis, ob der direkte oder indirekte Wasserstoß vorliegt;
b) den statischen zusätzlichen Überdruck in O ;

c) den normalen statischen Überdruck in O ,also ohne Stoß;
d) den gesamten Überdruck bei Stoß;
e) den Absolutdruck in Q für den Fall der nach unten laufenden Unterdruckwelle.

Lösungen:

a) Direkter oder indirekter Stoß:

Man berechne zunächst die Dauer einer Periode mit $t^* = 2.L^*/c_S$;
$t^* = 2.400/1420$; $t^* = 0{,}563 \text{ s} < t_S = 2 \text{ s}$: indirekter Stoß!

b) $\Delta p_{ü}''$:

Gl.(14-3) : $\Delta p_{ü}'' = 1000.0{,}75.2.400/2$; $\Delta p_{ü}'' = 3 \text{ bar}$.

c) $p_{ü}$:

$p_{ü} = \varrho \cdot g \cdot H^* = 1000.9{,}81.150$; $p_{ü} = 14{,}715 \text{ bar}$.

d) $p_{üges}$:

$p_{üges} = p_{ü} + \Delta p_{ü}'' = 14{,}715 + 3$; $p_{üges} = 17{,}715 \text{ bar}$.

d) p_{Qu} :

Der Absolutdruck in Q ist $p_Q = p_o + \varrho .g.h = 0{,}96.10^5 + 10^3.9{,}81.25$;
$p_Q = 3{,}413 \text{ bar}$.

Der sich einstellende Unterdruck gegenüber Normalverhältnissen in Q ist $-\Delta p_{ü}'' = 3$ bar.Infolgedessen wird $p_{Qu} = 0{,}413 \text{ bar}$.

15. GRUNDBEGRIFFE DER DYNAMIK REELLER FLUIDE

15.1. Allgemeines

Erweitert man das Fluidgeschehen von vollkommenen Fluiden auf reelle Fluide,dann treten zu den bisherigen Kräftearten noch auf Reibungseffekten beruhende Tangentialkräfte (Abschn. 4; Gl.4-5;s.S.42/43) hinzu.-Bei der Besprechung der physikalischen Fluideigenschaften ist auch die Zähigkeit (Abschn.2.6 ,S.19/20) zur Sprache gekommen.Entscheidenden Einfluß auf die Entstehung tangentialer Reibungsspannungen hat

der sogenannte Geschwindigkeitsgradient (Mittelwert,ausgedrückt durch den Differenzenquotienten $\Delta c/\Delta s$; Lokalwert,ausgedrückt durch den Differentialquotienten dc/ds).Bild 15-1 soll die Zusammenhänge nochmals aufzeigen.
Äußerst wichtig für die Untersuchungen in der Dynamik reeller Fluide ist die Feststellung:

> Reelle und benetzende Fluide haften an einer festen Wand und haben dort die Geschwindigkeit $\vec{c}_{Wand} = 0$.Man spricht hierbei von der Haftbedingung.(Bei vollkommenen Fluiden ist $\vec{c}_{Wand} > 0$).

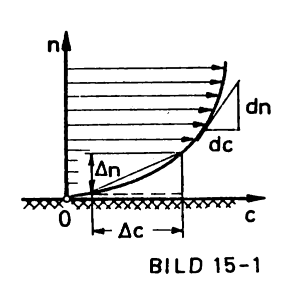


BILD 15-1

Dank der genialen "Entdeckung" von Ludwig Prandtl:

- Reibungswiderstände bei umströmten oder durchströmten Körpern beruhen auf dem Reibungsgeschehen in wandnahen Schichten,den sogenannten Grenzschichten, -

lassen sich reelle Strömungsvorgänge so betrachten,als ob man es bei den natürlichen Fluiden in Wandnähe mit "reellen" und außerhalb der Grenzschicht mit "vollkommenen" Fluiden zu tun hätte. Die mit vollkommenen Fluiden bisher gewonnenen Erkenntnisse sind durch Experimente zu korrigieren,was seinen Niederschlag in Korrekturgliedern oder Korrekturfaktoren findet.

15.2. Mechanische Ähnlichkeit

15.2.1. Theorie

Die experimentelle Forschung muß sich häufig der Modelluntersuchungen bedienen.Damit ist die wichtige Frage abzuklären,in welcher Beziehung das Modell (Index M) zur Normalanlage (Index N) stehen muß,damit experimentelle Ergebnisse für Normalauslegungen übertragbar sind.-In der Fluidmechanik verlangt man geometrische und mechanische Ähnlichkeit. Die Forderung nach geometrischer Ähnlichkeit ist naheliegend.Unter der mechanischen Ähnlichkeit verstehe man die Ähnlichkeit der Kräfte an entsprechenden Stellen im Modell und in der Normalanlage.Kräfte in der Fluidmechanik stehen mit folgenden physikalischen Phänomenen in enger Beziehung: Massenträgheit,Schwere,Zähigkeit,Elastizität und Kapillarität.Diese wiederum lassen sich durch folgende physikalische Größen beschreiben: Dichte (ρ),Geschwindigkeit (c),Erdbeschleunigung (g),

absolute Zähigkeit (η) oder kinematische Zähigkeit

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho}} \qquad (15\text{-}1),$$

Schallgeschwindigkeit (c_S) und die Oberflächenspannung (τ_s).Die zwischen Modell und Normalanlage einzuhaltende Ähnlichkeitsbedingungen werden nach der Methode der Dimensionsanalyse aufgestellt.-Unter einer Dimension verstehe man eine meßbare,physikalische Eigenschaft von Körpern,Vorgängen oder Zuständen.So kennt man beispielsweise als Dimensionen: die Geschwindigkeit (Kurzform: dim c),die Masse (dim m),die Leistung (dim P),den Druck (dim p) usw.-Die Dimension stellt eine qualitative Aussage dar.Eine diesbezügliche quantitative Aussage gibt die sogenannte physikalische Größe an,die man als Produkt aus Maßzahl x Maßeinheit zu verstehen hat.-In der Fluidmechanik sind folgende Symbole für Grunddimensionen,auf denen das"Internationale Maßsystem" aufbaut, anzuführen: L für Länge; T für Zeit; M für Masse; Θ für Temperatur. Über die physikalischen Gesetze oder Definitionsgleichungen lassen sich zusammengesetzte Dimensionen,wie z.B.: Geschwindigkeit = Länge/ Zeit bzw. dim c = dim s/dim t ; Impulsstrom = Masse.Länge/Zeit^2 bzw. dim $\dot{I}$ = dim m . dim s / (dim t)^2 ; in abgekürzter Form: dim c = L/T; dim $\dot{I}$ = M.L/T^2 usw.,auf die Grunddimensionen zurückführen.-Unter einer zusammengesetzten Dimension versteht man das Potenzprodukt der Grunddimensionen.

15.2.2. Beispiel

Es sind Ähnlichkeitsbedingungen dafür zu beschaffen,damit man am Modell gemessene Kräfte auf die Normalanlage umrechnen kann.-Eine solche Kraft werde von den Haupteinflußgrößen: Geometrie,Fluiddichte,Fluidgeschwindigkeit,kinematische Zähigkeit,Schallgeschwindigkeit,Oberflächenspannung und Erdbeschleunigung bestimmt.

Lösung:

Da die geschlossene Funktion $\boxed{F_M = f(L,\rho,c,g,\nu,c_S,\tau_s)_M}$ (15-2)
unbekannt,aber eindeutig und stetig (also differenzierbar) ist,strebt man den Zusammenhang über eine Potenzreihe an:

$$\boxed{F_M = \sum k_i . L^{x_1} . \rho^{x_2} . c^{x_3} . g^{x_4} . \nu^{x_5} . c_S^{x_6} . \tau_s^{x_7}} \qquad (15\text{-}3).$$

L steht hier für eine maßgebende geometrische Größe.-Beachtet man das Homogenitätsprinzip nach Fourier: die Glieder der beiden Gleichungsseiten müssen gleiche Dimensionen haben,dann geht die algebraische Gl.(15-3) in folgende Dimensionsgleichung über :

$\dim F_M = (\dim L)^{x_1} . (\dim \rho)^{x_2} . (\dim c)^{x_3} . (\dim g)^{x_4} . (\dim \gamma)^{x_5} .$

$. (\dim c_S)^{x_6} . (\dim \tau_s)^{x_7}$; nach Einführung der Symbole für die Grunddimensionen gilt:

$$L.T^{-2}.M = (L)^{x_1}.(L^{-3}.M)^{x_2}.(L.T^{-1})^{x_3}.(L.T^{-2})^{x_4}.(L^2.T^{-1})^{x_5}. .(L.T^{-1})^{x_6}.(T^{-2}.M)^{x_7} \qquad (15\text{-}4) .$$

Die Exponenten der Grunddimensionen müssen nun links und rechts gleich sein:

Für die Länge L gilt : $1 = x_1 - 3.x_2 + x_3 + x_4 + 2.x_5 + x_6$;

für die Zeit T gilt : $-2 = -x_3 - 2.x_4 - x_5 - x_6 - 2.x_7$;

für die Masse M gilt : $1 = x_2 + x_7$.

Mittels dieser drei Bestimmungsgleichungen, - im behandelten Beispiel muß man nur auf $n = 3$ Grunddimensionen zurückgreifen -, kann man von den $m = 7$ unbekannten Exponenten drei eliminieren, - sieben ist hier auch die Anzahl der als Unabhägig-Variable erkannten physikalischen Größen -, so daß sich schließlich $m-n = 7-3 = 4$ dimensionslose Potenzfaktoren ergeben werden, die als sogenannte Kennzahlen die Rolle von Unabhängig-Variablen übernehmen. Das ist aber die Aussage des π-Theorems von E.Buckingham. - Man erhält nun:

$x_1 = 2+x_4-x_5-x_7$; $x_2 = 1-x_7$; $x_3 = 2-2.x_4-x_5-x_6-2.x_7$.

Die Exponenten in Gl.(15-3) werden der neuen Situation angepaßt:

$$F_M = \sum k_i . L^{(2+x_4-x_5-x_7)} . \rho^{(1-x_7)} . c^{(2-2x_4-x_5-x_6-2x_7)} . g^{x_4} . \gamma^{x_5} . c_S^{x_6} . \tau_s^{x_7} ;$$

durch Umordnung erhält man:

$$F_M = L^2.\rho.c^2.\sum k_i . \left[\frac{L.g}{c^2}\right]^{x_4} . \left[\frac{\gamma}{L.c}\right]^{x_5} . \left[\frac{c_S}{c}\right]^{x_6} . \left[\frac{\tau_s}{L. \ .c^2}\right]^{x_7} \qquad (15\text{-}5).$$

Es fällt auf, daß der Ausdruck $(L^2.\rho.c^2)$ von der Dimension einer Kraft ist; deshalb müssen die übrigen Wertekombinationen dimensionslos sein. Zur Abkürzung werden jetzt dimensionslose Kennzahlen eingeführt, welche die Anfangsbuchstaben berühmter Wissenschaftler tragen:

Froudsche Kennzahl	$Fr = c^2/(L.g)$	
Reynoldssche Kennzahl	$Re = (L.c)/\nu$	(15-6) .
Machsche Kennzahl	$Ma = c/c_s$	
Webersche Kennzahl	$We = (L.\rho.c^2)/\tau_s$	

Damit lautet Gl.(15-5) nunmehr:

$$F_M = L^2.\rho.c^2.\sum k_i .Fr^{-x_4}.Re^{-x_5}.Ma^{-x_6}.We^{-x_7}$$

oder

$$F_M = \frac{\rho}{2}.c^2.A.\underbrace{\sum k_i'.Fr^{-x_4}.Re^{-x_5}.Ma^{-x_6}.We^{-x_7}}_{= K_M} \qquad (15\text{-}7).$$

Es gilt offenbar folgende Gleichheit:

$$F_M/(0{,}5.\rho.c^2.A)_M = F_N/(0{,}5.\rho.c^2.A)_N \quad \text{, wenn } K_M = K_N \text{ ist.}$$

Die zu F_M analoge Kraft in der Normalanlage F_N ist also berechenbar geworden.Allerdings hat die Gl.(15-7) nur theoretischen Wert,weil sich in Praxis alle vier Kennzahlen in diesem Beispiel nicht gleichhalten lassen.Es gilt aber,folgendes festzuhalten:

- Die Übertragbarkeit von Modellergebnissen auf die Normalanlage ist nur durch die Einhaltung der Globalkennzahl $K_M = K_N$ als völlig korrekt anzusehen.
- In Praxis muß man sich leider auf Haupteinflußgrößen beschränken.
- Ist K_M beispielsweise hauptsächlich eine Funktion von Re, dann muß zur Quasi-Gleichhaltung von $K_M = K_N$ nur beachtet werden,daß $Re_M = Re_N$ ist ! - Die Exponenten sind somit unbedeutend geworden.

Sonderfälle:

Ist die Schwerkraft wie bei Schiffsversuchen von besonderem Einfluß,dann gilt es,die Froudsche Kennzahl einzuhalten: $Fr_M = Fr_N$.
Beeinflussen hauptsächlich Zähigkeitskräfte das Geschehen,dann muß die Reynoldssche Kennzahl konstant gehalten werden: $Re_M = Re_N$.
Überwiegen Kompressibilitätseffekte,so muß die Machsche Kennzahl beachtet werden: $Ma_M = Ma_N$.
Sind Oberflächenspannungen wesentlich, ist die Webersche Kennzahl einzuhalten: $We_M = We_N$.

16. DIE BEWEGUNG DER REELLEN FLUIDE

16.1. Bewegungsgleichungen

16.1.1. Bewegung nach Couette

Die Einführung in die Dynamik viskoser Fluide wird anhand eines allgemeinen Beispiels vorgenommen: der Couette-Strömung.
Zwischen zwei ruhenden,horizontalen Platten fließt ein zähes Fluid dank eines Druckunterschiedes p_1-p_2 ,Bild 16-1,Pos.a .Daneben sind noch bekannt: die absolute Zähigkeit η ,der Plattenabstand h ,die Kanallänge L ,die Tiefenerstreckung (senkrecht auf der Bildebene b).
Der Fließvorgang ist stationär,der Schwereeinfluß sei vernachlässigbar.-Man ermittle:

a) die Geschwindigkeitsverteilung $c = f(y)$;
b) den Volumenstrom $\dot{V}$;
c) die mittlere Strömungsgeschwindigkeit c_m ;
d) die maximale Geschwindigkeit c_{max} ;
e) die Verteilung der Tangentialspannungen $\tau = f(y)$;
f) die Intensität der Wirbelröhren Γ .

Lösungen:

a) $c = f(y)$:

Das Kräftegleichgewicht an einem herausgetrennten Fluidquader (Bild 16-1,Pos. b) lautet in x-Richtung: $\sum F_{ix} = p_1.A-p_2.A - 2.\tau.A' = 0$.

$$2.y.(p_1 - p_2).b = 2.b.L.\tau \quad ;$$

Gl.(2-16) ermöglicht die Bestimmung von der Scherspannung :

$$\tau = - \eta .dc/dy \quad .$$

Das Minuszeichen rührt davon her,daß die Geschwindigkeit c(y) bei wachsendem y abnimmt,die Scherspannung aber ein positives Ergebnis einbringen soll.- $y.(p_1 - p_2) = -L.\eta.dc/dy$;

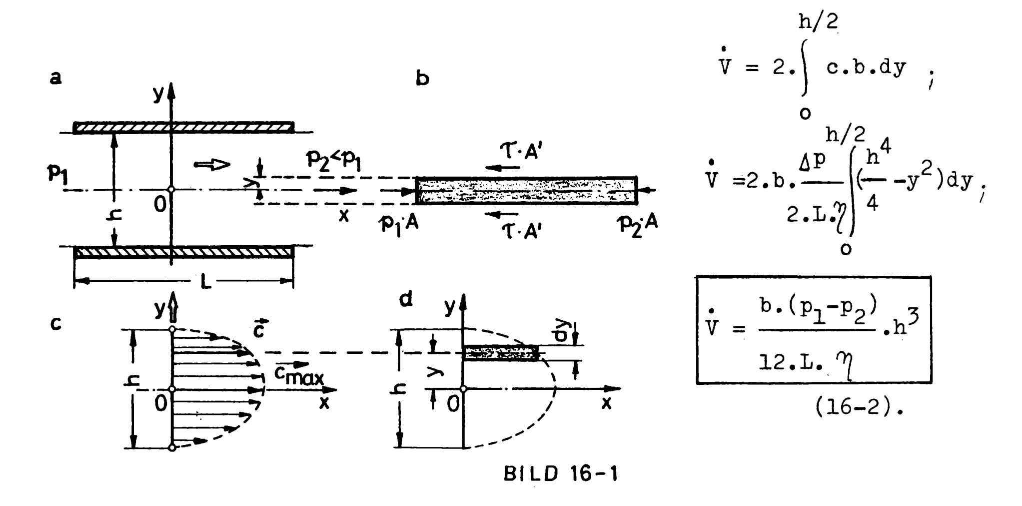
$$dc = - \frac{p_1 - p_2}{L.\eta}.y.dy$$; die Integration ergibt

$$c = - \frac{p_1 - p_2}{L.\eta}.\frac{y^2}{2} + \text{konst}$$.- Mittels der Haftbedingung $c = 0$ bei $y = h/2$ folgt schließlich die parabolische Geschwindigkeitsverteilung (Bild 16-1, Pos. c):

$$c = \frac{p_1 - p_2}{2.L.\eta}.(\frac{h^2}{4} - y^2) \qquad (16\text{-}1).$$

b) $\dot{V}$:

Das Volumenstromdifferential heißt $d\dot{V} = b.dy.c(y)$ nach Bild 16-1,Pos



$$\dot{V} = 2.\int_0^{h/2} c.b.dy \quad ;$$

$$\dot{V} = 2.b.\frac{\Delta p}{2.L.\eta}\int_0^{h/2}\left(\frac{h^4}{4} - y^2\right)dy \quad ;$$

$$\boxed{\dot{V} = \frac{b.(p_1 - p_2)}{12.L.\eta}.h^3} \qquad (16\text{-}2).$$

BILD 16-1

c) $\underline{c_m}$:

Die mittlere Geschwindigkeit folgt sofort aus : $c_m = \frac{\dot{V}}{b.h}$;

$$\boxed{c_m = \frac{p_1 - p_2}{12.L.\eta}.h^2} \qquad (16\text{-}3).$$

d) $\underline{c_{max}}$:

Aus der parabolischen Geschwindigkeitsverteilung (Gl.16-1) folgt für $y = 0$ in Kanalmitte :

$$\boxed{c_{max} = \frac{p_1 - p_2}{8.L.\eta}.h^2 = \frac{3}{2}.c_m} \qquad (16\text{-}4).$$

e) $\underline{\tau = f(y)}$:

Verwertet man Gl.(16-1) durch Differenzieren in $\tau = -\eta.dc/dy$,dann erhält man die gesuchte Beziehung:

$$\boxed{\tau = \frac{p_1 - p_2}{L}.\, y} \qquad (16\text{-}5).$$

In Kanalmitte verschwindet die Scherspannung,gegen die obere oder untere Wand nimmt sie linear zu.

f) $\underline{\Gamma}$:

Aus Bild 16-2,Pos. a,ist zu ersehen,daß sich zwei Wirbelzonen ausbilden: in der oberen drehen die Einzelwirbel im Gegenuhrzeigersinn,

in der unteren im Uhrzeigersinn.Somit hat man es mit zwei Wirbelröhren

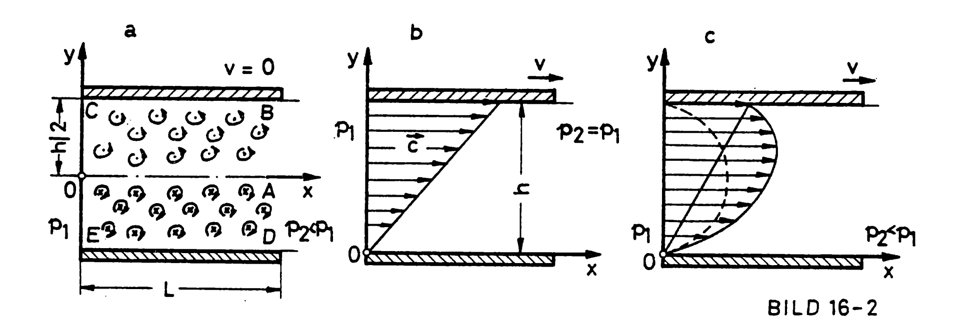


BILD 16-2

zu tun.Nach Gl.(11-49),S.216,erlaubt die Berechnung der Intensität einer Wirbelröhre:

$$\Gamma = \oint_{OABCO} \vec{c}\,.d\vec{r} = \int_{OA} c\;.dx + \int_{AB} c\;.dy\;(+) + \int_{BC} c\;.dx + \int_{CO} c\;.dy\;(-) = \int_{0}^{L} c_{max}\;.\;dx$$

$$\boxed{\Gamma = L.c_{max} = \frac{p_1 - p_2}{8\;.\;\eta}\;.h^2} \qquad (16\text{-}6).$$

Die Beträge der beiden Wirbelröhren sind gleich.
Eine wirbelfreie Strömung hätte hier bei gleichem Volumenstrom die konstante Geschwindigkeit c_m im Querschnitt zur Folge gehabt.-Die Wirbel dagegen induzieren Zusatzgeschwindigkeiten,so daß in Kanalmitte die Strömungsgeschwindigkeit zunimmt und in Wandnähe bis auf null abnimmt.

Bemerkungen:

(1) Bewegt sich die obere Platte mit der Fahrzeuggeschwindigkeit v , bleibt die untere dagegen in Ruhe,so stellt sich im Falle $\Delta p = 0$ bei einer Newtonschen Flüssigkeit die bekannte lineare Geschwindigkeitsverteilung nach Bild 16-2,Pos. b,ein: $c = (v/h).y$.

(2) Überlagert man nun beide Fälle: Strömung bei ruhenden Platten und Strömung bei bewegter oberen Platte,so erhält man eine Geschwindigkeitsverteilung nach Bild 16-1,Pos. c.

(3) Die durch die bewegte Platte verursachte Zusatzströmung bedeutet eine gewisse Pumpwirkung von links nach rechts.

16.1.2. Bewegung nach Hagen-Poiseuille

In einem engen,horizontalen Rohr strömt ein zähes Fluid von links nach rechts,Bild 16-3,Pos. a .

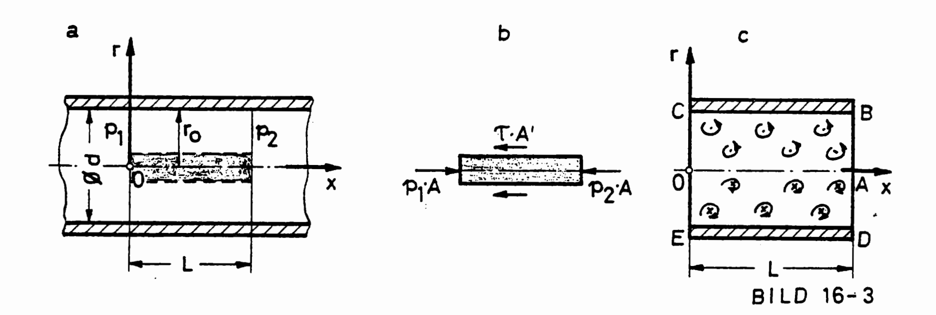


BILD 16-3

Folgende Angaben sind bekannt: d ; L ; $p_1 - p_2$.-Man ermittle:

a) die Geschwindigkeitsverteilung $c = f(r)$ bei stationärer Strömung ;

b) den Volumenstrom $\dot{V}$;

c) die mittlere Geschwindigkeit c_m ;

d) die maximale Geschwindigkeit c_{max} ;

e) die Verteilung der Tangentialspannung $\tau = f(r)$;

f) die Intensität des Wirbelringes Γ.

Lösungen:

a) $c = f(r)$:

Das dynamische Gleichgewicht wird an einem koaxialen Kontrollraumelement vorgenommen: $\sum F_{ix} = p_1.A - p_2.A - \tau.A' = 0$,Bild 16-3,Pos. b.

$\Delta p \,.\, \pi.r^2 = 2.\pi.r.L.$; $\tau = -\eta.dc/dr$;

nach der Integration und Berücksichtigung der Randbedingung $r = d/2 = r_o$ und $c = 0$ folgt:

$$c = \frac{p_1 - p_2}{4.L.\eta}.(r_o^2 - r^2) \qquad (16\text{-}7).$$

b) $\dot{V}$:

Mit Hilfe des Volumenstromdifferentials $d\dot{V} = 2.\pi.r.dr.c(r)$ ergibt die Integration von 0 bis r_o:

$$\dot{V} = \frac{\pi.(p_1 - p_2)}{8.L.\eta}.\, r_o^4 \qquad (16\text{-}8).$$

c) c_m :

$c_m = \dot{V}/(\pi.r_o^2)$;

$$c_m = \frac{p_1 - p_2}{8.L.\eta}.r_o^2 \qquad (16\text{-}9).$$

d) c_{max} :

In der Rohrachse (r = 0) trifft man die maximale Geschwindigkeit an:
Gl.(16-7):

$$c_{max} = \frac{p_1 - p_2}{4.L.} . r_o^2 = 2.c_m \qquad (16\text{-}10).$$

e) $\tau = f(r)$:

Aus $\tau = -\eta .dc/dr$ und der Differentiation von c(r),Gl.(16-7),ergibt sich:

$$\tau = \frac{p_1 - p_2}{2.L} .r \qquad (16\text{-}11).$$

Die Scherspannung ist wiederum in Kanalmitte null und wächst linear mit dem Radius bis auf $\tau_{max} = (p_1 - p_2).r_o/(2.L)$ an.

f) Γ:

Bild 16-3,Pos. c,kann entnommen werden,daß in der oberen Kanalhälfte ein linksdrehendes Wirbelrohr und in der unteren ein rechtsdrehendes entsteht.Da hier kein ebenes Problem wie im letzten Beispiel der Couette-Strömung vorliegt - dort sind die beiden Wirbelröhren unendlich lang -, sondern ein rotationssymmetrisches und damit räumliches,bilden die beiden Wirbelröhren,zusammengefaßt,einen Wirbelring.-Wiederum verwende man Gl.(11-49):

$$\Gamma = \oint_{OABCO} \vec{c}\,.d\vec{r} = \int_{OA} c.dx + \cancel{\int_{AB} c.dr}\ (+) + \cancel{\int_{BC} c.dx} + \cancel{\int_{CO} c.dr}\ (-) = \int_0^L c_{max}.dx$$

$$\Gamma = c_{max}.L = \frac{p_1 - p_2}{4.\eta} .r_o^2 \qquad (16\text{-}12).$$

Der Wirbelring erhöht die Geschwindigkeit in Rohrmitte bis c_{max} und reduziert die Geschwindigkeit in Wandnähe bis c = 0.

16.1.3. Allgemeine Bewegungsgleichungen

Infolge des Zähigkeitseinflusses treten alle vier in Abschn.4,S.42/43, erwähnten Kraftarten in der Fluidmechanik auf: äußere Massenkräfte $\vec{F}_a$, Trägheitskräfte $\vec{F}_{tr}$,Druckkräfte (im Gleichgewichtsfall am Kontrollraum als Stützreaktion verstanden) $\vec{F}_p$ und Tangentialkräfte $\vec{F}_t$.

Damit liegt auch die Beschäftigung mit dem 3.Arbeitsbereich vor (S.43). Die Berechnung der Einzelkräfte erfolgt prinzipiell mit den Gl.(4-1), (4-2),(4-4) und (4-5).-Im dynamischen Gleichgewicht halten sich also nach dem d'Alembertschen Prinzip,Gl.(8-7)+(9-15)+(9-16),folgende Kräfte am fluidischen Kontrollraum das Gleichgewicht:

$$\sum \vec{F}_a + \sum \vec{F}_{tr} + \sum \vec{F}_p + \sum \vec{F}_t = 0 \qquad (16\text{-}13).$$

Dies ist die allgemeinste Bewegungsgleichung.Sie gilt für jede Strömung und für jedes Fluid ohne Einschränkung.-Sie wird für Sonderfälle weiterentwickelt.Geht man beispielsweise davon aus,daß es bei Absolutströmung nur eine Trägheitskraft und eine äußere Massenkraft gibt,dann läßt sich Gl.(16-13) mit Gl.(4-2) und Gl.(4-4) folgendermaßen angeben:

$$\int_{(V)} \vec{f}.\varrho.dV - \int_{(V)} \frac{d\vec{c}}{dt}.\varrho.dV - \int_{(A)} \vec{n}.p.dA + \int_{(A)} \vec{\tau}.dA = 0 \qquad (16\text{-}14).$$

oder in Differentialform:

$$\vec{f} - \frac{d\vec{c}}{dt} - \frac{\nabla p}{\varrho} + \frac{d\vec{F}_t}{dm} = 0$$

16.1.4. Gleichungen von Navier-Stokes

Für Newtonsche Fluide,die man also bezüglich ihres Zähigkeitsverhaltens durch die Gl.(2-14) bis (2-16),S.19,beschreiben kann,läßt sich die Differentialform der Gl.(16-14) präzisieren.-Für ein inkompressibles Fluid kann man im Falle stationärer Strömung die x-Komponente der Scherspannung folgendermaßen ermitteln [27] :

$$\tau_x = \eta.\frac{dc_x}{dn} = \eta.\frac{\frac{\partial c_x}{\partial x}.dx + \frac{\partial c_x}{\partial y}.dy + \frac{\partial c_z}{\partial z}.dz}{dn} \quad ;$$

$$\tau_x = \eta.(i.\frac{\partial c_x}{\partial x} + j.\frac{\partial c_x}{\partial y} + k.\frac{\partial c_x}{\partial z}).(i.\frac{dx}{dn} + j.\frac{dy}{dn} + k.\frac{dz}{dn}) = \eta.\text{grad } c_x.\vec{n} \quad .$$

$\vec{n} = i.\cos\alpha + j.\cos\beta + k.\cos\gamma$ steht für den Normaleneinheitsvektor. Das Skalarprodukt $\vec{n}.\text{grad } c_x$ ist die Ableitung von c_x in der Normalen-

richtung. Für die entsprechende Kraftkomponente läßt sich angeben:

$$F_{tx} = i.\vec{F}_t = \oint_{(A)} \tau_x.dA = \eta.\oint_{(A)} \vec{n}.\nabla c_x.dA = \eta.\int_{(V)} \mathrm{div}(\nabla c_x).dV$$

, wofür die zweite Integralformel von Gauß eingesetzt worden ist. Zudem erhält man über $\mathrm{div}(\nabla c_x) = \nabla.(\nabla c_x) = \nabla^2 c_x$, wobei

$$\nabla^2 = \nabla.\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

den Laplace-Operator bedeutet, nachstehende Gleichung:

$$F_{tx} = \eta.\int_{(V)} \nabla^2 c_x.dV$$

und bezüglich der Masse: $\frac{dF_{tx}}{dm} = \frac{\eta}{\varrho}.\nabla^2 c_x = \nu.\nabla^2 c_x$.

Über die Resultierende in differentieller Form $d\vec{F}_t = i.dF_{tx} + j.dF_{ty} + k.dF_{tz}$ ergibt sich, auf die Masse bezogen:

$$\boxed{\frac{d\vec{F}_t}{dm} = \frac{\vec{\tau}.dA}{dm} = \nu.(i.\nabla^2 c_x + j.\nabla^2 c_y + k.\nabla^2 c_z) = \nu.\nabla^2 \vec{c}} \quad (16\text{-}15).$$

Setzt man Gl.(16-15) in Gl.(16-14) ein, dann erhält man in Komponentenform die drei Navier-Stokeschen Differentialgleichungen, die sich zu einer Vektorgleichung zusammenfassen lassen:

$$\boxed{\vec{f} - \frac{d\vec{c}}{dt} - \frac{\nabla p}{\varrho} + \nu.\nabla^2 \vec{c} = 0} \quad (16\text{-}16).$$

Es gibt nur wenige exakte Sonderlösungen hierzu, wie z.B. die Bewegungen nach Couette und Hagen-Poiseuille (s. Abschn. 16.1.1 und 16.1.2).

16.2. Grenzschichten

16.2.1. Bewegungsgleichungen im Grenzschichtbereich

Vergleicht man die ebene Potentialbewegung um einen Kreiszylinder (Bild 13-8 und Bild 16-4, Pos. a) mit der analogen Umströmung durch ein reelles Fluid, Bild 16-4, Pos. b, so stellt man folgendes fest: Auf der Vorderseite (VS) ähneln sich die Strömungen bis auf die sich ausbildende Grenzschicht im reellen Fall (Prandtlsche Grenzschicht!). Auf der Rückseite (RS) dagegen löst die Strömung im reellen Fall in den Punkten B_1' und B_2' ab. Der Grenzschichtbereich wird von der festen Wand (B_1,C,A,D,B_2) und der flüssigen Linie (B_1,B_1',C',A',D',B_2',B_2) eingeschlossen. Die Trennungslinien $B_1'E_1$ und $B_2'E_2$ scheiden den Wirbelbereich vom äußeren Potentialbereich und gehören nicht mehr zur Grenz-

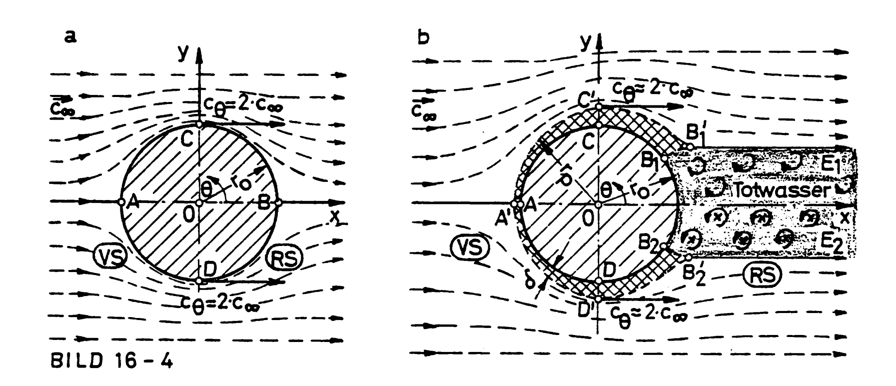


BILD 16-4

schicht.-Man untersuche nun die Scherspannungen innerhalb und außerhalb der Grenzschicht bezüglich ihrer Größenordnung,und zwar für ein natürliches Fluid.Als Beispiel dienen die Verhältnisse in y-Richtung.
Innerhalb der Grenzschicht gilt:

$c_\theta = -c_\infty.(1 + r_o^2/r_p^2)$ nach S.309 unten rechts,wenn man $\theta = \pi/2$ setzt.
Da r_o^2/r_p^2 mit $r_p = r_o + \delta$ gegen eins geht,gilt $c_\theta \approx 2.c_\infty$ .Somit folgt: $\tau = \eta .2.c_\infty / \delta$!-Wegen der Kleinheit von δ nicht zu vernachlässigen(s.S.180) !

Außerhalb der Grenzschicht gilt:

$\tau = \eta.\lim_{y \to \infty} (2.c_\infty - c_\infty)/(y - r_o) \to 0$! - Schlußfolgerung :
Ein natürliches Fluid verhält sich innerhalb der Grenzschicht wie ein reelles Fluid und außerhalb wie ein vollkommenes (vgl. Abschn.15.1 ,S.320).

Die Navier-Stokeschen Differentialgleichungen lassen sich für den Grenzschichtbereich vereinfachend darstellen,wenn folgende Vernachlässigungen beachtet werden: $\vec{f} \approx 0$ wegen Geringfügigkeit der Grenzschichtmasse; da man von einem quasi-ebenen Problem ausgehen möge,verschwinden alle z-Änderungen: $\partial/\partial z \equiv 0$ und $c_z \equiv 0$;deshalb reduzieren sich die Navier-Stokesschen Gleichungen (16-16) unter Zuhilfenahme der Gl.(11-13), nämlich der substantiellen Beschleunigung,zu:

$$c_x.\frac{\partial c_x}{\partial x} + c_y.\frac{\partial c_x}{\partial y} + \frac{1}{\varrho}.\frac{\partial p}{\partial x} = \nu .(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2})$$

$$c_x.\frac{\partial c_y}{\partial x} + c_y.\frac{\partial c_y}{\partial y} + \frac{1}{\varrho}.\frac{\partial p}{\partial y} = \nu .(\frac{\partial^2 c_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_y}{\partial y^2}) \quad .$$

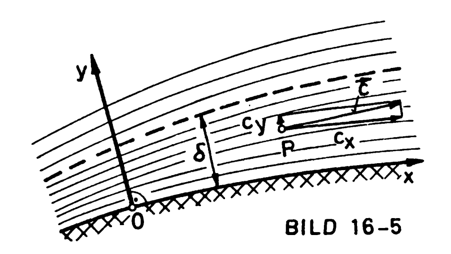


BILD 16-5

Bild 16-5 zeigt eine Grenzschicht mit Wand und schwach gekrümmter x-Achse des Koordinatensystems. Vernachlässigt man die y-Komponente der Geschwindigkeit, so vereinfachen sich oben stehende Gleichungen weitgehend :

$$c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 c_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \right) \quad (16\text{-}17); \qquad \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (16\text{-}17a).$$

Aus Gl.(16-17a) folgt :

(1) Wenn der Druck unabhängig von y ist, dann gilt sofort: $\partial p/\partial x = dp/dx$.

(2) An einer bestimmten Stelle x ändert sich der Druck in y-Richtung nicht. Dies ist bei der Druckmessung durch "Wandbohrungen" von entscheidender Wichtigkeit ! - Die Messung des statischen Druckes wird also durch die Grenzschicht nicht verfälscht.-

Nun wird die Größenordnung der Geschwindigkeitsglieder in Gl.(16-17) abgeschätzt: Wegen des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gilt:

$\partial c_x/\partial x \approx \Delta c_x/\Delta x \approx c_x/x$ und $\partial^2 c_x/\partial x^2 = -c_x/x^2$, sofern man c_x als Mittelwert konstant hält; Geltungsbereich: $x \in [0, L_{ACB_1}]$ nach Bild 16-4, Pos. b.

$\partial c_x/\partial y \approx \Delta c_x/\Delta y \approx c_x/y$ und $\partial^2 c_x/\partial y^2 = -c_x/y^2$ für $y \in [0, \delta]$.

Da $\delta \ll L_{ACB_1}$ und $\delta^2 \lll L^2_{ACB_1}$ sind, läßt sich schlußfolgern:

$|\partial^2 c_x/\partial x^2| \lll |\partial^2 c_x/\partial y^2|$. Damit ist die Vereinfachung von Gl.(16-17) zu rechtfertigen:

$$c_x \cdot \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{dp}{dx} = \nu \cdot \frac{\partial^2 c_x}{\partial y^2} \quad (16\text{-}18).$$

Die notwendige Integration ist recht schwierig. Da die Funktion aus der physikalischen Anschauung heraus stetig und eindeutig, also differenzierbar sein muß, läßt sie sich in eine Potenzreihe entwickeln:

$$c_x = a_o + a_1 \cdot y + a_2 \cdot y^2 + \ldots + a_n \cdot y^n \quad \text{für } y \in (0, \delta) \quad (16\text{-}19),$$

wenn man die Untersuchungen an einer bestimmten Stelle x vornimmt.

<u>Ermittlung der unbekannten Koeffizienten</u>:

(1) Die Randbedingung ergibt an der Wand für $y=0$ und $c_x=0$: $\underline{\underline{a_o = 0}}$.

(2) Die erste Ableitung ergibt mit $y = 0$ zunächst $\partial c_x / \partial y = a_1$.

(3) Die zweite Ableitung ergibt mit $y = 0$: $\partial^2 c_x / \partial y^2 = 2.a_2$ .Setzt man diesen Wert in Gl.(16-18) ein,so folgt für $a_2 = 0{,}5/\eta \, .dp/dx$. An der Fluidgrenze $y = \delta$ gilt selbstverständlich $c_x = c_p$, wobei c_p die Außen- oder Potentialgeschwindigkeit bedeutet.Gl.(18-19) nimmt die Form an: $c_p = a_1.\delta + a_2.\delta^2 + \ldots + a_n.\delta^n$ .Die Glieder für $n > 2$ können vernachlässigt werden:

$c_p \approx a_1.\delta + a_2.\delta^2 = a_1.\delta + 0{,}5/\eta \, .dp/dx.\delta^2$; es folgt somit:

$$a_1 = \frac{c_p - a_2.\delta^2}{\delta} = \frac{c_p}{\delta} - \frac{1}{2.\eta} . \frac{dp}{dx} . \delta \; .$$

Gl.(16-19) kann nun in erster Näherung angegeben werden zu :

$$c_x = \left(\frac{c_p}{\delta} - \frac{1}{2.\eta} . \frac{dp}{dx}\right).y + \frac{1}{2.\eta} . \frac{dp}{dx} .y^2 + \ldots \qquad (16\text{-}20).$$

Hiermit ist die Geschwindigkeitsverteilung in der Grenzschicht näherungsweise bekannt gemacht worden.

16.2.2. Physikalische Betrachtungen

Die folgenden Betrachtungen haben prinzipielle Bedeutung,obwohl sie am Beispiel des reell umströmten Zylinders (Bild 16-4,Pos. b) angestellt werden. - Für zunehmendes x gilt in

Zone AC' : Grenzschichtdicke δ wächst von δ_{min} an;die Geschwindigkeit steigt von $c_p = 0$ bis $c_{pmax} = 2.c_\infty$;der Druck sinkt von p_{max} auf p_{min} .- c_x ist wegen $y < \delta$ und $y > y^2$ immer positiv.

Punkt C': $dp/dx = 0$;Gl.(16-20) zeigt: $c_x = (c_p/\delta).y = (2.c_\infty/\delta).y$!

Zone C'B$_1'$:die Grenzschichtdicke wächst weiter;die Geschwindigkeit nimmt wieder ab bei wachsendem Druck.

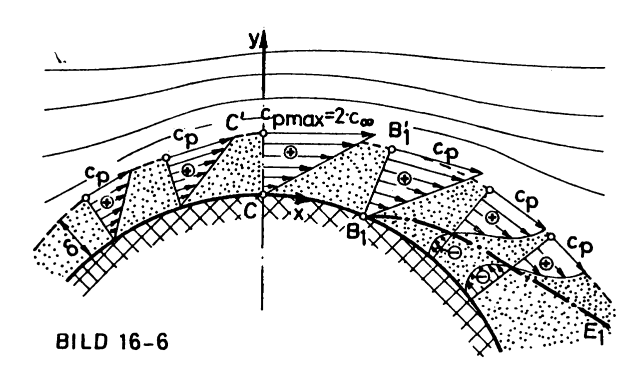


BILD 16-6

Von B_1 an nimmt c_x in Abhängigkeit von y positive und negative Werte an;letztere sind dann vorhanden,wenn in Gl.(16-20) der erste und dritte Summand zusammen kleiner sind als der Betrag des zweiten. Die strichpunktierte Linie ist der geometrische Ort für $c_x = 0$.

Im Punkt B_1 löst die Strömung von der Wand ab!-Die Linie B_1E_1 ist die Spur einer Trennungsfläche zwischen der positiven und negativen Geschwindigkeitszone.Alle ihre Punkte sind Wirbelmittelpunkte.Die(S.215) Trennungsfläche wird auch Diskontinuitätsfläche genannt. Der Bereich zwischen $B_1B_1'E_1$ und $B_2B_2'E_2$ (Bild 16-6 und 16-4,Pos. b) heißt oft auch "Totwasser".In ihm herrscht weitgehend der Druck von B_1' und B_2'. Er ist größer als $p_{C'} = p_{min}$,aber um einiges kleiner als $p_{A'}=p_{max}$. Die Druckkräfte auf der Vorderseite des Zylinders sind also größer als auf der Rückseite,so daß sich in Strömungsrichtung eine resultierende Druckkraft einstellt,die man als Druck- oder Formwiderstand bezeichnet. Das Flächenintegral $F_t = \oint \tau . dA$ ist die durch die Grenzschicht entstandene Reibungskraft,die man,längs c_∞ gesehen,Reibungs- oder Flächenwiderstand nennt.Beide zusammengenommen,bilden den Gesamtwiderstand:

$$\boxed{\vec{F}_W = \vec{F}_{WD} + \vec{F}_{WR}} \qquad (16\text{-}21).$$

16.3. Experiment von Reynolds,Laminarität,Turbulenz

Die Versuchsanordnung gestattet eine stationäre Wasserströmung mittels der Drehhähne H_1 und H_3.Durch den Überlauf ist gleichbleibende Wasserstanshöhe h gewährleistet,Bild 16-7.Durch H_3 kann der Volu-

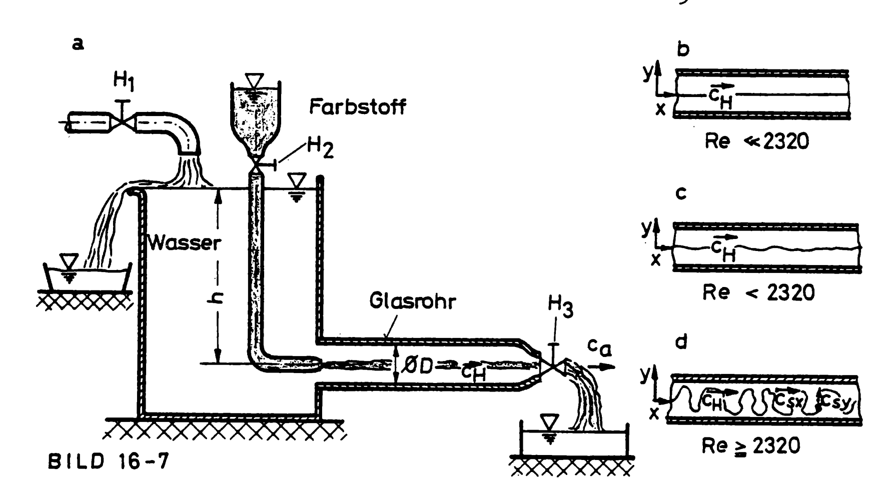


BILD 16-7

menstrom und damit die Strömungsgeschwindigkeit im Rohr eingestellt werden.-Läßt man zur Wasserströmung noch einen Farbstoff einfließen,

dann nimmt der Farbfaden verschiedene Gestalt an, je nachdem, welche Strömungsgeschwindigkeit vorherrscht.
Erinnert man sich der Ausführungen in Abschn.15, wo auf die Notwendigkeit hingewiesen worden ist, fluidmechanische Experimente durch Kennzahlen zu fixieren, und bedenkt man zudem, daß im vorgestellten Experiment Reibungskräfte (Grenzschicht an Rohrinnenwand) von besonderer Bedeutung sind, dann ist es hier nunmehr angebracht, die Reynoldssche Zahl nach Gl.(15-6) für die Rohrströmung wohl zu definieren:

$$\boxed{Re = \frac{D \cdot c}{\nu}} \qquad (16\text{-}22).$$

Die Länge als charakteristische Größe wird beim Rohr vom Durchmesser eingenommen. Als Geschwindigkeit hat man die mittlere Strömungsgeschwindigkeit eingeführt.
Variiert man nun mit H_3 die Strömungsgeschwindigkeit im Rohr, so beeinflußt man natürlich auch den Wert der Reynoldsschen Zahl. Bei sehr kleiner Re-Zahl gilt Bild 16-7, Pos. b: achsparalleler Faden.-Bei etwas erhöhter Geschwindigkeit wird der Farbfaden schon welliger, Bild 16-7, Pos. c.-Bei sehr großer Strömungsgeschwindigkeit führt der verwirbelte Farbfaden wilde, ungeordnete Quer- und Längsbewegungen aus, die der Marschgeschwindigkeit des Wassers überlagert sind, Bild 16-7, Pos. d.
Viele Versuche (bei nicht erschütterungsfrei gelagerter Versuchsanordnung) ergaben eine kritische Re-Zahl von $Re_{krit} = 2320$, bei welcher etwa der Umschlag von der parallelen Schichtströmung, der sogenannten LAMINARSTRÖMUNG, in die TURBULENTE STRÖMUNG eintritt.
In der turbulenten Strömungsform sind der Hauptgeschwindigkeit $\vec{c}_H$ Schwankungsgeschwindigkeiten $\vec{c}_s$ überlagert.
Die physikalische Ursache für die Turbulenz ist noch unbekannt. Darüber heißt es in [8]: Dies ist auch heute noch ein aktuelles Forschungsthema.-Es handelt sich also um einen äußerst komplizierten physikalischen Effekt, den schon viele namhafte Forscher theoretisch und experimentell zu erfassen suchten. Man denke nur an Reynolds, Taylor, Tollmien, Schlichting, Prandtl, v.Kármán u.a.
Eine einfache Erklärung wird hier angeboten für die Tatsache, daß es starke Querbewegungen gibt, wofür man bislang noch keine Auskunft geben konnte:

- Molekularkräfte schließen viele Moleküle zu makroskopischen Fluidballen zusammen (ähnlich der Brownschen Bewegung in einer Kolloidlösung).
- Da in der Laminarströmung mikroskopische Wirbelzentren durch die Wandnähe (siehe Couette-Strömung; Hagen-Poiseuille-Strömung) sich ausbilden, ist auch für die Fluidballen eine Wirbeltendenz zu verzeich-

nen.Es bildet sich eine kleine örtliche Zirkulation aus.

- Fluidteilchen,die von der Wirbelung erfaßt werden und kurz davor sich nur translatorisch bewegten,zollen ihren Beitrag an die Rotationsenergie und werden mit dem Wirbelkern in Marschrichtung langsamer.
- Durch die Verlangsamung sind die Wirbelballen einer relativ größeren Anströmungsgeschwindigkeit ausgesetzt.Wenn aber nach dem Kutta-Joukowskyschen Quertriebssatz,Gl.(12-50),S.297,eine Zirkulationsströmung und eine Parallelströmung superponiert werden (s.auch Abschn. 13.4.,S.313,7.Beispiel),dann entsteht eine Querkraft,die eben im Falle der Turbulenz durchaus die Querbewegungen erklären hilft.

16.4. Turbulente Grenzschicht,Einfluß der Oberflächenrauhigkeit

Experimente zeigen,daß die Grenzschicht längs einer festen Wand ihren laminaren Charakter nur bis zu einem Punkt U ,dem Umschlagspunkt, beibehält,Bild 16-8,Pos.a.Von hier an nimmt sie Turbulenzcharakter an.

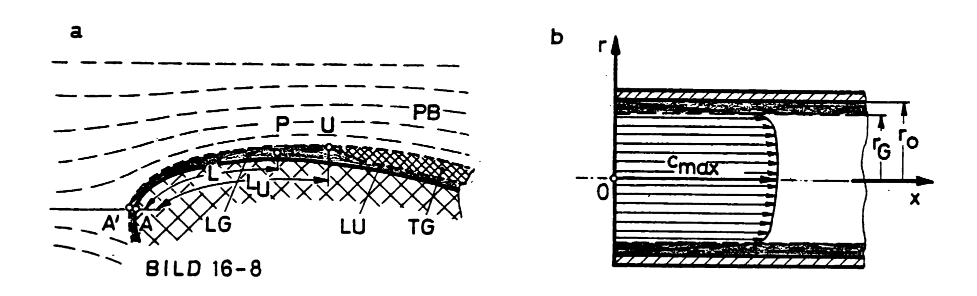


BILD 16-8

Die Grenzschichtdicke nimmt verstärkt zu.-Eine vertiefte Interpretation theoretischer Ergebnisse zeigt,daß die turbulente Grenzschicht gar nicht die feste Wand berühren kann: Es muß also zwischen der Wand und der turbulenten Grenzschicht eine laminare Zwischen- oder Unterschicht immer vorhanden sein.

Bei einem geschlossenen Fluidgebiet,wie es die Rohrströmung darstellt, Bild 16-8,Pos. b ,reicht die laminare Unterschicht von r_G bis r_o . Der übrige Rohrbereich ist turbulent für $Re > 2320$.

Beim offenen Fluidgebiet unterscheidet man drei Strömungsbereiche:

- die Laminargrenzschicht LG bis zum Umschlagspunkt U ;
- die turbulente Grenzschicht TG mit der laminaren Unterschicht LU;
- den Bereich der Außenströmung oder Potentialbewegung PB .

Die Länge L zwischen dem Staupunkt und einem beliebigen Punkt der Grenzschicht P dient zur Bildung der Re-Zahl : $Re = c_{\infty}.L/\nu$. Experimente belegen, daß die Re-Zahl bezüglich des Umschlagpunktes einen Wert von etwa $Re_U = 5.10^5$ annimmt. Vom Umschlagpunkt an, nimmt die laminare Unterschicht der Dicke nach ab.

Glatte Wände besitzen doch noch minimale Rauheiten und Unebenheiten. Einen übertrieben rauh gezeichneten Oberflächenverlauf zeigt Bild 16-9.

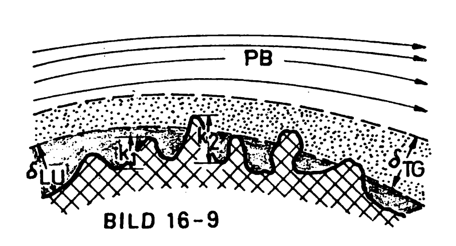


BILD 16-9

Solange die rauhen Stellen in die laminare Grenzschicht eingebettet sind, haben sie keinen Einfluß auf die Wandschubspannung. Wenn die Rauhigkeitsspitzen aber in den turbulenten Bereich der Grenzschicht hineinragen, beeinflussen sie wohl die Reibungsspannungen.-Die absolute Rauhigkeit definiert man als arithmetischen Durchschnitt (z.B.: k_1 ; k_2 ; k_i). In Praxis definiert man eine relative Rauhigkeit. Man wählt als Bezugsgröße eine geeignete Referenzgröße; beim Rohr beispielsweise den Durchmesser. Damit lautet die relative Rauhigkeit $\overline{k} / D$!-

17. Bernoulligleichung mit Dissipationen

17.1. Theorie

Die Wirbelarbeit in der Energieformel, Gl.(12-10), S.232, entartet bei reibungsbehafteten Strömungen ohne Arbeitsaustausch mit der Umgebung in die Dissipationsarbeit der Reibungskräfte: $W_R = \int_1^2 \vec{F}_t.d\vec{r}$ .Auf die Masse bezogen, schreibt man: $w_{R12} = W_R/dm$. Die Energieformel wird damit für stationäre, inkompressible Strömungen in der Form:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2 + w_{R12} \qquad (17\text{-}1)$$

auch Bernoulligleichung mit Dissipationen genannt. Zur Überwindung der Reibkräfte ist eine zusätzliche Druckkraft vonnöten, so daß auch zu diesem Zweck ein zusätzlicher Druckunterschied zur Verfügung gestellt werden muß: Man spricht vom sogenannten Druckverlust p_v ; er entspricht der auf das Volumen bezogenen Reibungsarbeit:

$$\boxed{p_v = W_{R12}/V = w_{R12} \cdot \rho \quad \text{oder} \quad w_{R12} = p_v / \rho} \qquad (17\text{-}2).$$

Setzt man diese Gleichung in Gl.(17-1) ein,dann erhält man die Bernoulligleichung mit Dissipationen in ihrer Druckform:

$$\boxed{p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot c_1^2 + \rho \cdot g \cdot z_1 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot c_2^2 + \rho \cdot g \cdot z_2 + p_v} \qquad (17\text{-}3) .$$

Man kennt prinzipiell zwei verschiedene Dissipationsarten:

- Lineare Dissipationen;sie sind von der Länge L der Stromröhre abhängig wie etwa bei einer geraden Rohrleitung.
- Lokale Dissipationen;sie sind von der Längenerstreckung des Gerätes weitgehend unabhängig.Sie werden verursacht durch lokal konzentrierte Reibungseffekte,massive Druckänderungen und Änderungen der Strömungsrichtung: Alle zusammen lassen lokale Wirbel entstehen.Man denke dabei an: plötzliche Querschnittsänderungen,Rohreintritte,Siebe,Diffusor,Düse,Rohrkrümmer,Rohrverzweigungen,Ventile u.v.a.

Ermittlung linearer Dissipationen:

In Bild 17-1 ist der Kontrollraum einer stationären,inkompressiblen und horizontalen Rohrströmung bei gleichbleibenden Nennweiten angegeben. Aus dem Kräftegleichgewicht folgt: $p_v \cdot (\pi/4) \cdot D^2 = \tau \cdot \pi \cdot D$;

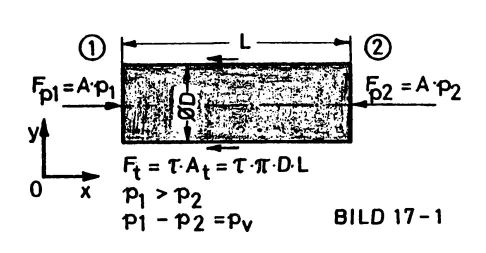


BILD 17-1

$\boxed{p_v = 4 \cdot \tau \cdot (L/D)}$.-Die Reibungskraft $F_t = \tau \cdot \pi \cdot D \cdot L$ hängt erfahrungsgemäß von nachstehenden physikalischen Größen ab: Durchmesser D,Dichte ρ ,mittlere Geschwindigkeit c,kinematische Zähigkeit ν ,Rauhigkeit k,Leitungslänge L.-Hat man aufgrund von Vorversuchen und theoretischen Überlegungen die wichtigsten Einflußgrößen erkannt,dann wird man mittels der Dimensionsanalyse eine Funktion $F_t = f(D,\rho,c,\nu,k,L)$,Gl.(15-2),in Form einer Potenzreihe $F_t = \sum k_i \cdot D^{x_1} \cdot \rho^{x_2} \cdot c^{x_3} \cdot \nu^{x_4} \cdot k^{x_5} \cdot L^{x_6}$,Gl.(15-3),wenigstens ansatzmäßig bestimmen,um über die sich ergebenden Potenzprodukte (nach dem π-Theorem von Buckingham kann man jede Gleichung zwischen physikalischen Größen in die Form einer rein mathematischen Funktion von dimensionslosen,aus den Größen gebildeten Potenzprodukten bringen,S.322) gezielte Hinweise für die Experimentierkunst zu finden!-Obiger Ansatz führt zur Dimensionsgleichung:

$L.M.T^{-2} = L^{x_1}.(M.L^{-3})^{x_2}.(L.T^{-1})^{x_3}.(L^2.T^{-1})^{x_4}.L^{x_5}.L^{x_6}$; Koeffizientenvergleich:

$$\left.\begin{array}{ll} L: & 1 = x_1-3.x_2+x_3+2.x_4+x_5+x_6 \\ T: & -2 = -x_3-x_4 \\ M: & 1 = x_2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x_1 = 2-x_4-x_5-x_6 \;; \\ x_3 = 2-x_4 \;; \\ x_2 = 1 \;. \end{array}$$

Einsetzen der Exponenten in F_t und Umordnen im Sinne von Gl.(15-5) ergibt:

$$F_t = \varrho.D^2.c^2.\sum k_i.\frac{\nu^{x_4}}{D^{x_4}.c^{x_4}}.\frac{k^{x_5}}{D^{x_5}}.\frac{L^{x_6}}{D^{x_6}}$$

$$F_t = \frac{\varrho}{2}.A_t.c^2.\sum k_i'.\left(\frac{\nu}{D.c}\right)^{x_4}.(k/D)^{x_5}.(L/D)^{x_6} = \frac{\varrho}{2}.A_t.c^2.\underbrace{\sum k_i'.Re^{-x_4}.\left[\frac{k}{D}\right]^{x_5}.\left[\frac{L}{D}\right]^{x_6}}_{= K \text{ nach Gl.(15-7)}} ;$$

$\tau = F_t/A_t = \frac{\varrho}{2}.c^2.K$; somit folgt für p_v :

$p_v = 4.\tau.\frac{L}{D} = \frac{\varrho}{2}.c^2.\frac{L}{D}.(4.K)$; man definiert nun nach Darcy-Weisbach den dimensionslosen Koeffizienten, die sogenannte Rohrreibungszahl:

$$\boxed{\lambda = 4.K = f\,(Re, k/D, L/D)} \qquad (17\text{-}4)\,.$$

λ hängt zunächst von der Reynoldsschen Zahl Re ,der relativen Rauhigkeit k/D und der relativen Rohrlänge L/D ab.Für den Druckverlust gilt dann:

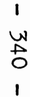
$$\boxed{p_v = \lambda.\frac{L}{D}.\frac{\varrho}{2}.c^2} \qquad (17\text{-}5)\,.$$

Druckverlustmessungen ergaben nun,daß p_v nur linear von L/D abhängt,so daß also λ nicht von L/D beeinflußt wird,weil die L/D-Abhängigkeit bereits durch den daneben stehenden Faktor L/D berücksichtigt ist.-Für die Rohrreibungszahl gilt jetzt vereinfacht [10] :

$$\boxed{\lambda = f\,(Re\,,\,k/D)} \qquad (17\text{-}6).$$

In Bild 17-2 sind für künstlich rauhe Rohre (Sandrauhigkeit k_s) zahlreiche Forschungsergebnisse angegeben.Da der Zusammenhang zwischen k, der realen Rauhigkeit,und k_s ,der Sandrauhigkeit,nur unbefriedigend bekannt ist,begnüge man sich in Praxis mit $k \approx k_s$.-Nachstehend folgen Namen,Geltungsbereich usw. der Gleichungen,die im Diagramm von Bild 17-2 verwendet worden sind.-Nur im laminaren Fall läßt sich λ rechnerisch ermitteln,z.B. durch Umformung von Gl.(16-9):

$p_v = p_1 - p_2 = 32.c_m.L.\nu/D^2.\varrho/\varrho.c_m/c_m.2/2 = (64/Re).(L/D).(\varrho/2).c_m^2$; somit



① HAGEN-POISEULLE (laminar), Gl.(17-7)

② BLASIUS (turbulent u. hydraulisch glatt), Gl.(17-8)

③ PRANDTL (-"- -"- -"- -"-), Gl.(17-9)

④ COLEBROOK-WHITE (turbulent rauhes Übergangsgebiet), Gl.(17-10)

⑤ PRANDTL-NIKURADSE (turbulent u. hydraulisch rauh), Gl.(17-11)

⑥ v. KÁRMÁN-HYPERBEL (Grenzkurve), Gl.(17-12)

BILD 17-2

folgt durch Umformung von Gl.(16-9) nach Hagen-Poiseuille im laminaren Fall (Kurve 1):

$$\boxed{\lambda_{lam} = 64 / Re} \qquad (17\text{-}7).$$

Blasius weist für den turbulenten und hydraulisch glatten Fall nach (Kurve 2):

$$\boxed{\lambda = 0{,}3164 / Re^{0,25}} \qquad (17\text{-}8).$$

Nach Prandtl gilt gleicherweise (Kurve 3):

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 2.\ lg \frac{Re.\sqrt{\lambda}}{2{,}51}} \qquad (17\text{-}9).$$

Für den Übergangsbereich, in dem die Reynoldssche Zahl und die relative Rauhigkeit eine Rolle spielen, geben Colebrook und White an (Feld 4):

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\left[1{,}74 - 2.lg\left(\frac{2.k}{D} + \frac{18{,}7}{Re.\sqrt{\lambda}}\right)\right]^2}} \qquad (17\text{-}10).$$

Als Sonderfall hierzu fanden Prandtl und Nikuradse (Feld 5):

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{\left(1{,}74 - 2.lg \frac{2.k}{D}\right)^2}} \qquad (17\text{-}11);$$

Von der Grenzkurve an, die v.Kármán angab, Kurve 6 :

$$\boxed{Re.(k/D).\sqrt{\lambda} = 260} \qquad (17\text{-}12)$$

spielt also nur noch die relative Rauhigkeit eine Rolle.

Ermittlung lokaler Dissipationen:

Jede Armatur ist für sich zu untersuchen. Man faßt in Gl.(17-5) die Faktoren L/D und λ zusammen und definiert einen dimensionslosen Verlustbeiwert

$$\boxed{\zeta = f\ (\text{Geometrie, Rauheit, Re})} \qquad (17\text{-}13),$$

so daß sich der Druckverlust mit

$$\boxed{p_v = \zeta \cdot \frac{\varrho}{2} \cdot c^2} \qquad (17\text{-}14)$$

berechnen läßt, wobei zu vereinbaren ist, an welcher Stelle die Geschwindigkeit gemeint ist. In Handbüchern findet man meistens nur Angaben für ζ in Abhängigkeit von der Geometrie !

17.2. Anwendungen

17.2.1. Lokale und lineare Dissipationen in Rohrleitungen

1.Beispiel

Auf den Seiten 286/288 ist der Carnotsche Stoßverlust behandelt worden, so daß der Druckverlust $p_v = \Delta p_C$,Gl.(12-43),berechenbar gemacht worden ist.-Hier soll nun in Ergänzung der Verlustbeiwert ζ beschafft werden.

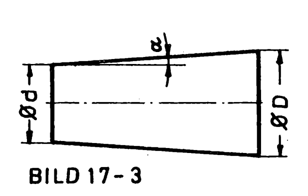


BILD 17-3

Lösung:

Man forme die Gl.(12-43) um:

$$p_v = \frac{\rho}{2}.(c_1-c_3)^2 = \frac{\rho}{2}.(c_1-c_3).(c_1-c_3) = \frac{\rho}{2}.c_1^2.(1-\frac{c_3}{c_1})$$

Berücksichtigt man die Kontinuität:

$d^2.c_1 = D^2.c_3$,so folgt für den Verlustbeiwert: $\zeta = (1 - \frac{c_3}{c_1})^2$ und $\zeta = \left[1 - (d/D)^2\right]^2$.

Bemerkung: Ist die Kanalerweiterung nicht mehr plötzlich,sondern allmählich wie in Bild 17-3,wobei es sich dann um einen Diffusor handelt,dann sind die Druckverluste geringer,was durch einen Reduktionsfaktor $k_{red} = 0{,}05 \div 0{,}3$ festgehalten wird,unter der Bedingung aber nicht abgelöster Strömung,was durch die Einhaltung der Angabe $2.\alpha < 8^o$ gewährleistet ist.

$$\zeta = k_{red} \circ \left[1 - (d/D)^2\right]^2 .$$

2.Beispiel

Zu den wenigen Verlustproblemen,die rechnerisch in Griff genommen werden können,und zwar bei genügender Genauigkeit,gehört auch die plötzliche Richtungsänderung einer Strömung.In Bild 17-4 ist der maßgebende Kontrollraum der Knickzone angedeutet.Kräfte parallel zur Knickebene EE heben sich gegenseitig auf;es bleiben,von Wandreibungskräften abgesehen,zwei Druckkräfte,der eintretende Impulsstrom und die Reaktion des austretenden Impulsstromes übrig.-Man berechne nun den Verlustbeiwert ζ für die plötzliche Richtungsänderung. -(Kanalhöhe $h \perp$ Bildebene).

Lösung:

Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung liefert folgenden Zusammenhang:

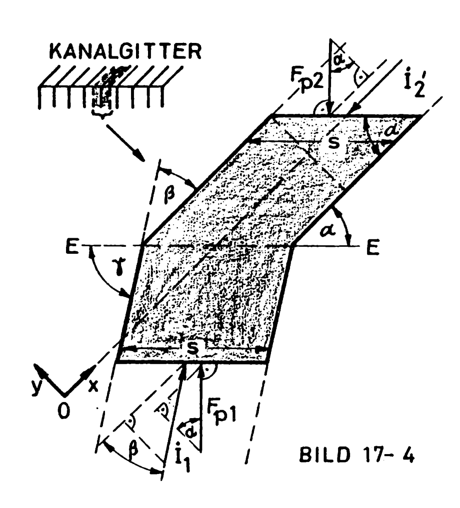


BILD 17- 4

$\sum F_{xi} = \dot{I}_1.\cos\beta - \dot{I}_2' + F_{p1}.\sin\alpha - F_{p2}.\sin\alpha = 0$;der Volumenstrom beträgt: $\dot{V} = c_2.s.h.\sin\alpha$; es folgt:

$\rho.c_2.\sin\alpha.s.h.(c_2 - c_1.\cos\beta) = (p_1 - p_2).s.h.\sin\alpha$;

$$p_1 - p_2 = \rho.c_2.(c_2 - c_1.\cos\beta) \quad (1) .$$

Aus Gl.(17-3) folgt auch für die Druckverluste:

$$p_v = (p_1 - p_2) + (\rho/2).(c_1^2 + c_2^2) \quad (2).$$

Setzt man (1) in (2) ein,so folgt unter Einsatz von Gl.(17-14):

$$p_v = (\rho/2).(c_1^2 - 2.c_1.c_2.\cos\beta + c_2^2) = \zeta.(\rho/2).c_1^2 \quad ;$$

mit $\dot{V} = c_2.s.h.\sin\alpha = c_1.s.h.\sin\gamma$ folgt schließlich:

$$\zeta = 1 - 2.\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}.\cos\beta + \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right)^2 \quad .$$

Bemerkung:

Im Prinzip liegt hier auch die Verlusttendenz einer Krümmerströmung vor.Allerdings muß das Ergebnis ζ mittels eines Ausgleichfaktors k_a korrigiert werden,weil wegen der Zentrifugalkräfte eine massive Geschwindigkeitsverteilung in der Krümmerzone sich ausbildet (außen langsamer,innen schneller),die im Auslauf zu zusätzlichen Mischungsverlusten führt.Experimente sind unumgänglich hierzu.

3.Beispiel

Eine Rohrleitung führt aus einem großen Wasserbehälter von A nach B, wo sich ein einstellbarer Schieber befindet.-Angaben: $L = 500$ m;$D=0,5$ m; $H = 350$ m;$\nu = 10^{-6}$ m^2/s; Ventilverlustbeiwert $\zeta_A = 0,5$ bei Vollöffnung und $\zeta_A' = 20$ im halb geöffneten Zustand;mittlere Rauhigkeit,die in Näherung auch der Sandrauhigkeit entsprechen möge, $k \approx k_s = 0,5$ mm, Einlaufverlustbeiwert $\zeta_0 = 1$.– Man ermittle:

a) die mittlere Strömungsgeschwindigkeit c_m und den Volumenstrom $\dot{V}$

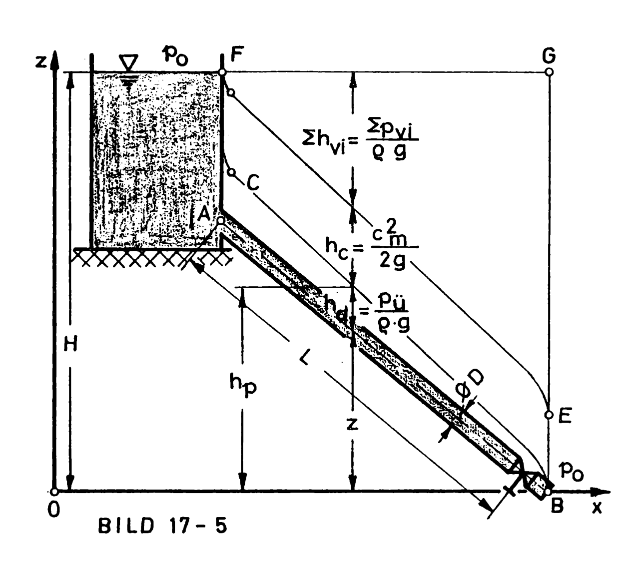


BILD 17-5

bei vollständiger Schieberöffnung;

b) ebenso bei halber Öffnung;

c) Erläuterung von Bild 17-5.

Lösungen:

a) c_m und $\dot{V}$:

Bei Aufgaben dieser Art verwende man grundsätzlich die Gl. (17-3), die Bernoulligleichung mit Dissipationen, und die Gl. (17-5) und (17-14), womit die entsprechenden Druckverluste berechnet werden. Zwischendurch ist mit der Re-Zahl, Gl. (16-22), zu arbeiten, was für die Ermittlung der Rohrreibungszahl λ erforderlich ist. Häufig muß man auch zunächst einen λ-Wert annehmen und im nachhinein eine Re-Kontrolle durchführen, was u.U. zu einem iterativen Lösungsweg zwingt.

Gl. (17-3): $p_1 = p_2 = p_o$; $c_1 = 0$ (Torricelli !) ; $c_2 = c_m$; $z_1 - z_2 = H$.

Somit ergibt sich:

$$c_m^2/2 + g.H = p_v/\varrho = (1/\varrho).\sum p_{vi} = (\zeta_o + \lambda.L/D + \zeta_A).c_m^2/2 \quad .$$

$$c_m = \sqrt{\frac{2.g.H}{1 + \sum\zeta_i + \lambda.L/D}} = \sqrt{\frac{2.g.H}{1 + \zeta_o + \zeta_A + \lambda.L/D}} \qquad (17\text{-}15).$$

Da $\lambda = f(Re, k/D)$, Gl. (17-6), ist, zur Berechnung der Re-Zahl die Geschwindigkeit aber fehlt, tritt bereits der Fall notwendiger λ-Schätzung ein. Sofern es sich um eine rauhe Oberfläche handelt, nimmt man zum Gebrauch von Bild 17-2 die relative Rauhigkeit zu Hilfe; im vorliegenden Beispiel wähle man für $k/D = 0{,}5.10^{-3}/0{,}5 = 0{,}001$ eine Rohrreibungszahl von $\lambda = 0{,}02$.- Für hydraulisch glatte Rohre schätze man die λ-Werte auf den Kurven 2 und 3 in Erwartung einer turbulenten Strömung, sonst gilt Analoges für Kurve 1 im laminaren Fall.-Hier folgt nun in Zahlen:

$$c_m = \sqrt{\frac{2.9{,}81.350}{1+1+0{,}5+0{,}02.500/0{,}5}} \text{ m/s} \; ; \quad \underline{\underline{c_m = 17{,}47 \text{ m/s}}} \; .$$

Jetzt hat sofort die Re-Kontrolle zu folgen: $Re = 17,47 \cdot 0,5/10^{-6}$;
$\underline{\underline{Re = 8,735 \cdot 10^6}}$,
wobei die λ-Annahme im turbulent,rauhen Bereich (Zone 5 in Bild 17-2) bestätigt worden ist.-Wo nicht, so hätte man für diese Re-Zahl und die relative Rauhigkeit eine zweite Näherung von λ dem Diagramm entnehmen müssen usw. (iteratives Vorgehen!). - Der Volumenstrom ist dann:
$\dot{V} = (\pi/4) \cdot D^2 \cdot c_m = (\pi/4) \cdot 0,5^2 \cdot 17,47 \ m^3/s$; $\underline{\underline{\dot{V} = 3,426 \ m^3/s}}$.

b) $\underline{c'_m \text{ und } \dot{V}'}$:

Setzt man für ζ_A den geänderten Wert $\zeta'_A = 20$ ein,dann erhält man:

$\underline{\underline{c'_m = 12,79 \ m/s}}$ und $\underline{\underline{\dot{V}' = 2,51 \ m^3/s}}$.

c) Erläuterung von Bild 17-5 :

Zwischen der x-Achse und der Niveaulinie FG liegt das gesamte zur Verfügung stehende Gefälle H;das ist aber die Gesamtenergie,die in einem Stromfaden mitgeführt wird.Man kann die Gl.(17-3) auch in ihrer Höhenform angeben:

$$\boxed{\frac{p_1}{\rho \cdot g} + \frac{c_1^2}{2 \cdot g} + z_1 = \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{c_2^2}{2 \cdot g} + z_2 + \frac{\sum p_{vi}}{\rho \cdot g} = H = const} \qquad (17\text{-}16).$$

Gilt wie im obigen Beispiel $p_1 = p_{1ü} + p_o$ und $p_2 = p_{2ü} + p_o$,so bleiben nur die statischen Überdrücke in der Rohrleitung übrig.-Es sind nachstehende Bezeichnungen üblich geworden:

Überdruckhöhe	$h_d = p_ü /(\rho \cdot g)$	;
Geschwindigkeitshöhe	$h_c = c_m^2 /(2 \cdot g)$	;
Ortshöhe	z	;
Gesamtenergiehöhe	H	;
Druckverlusthöhe	$\sum h_{vi} = \sum p_{vi}/(\rho \cdot g)$	

(17-17).

Somit gilt auch für Beispiele der behandelten Art:

$$\boxed{H = h_d + h_c + z + \sum h_{vi}} \qquad (17\text{-}18).$$

Ergänzende Begriffe:

Linie FG : Energieniveau bei reibungsloser Strömung;
Linie FCB : Drucklinie;piezometrische Linie wegen $h_p = h_d + z$;

diese Linie ist auch unter dem Namen Flüssigkeits- oder Wasserlinie (siehe Kanal- und Flußströmungen) bekannt.

Nachtrag:

Die Rohrreibungszahl λ ist bisher nur auf voll ausgefüllte Rohre mit Kreisquerschnitt bezogen gewesen.-Wann darf man die λ-Werte auch auf unrunde und nur teilweise ausgefüllte Querschnitte verwenden?-Folgende Überlegung führt zum Ziel und wird auch durch Experimente bestätigt:

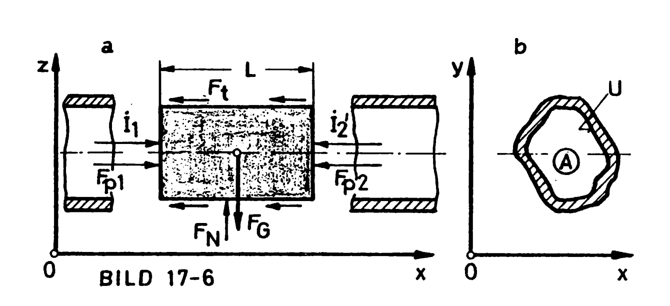


BILD 17-6

Das Kräftegleichgewicht in x-Richtung für einen Kontrollraum aus einer horizontalen Rohrströmung lautet,Bild 17-6: $\sum F_{xi} = \dot{I}_1 + F_{p1} - \dot{I}_2' - F_{p2} = 0$ Die Impulsströme heben sich gegenseitig auf.Es bleibt also: $(p_1 - p_2).A = \tau.U.L$. - Die allgemeine Abhängigkeit von τ ist in der Ableitung zu Gl.(17-4) als $\tau = (\rho/2).c^2.K$ erkannt worden.Damit ist auch $K = \lambda/4$!-Setzt man $p_1 - p_2 = p_v$,dann ergibt sich:

$p_v = (\lambda/4).(\rho/2).c^2.U.L/A = \lambda . \frac{L}{(\frac{4.A}{U})} . \frac{\rho}{2} . c^2$ .Diese Gleichung ist analog zu Gl.(17-5) aufgebaut. Deshalb definiert man

$$\boxed{D_h = \frac{4 . A}{U}} \qquad (17\text{-}19) .$$

Es bedeuten: D_h = hydraulischer Durchmesser; A = Strömungsquerschnitt; U = benetzter Umfang.-Bildet man nunmehr die Reynoldssche Zahl mit dem hydraulischen Durchmesser,so darf λ für Kreisrohre verwendet werden.Allgemein gilt dann auch:

$$\boxed{p_v = \lambda . \frac{L}{D_h} . \frac{\rho}{2} . c^2} \qquad (17\text{-}20).$$

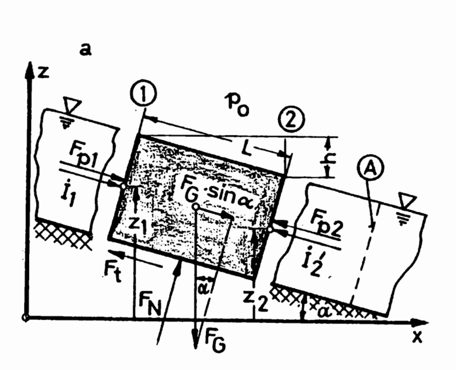
17.2.2. Dissipationen in Kanälen und Flüssen

17.2.2.1. Einführung

Hier werden für die Kanal- und Flußströmung folgende Voraussetzungen gemacht:

(1) der Strömungsquerschnitt bleibt konstant; (2) die Spiegeloberfläche ist parallel zur Sohle; (3) die Strömung ist turbulent.-Im Grunde genommen kann man diese Strömungsart mittels der Gl.(17-3) und Gl.(17-20) bearbeiten.Im Wasserbau hat sich jedoch eine modifizierte Betrachtungsweise durchgesetzt:
Aus der Gleichgewichtsbetrachtung in Strömungsrichtung erkennt man aus Bild 17-7,Pos.a,daß Druckkräfte und Impulsströme sich gegenseitig neutralisieren,so daß nur der Hangabtrieb $F_G \cdot \sin\alpha$ und die Reibkraft F_t sich das Gleichgewicht halten müssen: $F_G \cdot \sin\alpha = \tau \cdot U \cdot L$ .Aus der Dimensionsanalyse weiß man um die Beziehung $\tau = (\rho/2) \cdot c^2 \cdot K$ .Führt man hier üblicherweise das relative Spiegelgefälle ein:

$$J = \frac{h}{L} = \sin\alpha \qquad (17\text{-}21),$$



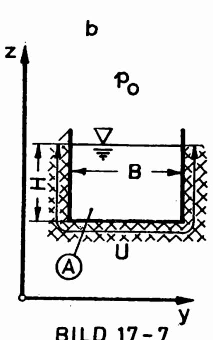


BILD 17-7

so läßt sich aus obigen Zusammenhängen ohne weiteres nachstehende Gleichung angeben:

$$c = \sqrt{\frac{2 \cdot g}{K}} \cdot \sqrt{\frac{A}{U} \cdot J}$$

. Kürzt man den ersten Wurzelausdruck mit C (Geschwindigkeitsbeiwert) ab und führt mit

$$R_h = A / U \qquad (17\text{-}22)$$

den sogenannten hydraulischen Radius ein,dann erhält man die Fließformel von de Chezy:

$$c = C \cdot \sqrt{R_h \cdot J} \qquad (17\text{-}23).$$

Die Formel von Bazin erlaubt die Ermittlung des Geschwindigkeitsbeiwertes:

$$C = 87 \cdot \left[1 + k' / \sqrt{R_h} \right]^{-1} \qquad (17\text{-}24).$$

k' bedeutet die Flächenreibungszahl.Einige Werte hierfür: Beton(glatt): 0,06 ; Ziegelwerk : 0,20 ; Erdkanäle : 1,30 ; Geröll : 1,75 ; alle Werte in $m^{0,5}$. - C ergibt sich in $m^{0,5}/s$!

17.2.2.2. Beispiele

1.Beispiel

Für einen Kanal rechteckigen Querschnitts,Bild 17-7,Pos. b,ermittle man das optimale Verhältnis B/H bei gegebenem Querschnitt $A = B.H$, so daß man den gewünschten Volumenstrom bei geringstem Gefälle zum Ziel bringt.

Lösung:

Aus der Bernoulligleichung mit Dissipationen,Gl.(17-16) kann man bei Berücksichtigung von $p_1 = p_2$ (gilt in jeder Tiefe aufs neue) , $c_1 = c_2$ (stationäre Strömung) und $\sum p_{vi} = p_v$ herauslesen:

$$(z_1 - z_2).\varrho.g = p_v = \varrho \cdot g \cdot L. \sin\alpha$$

$$p_v = \varrho \cdot g \cdot L \cdot J = \varrho.w_{R12} \qquad (17\text{-}25);$$

hier ist auch Gl.(17-2) miteinbezogen worden.
Geringstes Gefälle heißt mit anderen Worten: geringster Druckverlust. p_v kann nach Gl.(17-20) ein Minimum werden,wenn der hydraulische Durchmesser $D_h = 4.R_h$ ein Maximum wird.Das ist wiederum bei minimalem benetzten Umfang der Fall.Es ist: $U = B + 2.H = A/H + 2.H$;

$$\frac{dU}{dH} = -\frac{A}{H^2} + 2 = 0 \quad ; \quad 2.H^2 = A = H \cdot B \quad ;$$

Ergebnis: $(B/H)_{opt} = 2$.

2.Beispiel

Ein Wasserkanal (Wände: glatter Beton) mit rechteckigem Querschnitt ($H = 1{,}2$ m ; $B = 2{,}4$ m) hat ein Spiegelgefälle von $J = 0{,}005$.- $\nu = 1{,}1.10^{-6}$ m^2/s .- Man ermittle:

a) den hydraulischen Radius und den hydraulischen Durchmesser (R_h, D_h);
b) die mittlere Strömungsgeschwindigkeit c ;
c) den Volumenstrom $\dot{V}$;
d) den Druckverlust p_v ;
e) die massenspezifische Dissipation w_{R12} ;
f) vergleichsweise die Rohrreibungszahl λ für Kreisrohre ;
g) die dafür gültige Reynoldssche Zahl und Nachweis der Turbulenz.
   Als Anlagenschema verwende man Bild 17-7.

Lösungen:

a) R_h ; D_h :

Gl.(17-22) : $R_h = A/U = B.H/(B+2.H) = 2,4.1,2/(2,4+2.1,2)$ m ;

$R_h = 0,6$ m .

Gl.(17-19) : $D_h = 4.A/U = 4.R_h = 4.0,6$ m ;

$D_h = 2,4$ m .

b) c :

Geschwindigkeitsbeiwert nach Gl.(17-24) :

$C = 87.\left[1+0,06/\sqrt{0,6}\right]^{-1}$ $m^{0,5}/s$; $C = 80,745\ m^{0,5}/s$.

Gl.(17-23) :

$c = C.\sqrt{R_h.J} = 80,745.\sqrt{0,6.0,005}$ m/s ;

$c = 4,42$ m/s .

c) $\dot{V}$:

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt: $\dot{V} = A.c = 2,4.1,2.4,42$ m^3/s ;

$\dot{V} = 12,74\ m^3/s$.

d) p_v :

Gl.(17-25) : $p_v = \varrho.g.L.J = 1000.9,81.500.0,005$ Pa ;

$p_v = 0,245$ bar .

e) w_{R12} :

Gl.(17-2) : $w_{R12} = p_v/\varrho = 24525/1000 = 24,525$ J/kg .

f) λ :

Zieht man die Druckverlustgleichung nach Gl.(17-20) heran,so folgt:

$$\lambda = \frac{p_v \cdot D_h \cdot 2}{\varrho \cdot L \cdot c^2} = \frac{24525.2,4.2}{1000.500.4,42^2} \quad ;$$

$\lambda = 0,012$.

g) Re :

Gl.(16-22) : $Re = D_h.c/\nu = 2,4.4,42/(1,1.10^{-6})$;

$Re = 9,64.10^6$.

Nach Bild 17-2 befindet man sich demnach in Zone 5 ,dem turbulent rauhen Bereich !

17.2.3. Rohrleitungsnetze

17.2.3.1. Einführung

Bei der Berechnung von Rohrleitungsnetzen (Druckverluste, Volumenströme usw.) stößt man immer wieder auf nachstehende Formeln und Beziehungen:

Bernoulligleichung
Gl.(17-3),S.338 : $p_1+\frac{\varrho}{2}.c_1^2+\varrho.g.z_1=p_2+\frac{\varrho}{2}.c_2^2+\varrho.g.z_2+\sum p_{vi}$

Kontinuitätsgleichung
Gl.(11-18;11-20;11-21),S.194...: $\sum \dot{V}_i=0$; $A_1.c_1=A_2.c_2$; $\dot{V} = A.c$.

Lineare Dissipation
Gl.(17-5),S.339 : $p_v = \lambda.(L/D).(\varrho/2).c^2$.

Lokale Dissipation
Gl.(17-14),S.341 : $p_v = \zeta.(\varrho/2).c^2$.

Reynoldssche Zahl
Gl.(16-22),S.335 : $Re = D . c/\nu$ bzw. $Re = D_h.c /\nu$.

Hydraulischer Durchmesser
Gl.(17-19),S.346 : $D_h = 4.A/U$.

Rohrreibungszahl für Kreisquerschnitte
Gl.(17-6),S.339 : $\lambda = f (Re,k/D)$ und Bild 17-2 .

Verlustbeiwerte für lokale Dissipationen und Rauhigkeitswerte sind der einschlägigen Literatur zu entnehmen.

17.2.3.2. Beispiele

1.Beispiel

Eine Serien- oder Reihenschaltung von linearen und lokalen Dissipationsquellen zeigt Bild 17-8.Folgende Angaben werden gemacht: L_1 bis L_5; D_1 bis D_5; ζ_{01} bis ζ_{56} ; H ! - Man ermittle den Volumenstrom bei stationärer Strömung.

Lösung:

Da die Rohrreibungszahlen unbekannt sind,müssen sie in einem ersten Iterationsschritt geschätzt werden.Als Starthilfe kann man erfahrungsgemäß mit $\lambda\approx0,03$ beginnen.Weitere Iterationsschritte verbessern das Resultat.-Wendet man die Bernoulligleichung längs der Stromlinie a-b an und bedenkt man,daß gilt:

$p_a = p_b = p_o$; c_a 0 (Torricelli); $z_a = H$; $z_b = 0$; $c_b = c_6$,dann bleibt nach Einsatz der Gleichungen für die linearen und lokalen Dissipationen noch übrig:

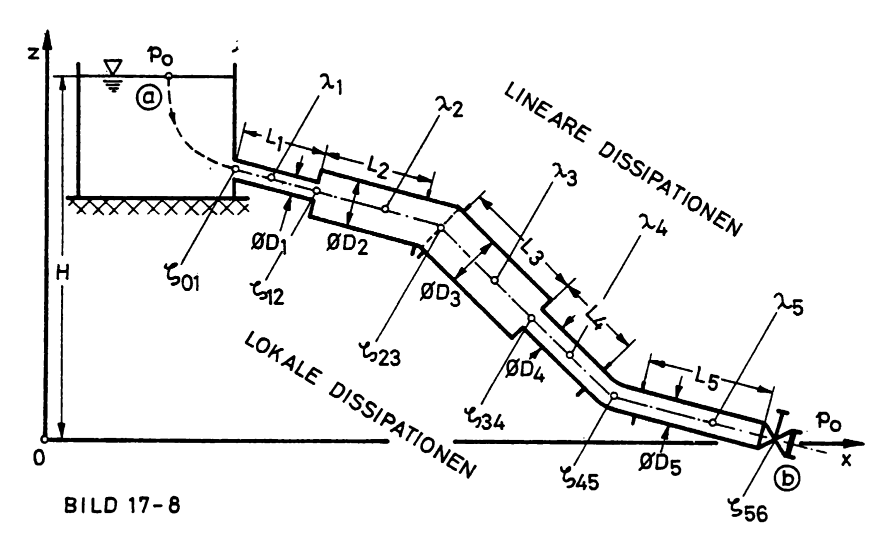


BILD 17-8

$$\rho \cdot g \cdot H = \sum_{\substack{i=0\\k=1}} p_{v,ik} + \sum_{k=1} p_{v,k} = \sum_{\substack{i=0\\k=1}} \frac{\rho}{2} \cdot c_k^2 \cdot \left(\lambda_k \cdot \frac{L_k}{D_k} + \zeta_{ik}\right) \qquad (17\text{-}26).$$

Die Geschwindigkeiten lassen sich über die Kontinuitätsgleichung $\dot{V} = (\pi/4) \cdot D_k^2 \cdot c_k$ beschaffen.Damit läßt sich für den Volumenstrom angeben:

$$\dot{V} = \frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{g \cdot H}{2 \cdot \sum\limits_{\substack{i=0\\k=1}} D_k^{-4} \cdot (\lambda_k \cdot L_k/D_k + \zeta_{ik})}} \qquad (17\text{-}27).$$

Bemerkung

Ersetzt man in Gl.(17-26) c_k^2 durch $16 \cdot \dot{V}^2/(\pi^2 \cdot D_k^4)$ und klammert dabei $\dot{V}^2$ aus,so erhält man eine Beziehung:

$$g \cdot H = \dot{V}^2 \cdot \sum \frac{8}{\pi^2 \cdot D_k^4} \cdot (\lambda_k \cdot L_k/D_k + \zeta_{ik})$$

, die zu einer interessanten Analogie Anlaß gibt,wenn das Ohmsche Gesetz der"Elektrik"für die Reihenschaltung dieser Beziehung aus der"Hydraulik"gegenübergestellt wird:

$$\begin{array}{ccccccc} U & = I & \cdot & \sum_{i=1} R_i & & = I \cdot & R_{ges} \\ \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ g.H & = \dot{V}^2 & \cdot & \underbrace{\sum_{\substack{i=0\\k=1}} \frac{8}{g.\pi^2.D_k^4} \cdot (\lambda_k.L_k/D_k + \zeta_{ik})}_{=R_{Hk}} & & = \dot{V}^2 \cdot & R_{Hges} \end{array} \qquad (17\text{-}28)$$

Interessant ist die Einführung des "hydraulischen Widerstandes" R_H, dessen Definition aus Gl.(17-28) hervorgeht.

2.Beispiel

Eine Hauptwasserleitung gabelt sich zwischen a und b in vier Stränge (z = I;II;III;IV),Bild 17-9. Die Rohrleitungslängen L_z und die Nennweiten D_z sind bekannt.Außerdem seien die Verlustbeiwerte der lokalen Dissipationen ζ_{zj} für j = 1;2;3... n ebenfalls gegeben.Man kennt auch die Zustände in a und b :

$$p_a+\frac{\varrho}{2}.c_a^2+\varrho.g.z_a=\varrho.g.H_a;$$

$$p_b+\frac{\varrho}{2}.c_b^2+\varrho.g.z_b=\varrho.g.H_b \ .$$

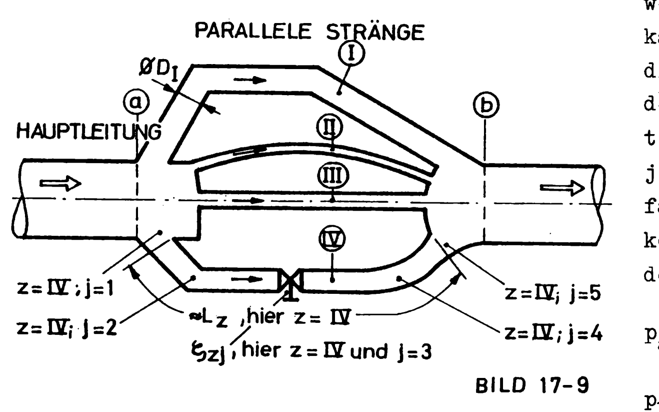


BILD 17-9

Man ermittle die Teilvolumenströme $\dot{V}_z$ bei bekanntem Gesamtvolumenstrom.

Lösungen:

Für je eine mittlere Stromlinie in den Strängen I und II gilt die Bernoulligleichung in der Form zwischen a und b :

$$p_a + \frac{\varrho}{2}.c_a^2 + \varrho.g.z_a = p_b + \frac{\varrho}{2}.c_b^2 + \varrho.g.z_b + \frac{\varrho}{2}.c_I^2.(\lambda_I.L_I/D_I + \sum\zeta_{Ij}) \quad ;$$

$$p_a + \frac{\varrho}{2}.c_a^2 + \varrho.g.z_a = p_b + \frac{\varrho}{2}.c_b^2 + \varrho.g.z_b + \frac{\varrho}{2}.c_{II}^2.(\lambda_{II}.L_{II}/D_{II} + \sum\zeta_{IIj}) \quad .$$

Daraus geht eindeutig hervor,daß die Gesamtdissipationen in allen parallelen Rohrleitungen gleich groß sind.Die λ -Werte sind zunächst zu

schätzen und später durch Iteration zu korrigieren.-Der für jeden Strang gültige gesamte Druckverlust lautet:

$$p_{v,ges} = \rho \cdot g \cdot (H_a - H_b) = \frac{\rho}{2} \cdot c_z^2 \cdot (\lambda_z \cdot L_z/D_z + \sum \zeta_{zj}) \quad (17\text{-}29).$$

Für die Verzweigungspunkte a und b gilt die "Kirchhoffsche Knotenpunktsregel", Gl.(11-18) in der Form für inkompressible Fluide:

$$\dot{V} = \dot{V}_a = \dot{V}_b = \sum \dot{V}_z \quad (17\text{-}30).$$

Mittels des hydraulischen Widerstandes für jeden Strang (Definition siehe Gl.17-28) mit der Indexanpassung $k \rightarrow z$ und $ik \rightarrow zj$ läßt sich einfacher anschreiben:

$g \cdot (H_a - H_b) = R_{HI} \cdot \dot{V}_I^2 = R_{HII} \cdot \dot{V}_{II}^2 = \ldots$,wonach sich die gesuchte Lösung sofort anbahnt:

$$\dot{V}_I = \sqrt{\frac{g \cdot (H_a - H_b)}{R_{HI}}}; \quad \ldots\ldots \quad \dot{V}_z = \sqrt{\frac{g \cdot (H_a - H_b)}{R_{Hz}}} \quad (17\text{-}31).$$

Bemerkungen:

(1) Aus den Gl.(17-30) und Gl.(17-31) läßt sich

$$\dot{V}^2 = g \cdot (H_a - H_b) \cdot \frac{1}{R_{HI}} + \frac{1}{R_{HII}} + \ldots = g \cdot (H_a - H_b) \cdot \sum \frac{1}{R_{Hz}} \quad (17\text{-}32).$$

$$\dot{V}^2 = g \cdot (H_a - H_b)/R_{H,ges} \quad \text{mit} \quad 1/R_{H,ges} = \sum 1/R_{Hz}$$

zusammenstellen, so daß die Bestimmung des Ersatzwiderstandes bei Parallelschaltungen in Elektrik und Hydraulik methodisch übereinstimmen.

(2) Die Größe $\dot{V}^2$ übernimmt die Rolle des elektrischen Stromes I, und der Ausdruck $g \cdot (H_a - H_b)$ steht für die elektrische Spannung.

(3) Mit diesen Grundlagen parallel und in Reihe geschalteter Rohrleitungen werden auch unter Einsatz elektronischer Rechner vermaschte Rohrnetze berechnet.

18. FLUIDDYNAMISCHER AUFTRIEB UND WIDERSTAND

18.1. Theorie

Wenn im 17.Abschn. besonders Kraftwirkungen,Druckverluste usw. bei durchströmten Objekten (z.B. Rohrleitungen) untersucht worden sind, dann stehen jetzt besonders Kraftwirkungen auf umströmte Objekte zur Debatte.
Im Zuge der Beschäftigung mit dem Impulssatz für stationäre Strömungen ist mit Gl.(12-50) der Kutta-Joukowskysche Auftriebssatz angezeigt worden.Die Bedeutung des Zusammenspiels zwischen paralleler Anströmung und der Zirkulation um den Tragflügel herum ist klargestellt;nicht aber die physikalische Erklärung für das Auftreten der Zirkulation. Das soll jetzt nachgeholt werden (s.S. 316) : Um den Tragflügel herum entsteht ein Grenzschichtbereich,wie ihn Bild 18-1 zeigt.In

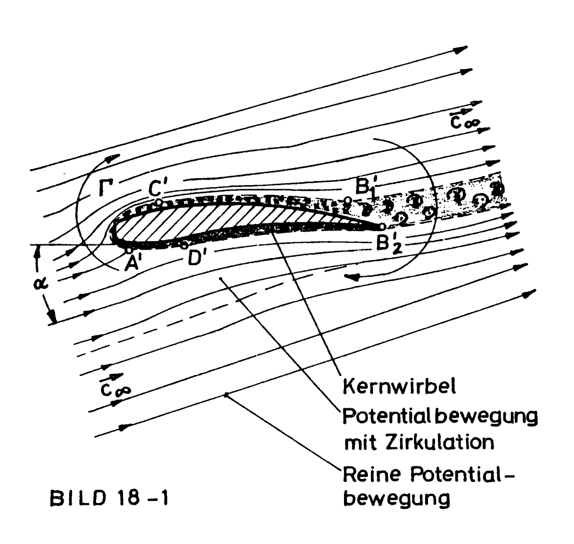


BILD 18-1

bekanntlich durch eine Art Aufrolleffekt lokale Wirbelzentren,die, wenn man sie durch Integration alle aufsummiert, Gl.(11-47 bis 11-49),zur gesamten Flügelzirkulation Γ führt.Integrationsweg ist dabei der Weg $A'C'B_1'B_2'D'A'$. Bei relativ großem Anstellwinkel α wandert der Ablösungspunkt B_1' nach links,so daß das Totwasser breiter wird.Gleichzeitig sinkt der Auftrieb wegen reduzierter Zirkulation,der Flügelgesamtwiderstand dagegen wächst,weil der Druckwiderstand,Gl.(16-21),S.334,ansteigt: Gefahr des Überziehens !
In Bild 18-1 sind die auf S.221 besonders herausgearbeiteten drei Geschwindigkeitsbereiche für die natürliche Tragflügelumströmung vermerkt: die Kernwirbelzone nahe der Wand;die Potentialbewegung mit Zirkulation außerhalb der Wandgrenzschicht,aber immer noch im Gebiet spürbarer Wirbelinduktion (s.S. 219/220);die reine Potentialbewegung weitab vom Profil,wo trotz Einsatzes eines natürlichen Fluids wegen der Parallelität der Strömungsfront nach Newton,Gl.(4-5),keine Reibungseffekte festgestellt werden können.-Übrigens ist die Zirkulation

proportional zum Sinus des Anstellwinkels,was dem Kommentar zu Bild 13-11 entnommen werden kann!
Aus Betrachtungen der Ähnlichkeitsmechanik,S.339 u.a.,bietet sich im turbulenten Fall die Proportionalität der Auftriebskraft zur Dichte ρ des Fluids und dem Quadrat der Geschwindigkeit c_∞^2 an.Man definiert mit

$$F_A = \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty^2 \cdot A \cdot c_A \quad ; \quad c_A = f\,(Re, \alpha) \qquad (18\text{-}1)$$

den Auftriebsbeiwert c_A ,der in der Tragflügelforschung eine besondere Bedeutung gewonnen hat.-Die Fläche A stellt die größte ebene Projektion des Tragflügels dar.
Analogerweise notiert man für den Widerstand,Gl.(16-21)

$$F_W = \frac{\rho}{2} \cdot c_\infty^2 \cdot A \cdot c_W \quad ; \quad c_W = f\,(Re, \alpha) \qquad (18\text{-}2)\ ,$$

wobei man c_W Widerstandsbeiwert nennt.Handelt es sich bei dem umströmten Körper um einen tragfähigen,dann sind die beiden Flächen in den beiden obigen Gleichungen identisch.Besitzt der Körper dagegen eine vernachlässigbare Tragfähigkeit (reiner Widerstandskörper),so versteht man unter A in Gl.(18-2) die Projektionsfläche des Körpers auf eine Normalebene zur Geschwindigkeitsrichtung.Diese Fläche ist auch Stirn- oder Spantfläche genannt.

18.2. Beispiele

1.Beispiel

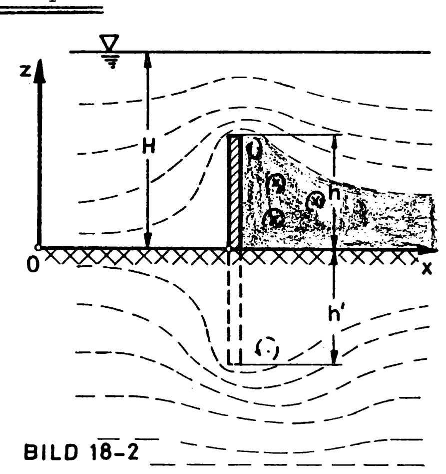


BILD 18-2

In einem Wasserkanal mit rechteckigem Querschnitt (B = 4 m; H = 2 m) wird eine rechteckige Platte (B = 4m; h = 1 m) eingebaut,Bild 18-2.Der Wasservolumenstrom beträgt $\dot{V}=30\ m^3/s$. Man ermittle:

a) die Kraft F_W ,welche das Fluid beim Überströmen des Widerstandskörpers - es kann hier keinen Auftrieb geben - auf die Platte ausübt.Der Widerstandsbeiwert wird mit $c_W = 2{,}1$

angegeben;

b) die Widerstandskraft F'_W ,wenn $B' = 2.h = 2$ m gilt für $c'_W = 1,1$.

Lösungen:

a) F_W :

Zur Elimination des Einflusses vom Kanalboden geht man nach dem Prinzip der Spiegelung (Reflexionsverfahren) vor. Bei der symmetrischen Behandlung kann anschließend die untere Hälfte vergessen werden.

Volumenstrom: $\dot{V} = B.H.c_\infty$; $c_\infty = 30/(4.2)$; $c_\infty = 3,75$ m/s ;

Gl.(18-2):

$$F_W = (1000/2).3,75^2.4.1.2,1 \; ; \qquad F_W = 59,063 \text{ kN} \; .$$

b) F'_W :

Gl.(18-2): $$F'_W = (1000/2).3,75^2.2.1.1,1 \; ; \qquad F'_W = 15,469 \text{ kN} \; .$$

2.Beispiel

Ein Schornstein vom mittleren Durchmesser $D_m = 1,2$ m und einer Höhe von $H = 30$ m soll auch bei einem starken Sturm von $c_\infty = 40$ m/s stehen bleiben.-Angaben: $\rho_{Luft} = 1,29$ kg/m^3 ; $\nu_{Luft} = 13,55.10^{-6}$ m^2/s .- $c_W = 1,2$, sofern Re > 1000 .- Man ermittle die vom Luftstrom auf den Schornstein ausgeübte Widerstandskraft F_W ,Bild 18-3.

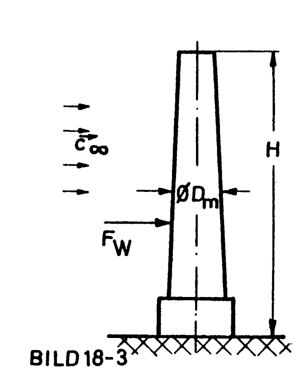


BILD 18-3

Lösung:

Zur Elimination des Bodeneinflusses wird wiederum vom Reflexionsverfahren Gebrauch gemacht.-Die Re-Kontrolle $Re = c_\infty .D_m/\nu = 40.1,2/13,55.10^{-6} = 3,54.10^6$ gestattet die Verwendung des angegebenen c_W-Wertes.

Gl.(18-2): $F_W = (1,29/2).40^2.30.1,2.1,2$;

$$F_W = 44,582 \text{ kN} \; .$$

3.Beispiel

Ein Lieferwagen von Kastenform besitzt ein Radleistung von $P = 30$ kW. Seine Spantfläche (Stirnfläche) beträgt $A = 2,5$ m^2; der dementsprechende Widerstandsbeiwert lautet $c_W = 0,6$; $\rho_{Luft} = 1,29$ kg/m^3. -

Man ermittle:

a) die Fahrzeuggeschwindigkeit v ;
b) die Fahrzeuggeschwindigkeit v' eines PKWs mit einer aerodynamisch verbesserten Gestalt; $c'_W = 0{,}23$; Leistung und Stirnfläche wie unter a).

Lösungen:

a) v :

Aus $P = F_W \cdot v$ folgt mit Gl.(18-2) : $F_W = (\rho/2) \cdot c_\infty^2 \cdot A \cdot c_W$ und $v = c_\infty$:

$$v = \sqrt[3]{\frac{P}{(\rho/2) \cdot A \cdot c_W}} = \sqrt[3]{\frac{30\,000}{(1{,}29/2) \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}6}} \quad ; \qquad v = 31{,}42 \text{ m/s} \; .$$

b) v':

$$v' = \sqrt[3]{\frac{30\,000}{(1{,}29/2) \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}23}} \quad ; \qquad v' = 43{,}25 \text{ m/s} \; .$$

4. Beispiel

Ein Sportflugzeug fliegt horizontal mit $v = 40$ m/s. Die Flügelfläche beträgt $A = 20$ m^2; $\rho_{Luft} = 1{,}29$ kg/m^3; $c_A = 0{,}7$. - Man ermittle:

a) das Flugzeuggewicht F_G ;
b) die Gleitfluggeschwindigkeit v' bei $c'_W = 0{,}4$ und einem Gleitwinkel $\varepsilon = 7^\circ$.

Lösungen:

a) F_G :

Aus der vertikalen Gleichgewichtsbedingung $F_A = F_G$ und der Gl.(18-1) folgt:

$$F_G = (1{,}29/2) \cdot 40^2 \cdot 20 \cdot 0{,}7 \quad ; \qquad F_G = 14{,}448 \text{ kN} \; .$$

b) v' :

Die Bewegungsverhältnisse für den Gleitflug, also bei stillstehendem Motor, und der diesbezügliche Kräfteplan sind in Bild 18-4 zusammengestellt. - Es gilt: $F_G \cdot \sin\varepsilon = F'_W = (\rho/2) \cdot v'^2 \cdot A \cdot c'_W$;

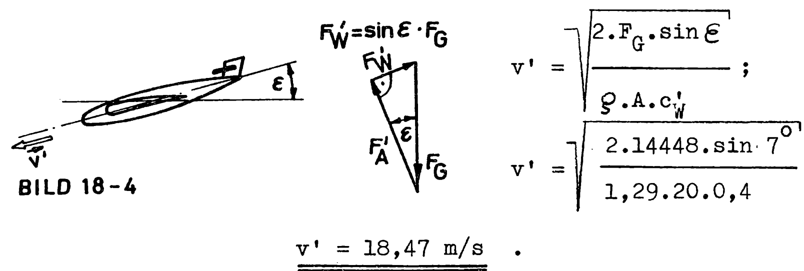


BILD 18-4

$$v' = \sqrt{\frac{2.F_G.\sin\varepsilon}{\rho.A.c'_W}}\ ;\qquad v' = \sqrt{\frac{2.14448.\sin 7^o}{1,29.20.0,4}}$$

$$\underline{\underline{v' = 18,47\ m/s}}\ .$$

5.Beispiel

Wie groß soll der Durchmesser eines aufgeblähten Fallschirmes sein, damit bei einem Gesamtgewicht von $F_G = 900$ N , $c_W = 1,33$ und $\rho_L = 1,29$ kg/m^3 die Landungsgeschwindigkeit nur $v = 2$ m/s beträgt?

Lösung:

Aus dem Kräftegleichgewicht $F_G = F_W$ folgt mit Gl.(18-2):

$F_G = (\rho/2).v^2.A.c_W$; $D = \sqrt{8.F_G/(\rho.v^2.\pi.c_W)}$ = 8.900/(1,29.4. .1,33)

$$\underline{\underline{D = 18,27 \approx 20\ m}}\ .$$

6.Beispiel

Ein Seitenwandausschnitt eines Wasserkanals (Länge $L = 3$ m; Höhe $H = 1,2$ m) wird lackiert.- $c_{Wasser} = 5$ m/s; $\nu_{Wasser} = 10^{-6}$ m^2/s.- Man ermittle die notwendige Haftspannung,damit das vorbeiströmende Wasser die Lackschicht nicht infolge der Grenzschichtreibung aufrollt und ablöst.

Lösung:

Die Reibkraft an der Seitenwand- (Platten-)oberfläche berechnet sich bei Einführung eines Widerstandsbeiwertes c_f mittels der Gleichung:

$$\boxed{F_t = \tau.L.H = (\rho/2).c^2.L.H.c_f} \qquad (18\text{-}3).$$

Mittels der halbempirischen Beziehung von v.Kárman

$$\boxed{c_f = 0,074/Re^{0,2} \quad \text{mit} \quad Re = c.L/\nu} \qquad (18\text{-}4)$$

ergibt sich für die Wandschubspannung und damit eben auch für die notwendige Haftspannung : $\tau = (\rho/2).c^2.c_f$.

In Zahlen: $Re = 5.3/10^{-6} = 15.10^6$; $c_f = 0{,}074/(15.10^6)^{0,2} = 0{,}0027$.

$\tau = (1000/2).5^2.0{,}0027$; $\tau = 33{,}96$ Pa .

19. BEISPIELE AUS DEM GEBIET DER STRÖMUNGSMASCHINEN

1.Beispiel

Eine Radialpumpe fördert einen Wasservolumenstrom $\dot{V} = 0{,}02$ m³/s über eine Gesamthöhe $H_o = 30$ m.Die freien Oberflächen in den beiden Behältern sind relativ groß.Ferner gilt $p_1 = p_2 = p_o$ .Der Förderprozeß erfolgt verlustlos,d.h. ohne Dissipationen in Rohrleitung und Pumpe.-Man ermittle:

a) die für dieses Problem zugeschnittene Energieformel in ihrer massenspezifischen Form;

b) die hydraulische Leistung mit beigefügtem Kommentar zu diesbezüglichen Sonderfällen;

c) die hydraulische Leistung der in Bild 19-1 vorgestellten Anlage.

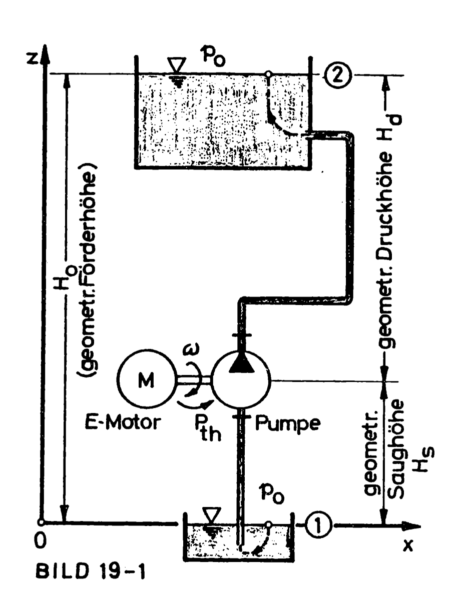


BILD 19-1

Lösungen:

a) Energieformel :

Gl.(12-10),S.232,wird für den stationären Strömungsfall folgendermaßen vereinfacht und umgeordnet angeschrieben:

$$\frac{p_1}{\rho}+\frac{c_1^2}{2}+g.z_1-2.\int_{1.2}\vec{\omega}x\vec{c}.d\vec{r}=\frac{p_2}{\rho}+\frac{c_2^2}{2}+g.z_2$$

Auf der linken Seite steht das Energieangebot und die zur Verfügung gestellte Arbeit (eben für den Pumpenfall),auf der rechten Seite finden sich die Zielgrößen.Es ist üblich geworden, für die massenspezifische Arbeit (auch spezifische Stutzen- oder Radarbeit genannt) das Symbol Y_{th} zu verwenden.Der Index th bedeutet "theoretisch",was besagt : Ohne Dissipationen könnte Y_{th} vollständig in hydraulische Arbeit/Energie umgeformt werden.

Man schreibt demzufolge:

$$Y_{th} = -2.\int_{1.2} \vec{\omega} \times \vec{c} \,.\, d\vec{r} \qquad (19\text{-}1).$$

Somit lautet die angepaßte Energieformel:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 + Y_{th} = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2 \qquad (19\text{-}2).$$

b) P_h :

Y_{th} kann sowohl als auf die Masse bezogene hydraulische Arbeit als auch auf den Massenstrom bezogene hydraulische Leistung angesehen werden, weshalb gilt:

$$P_h = \dot{m} \,.\, Y_{th} \qquad (19\text{-}3).$$

Setzt man aus Gl.(19-2) den Wert für Y_{th} hier ein, dann erhält man:

$$P_h = \dot{m} \,.\left[\left(\frac{p_2}{\rho} + g.z_2 + \frac{c_2^2}{2}\right) - \left(\frac{p_1}{\rho} + g.z_1 + \frac{c_1^2}{2}\right)\right] \qquad (19\text{-}4).$$

Sonderfälle:

(1) $p_1 = p_2$ und $c_1 = c_2$: $\quad P_h = \dot{m}.g.(z_2 - z_1) = g.\rho.\dot{V}.H_o \qquad (19\text{-}5)$;

Anwendung: Pumpen-Anlagenbau wie im vorgelegten Beispiel.

(2) $z_1 = z_2$ und $c_1 = c_2$: $\quad P_h = \dot{V} \,.\, (p_2 - p_1) \qquad (19\text{-}6)$;

Anwendung: Hochdruckhydraulik.

(3) $p_1 = p_2$ und $z_1 = z_2$: $\quad P_h = \rho \,.\, \dot{V} \,.\, \left(\frac{c_2^2 - c_1^2}{2}\right) \qquad (19\text{-}7)$;

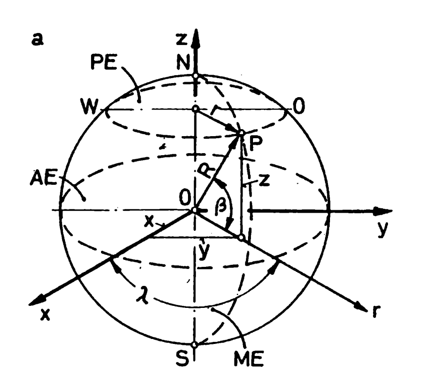
Anwendung: Fluidbeschleunigung wie bei Schiffsschraube.

c) P_h :

Gl.(19-5): $P_h = 9{,}81.1000.0{,}02.30$; $\quad P_h = 5\,886 \text{ W}$.

2.Beispiel

Folgende Begriffe, die im Strömungsmaschinenbau Bedeutung erlangt haben und sich auf die Kinematik beziehen, sollen anhand der "Erdgeometrie"



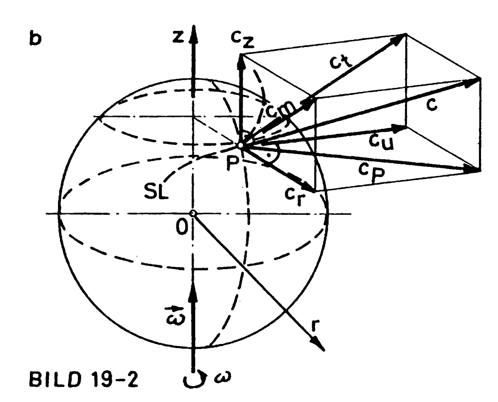


BILD 19-2

erklärt werden: Äquatorebene, Meridianebene, Parallelebene, Geschwindigkeitsbezeichnungen, wie etwa: Axial-, Radial-, Tangential-, Meridian- und Parallelgeschwindigkeit, Geschwindigkeit in der Tangentialebene.- Außerdem ist eine Klassifikation der Strömungsmaschinen vorzunehmen mit Hilfe der in einem Maschinentyp überwiegenden Geschwindigkeitskomponenten.

Lösungen:

a) Erläuterungen:

Bezüglich der "Erdgeometrie", Bild 19-2, Pos. a, bedeuten:

AE : Äquatorebene Oxy;

SN : Polachse Oz (Süd-Nord);

ME(SPN): Meridianebene eines Punktes P ;

PE(WPO): Parallelebene des Punktes P (West-P-Ost);

λ : geographischer Längenwinkel; er bestimmt die Meridianebene.

β : geographischer Breitenwinkel; er bestimmt die Parallelebene.

Folgende Koordinatensysteme sind gebräuchlich:

(1) Kartesische Koordinaten: P (x,y,z) ;

(2) Zylinder-Koordinaten : P (r,z,λ) ;

(3) Kugel-Koordinaten : P (R,λ,β) .

Geschwindigkeitsdefinitionen nach Bild 19-2, Pos. b :

Auf einer beliebigen Stromlinie SL befindet sich ein Punkt P . Die Absolutgeschwindigkeit $\vec{c}$ liegt bekanntlich tangential zur Stromlinie. Man spricht von :

c_z : Axialkomponente ; c_r : Radialkomponente ; c_u : Umfangskomponente ; gewisse Teilresultierenden heißen:

Meridiangeschwindigkeit $\vec{c}_m = \vec{c}_z + \vec{c}_r$ (19-8);

Parallelgeschwindigkeit $\vec{c}_p = \vec{c}_r + \vec{c}_u$ (19-9)

Geschwindigkeit in der Tangentialebene $\vec{c}_t = \vec{c}_z + \vec{c}_u$ (19-10).

b) Klassifikation von Strömungsmaschinen :

(1) Gilt $c_z \gg c_r$,dann spricht man von Axialmaschinen: Kaplan-Turbinen,Axialpumpen,Axialdampfturbinen,Axial-Gasturbinen,Axialventilatoren,Axialgebläse,Axialkompressoren;

(2) gilt $c_r \gg c_z$,dann spricht man von Radialmaschinen: Francis-Turbinen,Radialpumpen,Radialdampfturbinen, Radialgasturbinen,Radialventilatoren,Radialgebläse,Radialkompressoren;

(3) gilt $c_u \gg c_r, c_z$,dann spricht man von Tangentialmaschinen: Pelton-Turbine,Elektra-Turbine ;

(4) gilt $c_z \approx c_r$,dann spricht man von Halbaxial- oder Diagonalmaschinen: Francis-Turbinen,Unterwassermotor-Pumpen u.a.

Bemerkung:

Für die Auslegung von Strömungsmaschinen sind noch folgende Beziehungen bedeutungsvoll:

$$\vec{u} = \vec{\omega} \times \vec{r} \;;\; \vec{c} = \vec{u} + \vec{w} \text{ ,weil } \vec{v} \rightarrow \vec{u} \;;\; \vec{c}_u = \vec{u} + \vec{w}_u$$
$$c_m \equiv w_m \;;\; c_r \equiv w_r \;;\; c_z \equiv w_z \quad (19\text{-}11).$$

3.Beispiel

Im Verlauf der Grobauslegung eines radialen Pumpenlaufrades sind jetzt bekannt: die Kanalgeometrie bis auf die definitiven Schaufelwinkel und die Geschwindigkeitsdreiecke am Laufradein- und Laufradaustritt bezüglich der Parallelebenen 1 und 2 .-Man ermittle:

a) die Meridiangeschwindigkeiten an Ein- und Austritt $\vec{c}_{m1}$ und $\vec{c}_{m2}$;

b) die wahren Größen der Absolut- und Relativgeschwindigkeiten $\vec{c}_1, \vec{c}_2$, $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$;

c) den Hodografen zur Lagenabgrenzung eines mittleren Geschwindigkeits-

dreieckes zwischen Ein- und Austritt;

d) die räumliche Darstellung für die Geschwindigkeitsverhältnisse in einem beliebigen Kanalpunkt;

e) den Volumenstrom, der das Rad passiert.

Die Betrachtungen sind für eine dissipationsfreie Strömung auf der mittleren Stromlinie - sie ist der geometrische Ort für die Mittelpunkte aller Kreise, welche die Kanalwand berühren - und bei konstanter Geschwindigkeitsverteilung in irgendeinem Strömungsquerschnitt anzustellen.

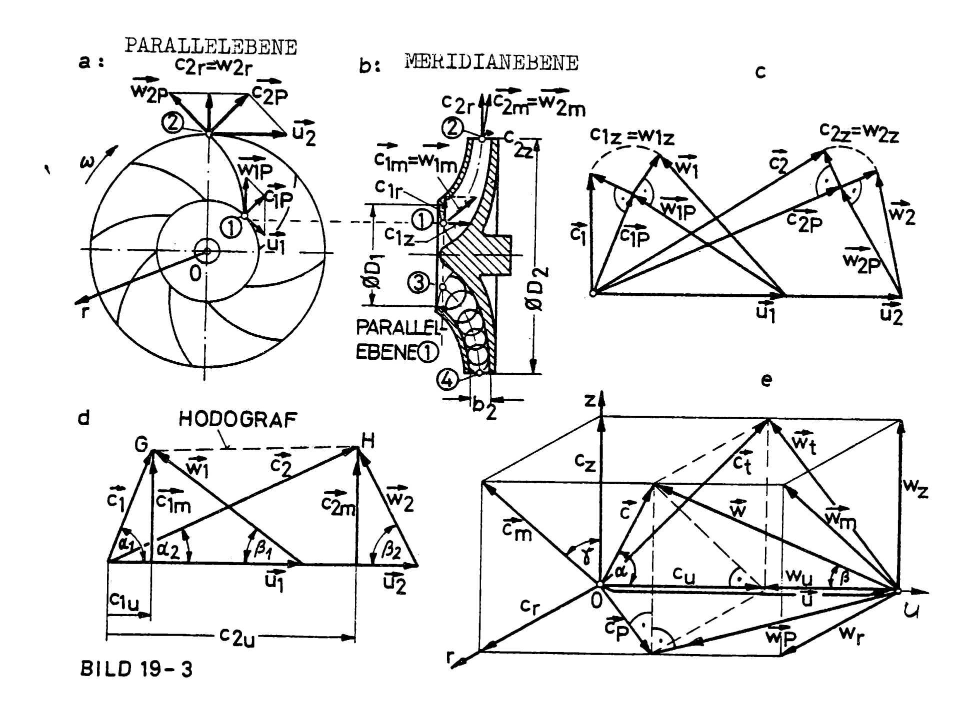


BILD 19-3

Lösungen:

a) $\vec{c}_{1m}$ und $\vec{c}_{2m}$:

Den Geschwindigkeitsdreiecken in Bild 19-3, Pos. a, lassen sich die Radialkomponenten c_{r1} und c_{r2} entnehmen. In den Stromlinienpunkten 1 und 2 von Bild 19-3, Pos. b, trägt man entsprechenderweise c_{r1} und c_{r2} ab. Die Geschwindigkeitspläne lassen sich vervollständigen, wenn man an die Stromlinie Tangenten anlegt. Da diese Geschwindigkeitspläne in einer Meridianebene liegen, kann man somit näherungsweise auf geometrische Art die Meridiangeschwindigkeiten $\vec{c}_{1m}$ und $\vec{c}_{2m}$ ermitteln.

b) $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{w}_1, \vec{w}_2$:

Die beiden gegebenen,in Parallelebenen liegenden Geschwindigkeitsdreiecke werden in zulässiger Weise übereinander gezeichnet,Bild 19-3,Pos. c.Aus den Geschwindigkeitsdreiecken im Meridianschnitt lassen sich auch die Axialkomponenten c_{1z} und c_{2z} abgreifen.Die Tatsache,daß z-Komponenten senkrecht auf P-Komponenten stehen,führt zusammen mit der Aussage in Gl.(19-11) zur Bestimmung der wahren Geschwindigkeiten,wie es in Bild 19-3,Pos. c,grafisch gezeigt worden ist.

c) Hodograf:

Die wahren Geschwindigkeitsdreiecke sind in Bild 19-3,Pos. d,übereinander gezeichnet,obwohl die Ebenen der Geschwindigkeitsdreiecke verschiedene räumliche Lagen haben.Die Verbindungslinie GH ist der geometrische Ort für die Spitzen der zwischenliegenden Geschwindigkeitsdreiecke.Diese Linie wird auch Hodograf genannt.

d) Räumliche Darstellung der Geschwindigkeitsverhältnisse:

In Bild 19-3,Pos. e,sind alle erwähnten Geschwindigkeitskomponenten für einen beliebigen Punkt 0 im Laufradkanal räumlich zusammengestellt.

e) $\dot{V}$:

Man ermittle den Volumenstrom beispielsweise in der Laufradaustrittsfläche $A_2 = \pi . D_2 . b_2$,Bild 19-3,Pos. b .Die Absolutgeschwindigkeit $\vec{c}_2$ setzt sich nach dem ersten Satz von Coriolis vektoriell aus der Relativgeschwindigkeit $\vec{w}_2$ und der Fahrzeuggeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{u}_2$ zusammen.Damit gilt für die Volumenstromberechnung Gl.(11-19),S.195 . An Stelle des Massenstromes darf hier wegen der Inkompressibilität mit dem Volumenstrom gerechnet werden:

$$\dot{V} = \dot{V}_F + \dot{V}_r = \vec{n}.\vec{u}_2 . A_2 + \vec{n}.\vec{w}_2 . A_2 \quad ; \text{ da } \vec{n} \perp \vec{u}_2 \text{ steht,ist } \dot{V}_F = 0.$$

Es bleibt:

$$\boxed{\dot{V} = \dot{V}_r = \vec{n} . \vec{w}_2 . A_2 = w_{2r} . A_2 = c_{2r} . A_2} \qquad (19\text{-}12).$$

Für genauere Berechnungen wird sinngemäß Gl.(11-39),S.205,empfohlen.

4.Beispiel

Es ist die Bernoulliformel für die Relativströmung eines radialen Pumpenlaufrades aufzustellen.Man greife hierfür die mittlere Stromlinie eines Schaufelkanals heraus (Bild 19-3,Pos. b): **1-2** !

Lösung:

Die Bernoulliformel lautet nach S. 229 für die inkompressible,stationäre und reibungsfreie Strömung im absoluten Strömungsfall:

$$p_1/\varrho + c_1^2/2 + e_{p1} = p_2/\varrho + c_2^2/2 + e_{p2} = \text{Konst} \quad .$$

Um diesen Zusammenhang analog verwenden zu können,und zwar für eine Stromlinie im Fahrzeug (Laufrad),sind zuerst die Absolutgeschwindigkeiten durch Relativgeschwindigkeiten zu ersetzen;danach ist die passende Beziehung für die massenspezifische potentielle Energie e_p einzubringen.Greift man dabei auf die Ergebnisse zurück,die bei der Untersuchung in rotierenden Gefäßen gefunden worden sind,ob mit vertikaler oder horizontaler Achse,so läßt sich für e_p notieren:
S. 148,Gl.(9-18) und S. 158,(1):

$e_p = -(\omega_F^2/2).r'^2 + g.z' + \text{Const}$; geht $r' \rightarrow r$ und $z' \rightarrow z$,so folgt schließlich:

$$\boxed{\frac{p_1}{\varrho} + \frac{w_1^2 - u_1^2}{2} + g.z_1 = \frac{p_2}{\varrho} + \frac{w_2^2 - u_2^2}{2} + g.z_2} \qquad (19\text{-}13).$$

5.Beispiel

Geometrie und Geschwindigkeiten eines radialen Pumpenlaufrades sind vorgegeben.In Bild 19-4 werden nur die notwendigsten Angaben eingezeichnet.Da es sich um einen Parallelschnitt handelt,sind die wahren Geschwindigkeitskomponenten durchgezogen,die verzerrten Geschwindigkeiten und Winkel strichliert worden.-Voraussetzungen: dissipationsfreie Strömung;die Strömungswinkel β_1 und β_2 sollen mit den geometrischen Schaufelwinkeln übereinstimmen;konstante Geschwindigkeitsverteilung in den Querschnitten $A_1,A_2,...A_i$.-Man ermittle:

a) das Antriebsdrehmoment M ;
b) das Antriebsdrehmoment M unter Einsatz der Zirkulation Γ ;
c) die mechanische Antriebsleistung P_m ;

d) die hydraulische Leistung P_h ;

e) die massenspezifische Antriebsarbeit Y_m und die massenspezifische hydraulische Arbeit Y_{th} ;

f) Vergleich der Bernoulliformel für die Relativströmung mit der Energieformel für die Absolutströmung;

g) Gegenüberstellung von den massenspezifischen Arbeiten: hydraulische Arbeit, Rad- oder Stutzenarbeit, Wirbelarbeit, mechanische Antriebsarbeit: Y_{th}, Y_{Wirbel}, Y_m .

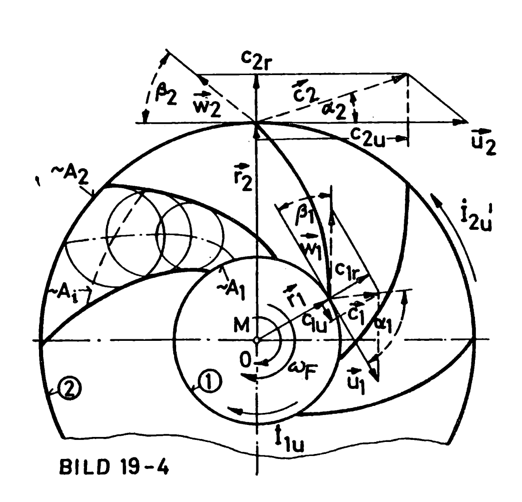


BILD 19-4

Lösungen:

a) M :

Betrachtet man den Laufradinhalt zwischen den Ringflächen A_1 und A_2 als Kontrollraum, dann wird das dynamische Drehmomentengleichgewicht : $\vec{M} - d\vec{D}/dt = 0$, durch Gl.(12-33), S.270, ausgedrückt. Es halten sich das Gleichgewicht:

(1) das von der Antriebswelle herkommende mechanische Antriebsmoment $\vec{M} = \sum \vec{M_i}$, im Uhrzeigersinn drehend; es wird von den Schaufeln aufs Fluid übertragen;

(2) das Moment der Umfangskomponente der Reaktion des austretenden Impulsstromes $\vec{\dot{I}'_{2u}} \times \vec{r_2} = \dot{m} \cdot c_{2u} \cdot r_2$;

(3) das Moment der Umfangskomponente des eintretenden Impulsstromes $\vec{\dot{I}_{1u}} \times \vec{r_1} = \dot{m} \cdot c_{1u} \cdot r_1$. - Es gilt also:

$$\boxed{M = \dot{m} \cdot (c_{2u} \cdot r_2 - c_{1u} \cdot r_1)} \qquad (19\text{-}14).$$

b) M in Verbindung mit Γ :

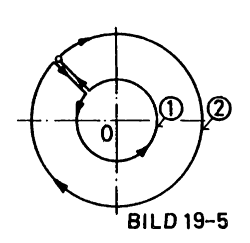


BILD 19-5

Bildet man nach Vorschrift von Gl.(11-49), S.216, und zwar längs der geschlossenen Kurve, wie man sie in Bild 19-5 erkennt, die Zirkulation, dann folgt, da sich die Zirkulationsbeiträge der Radialwege aufheben:

$$\Gamma_2 - \Gamma_1 = 2 \cdot \pi \cdot (c_{2u} \cdot r_2 - c_{1u} \cdot r_1) .$$

Setzt man diese Beziehung in Gl.(19-14) ein,dann zeigt sich:

$$M = \frac{\dot{m}}{2.\pi}.(\Gamma_2 - \Gamma_1) = \dot{m}.Y_{Wirbel}/\omega_F \qquad (19\text{-}15).$$

c) P_m :

Sie lautet einfach
$$P_m = M.\omega_F = \dot{m}.(c_{2u}.u_2 - c_{1u}.u_1) \qquad (19\text{-}16).$$

d) P_h :

Im dissipationsfreien Fall kann die mechanisch zugeführte Leistung vollständig in hydraulische Leistung umgeformt werden:

$$P_h = P_m \qquad (19\text{-}17).$$

e) Y_m und Y_{th} :

Wegen Gl.(19-17) folgt aus den Gl.(19-3) und Gl.(19-16) :

$$Y_m = Y_{th} = c_{2u}.u_2 - c_{1u}.u_1 \qquad (19\text{-}18).$$

Das ist aber die berühmte Eulersche Pumpen-Hauptgleichung.

f) Vergleich der Bernoulliformel für die Relativströmung mit der Energieformel für die Absolutströmung :

Ersetzt man in Gl.(19-13) die Ausdrücke $(w_i^2 - u_i^2)$ mit Hilfe des Cosinus-Satzes : $w_i^2 = u_i^2 + c_i^2 - 2.u_i.c_i.\cos\alpha_i$ - man beachte die Geschwindigkeitsdreiecke in Bild 19-4 - ,dann bekommt man:

$$\frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + g.z_1 + (c_{2u}.u_2 - c_{1u}.u_1) = \frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + g.z_2 \qquad (19\text{-}19).$$

Das ist also die weiterentwickelte Bernoulliformel für die Relativströmung.
Man stellt nun mit einiger Überraschung fest,wenn man Gl.(19-18) in Gl.(19-2),die sogenannte Energieformel,einführt: Es ergibt sich eine mit Gl.(19-19) identische Beziehung!-Ergebnis: Die Bernoulliformel für die Relativbewegung ist nichts anderes als die Energieformel für die Absolutbewegung!
g) Vergleich diesbezüglicher,massenspezifischer Arbeiten: Im dissipationsfreien Fall folgt: $Y_{th} = Y_{Wirbel} = Y_m$ in Zusammenstellung:

$$Y_{th} = -2.\int_{1,2} \vec{\omega} \times \vec{c}\,.d\vec{r} = c_{2u}.u_2 - c_{1u}.u_1 = \frac{\omega_F}{2.\pi}.(\Gamma_2 - \Gamma_1) \; .$$

Bemerkungen:

(1) Ein Vergleich der Gl.(19-13) und Gl.(19-19) liefert eine weitere Beziehung für die massenspezifische Radarbeit, womit man einen besonderen Einblick in das kinematische Geschehen einer Strömungsmaschinenstufe bekommt:

$$Y_{th} = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2} \qquad (19\text{-}20).$$

(2) Die Ableitungen in Abschn. 19 sind bezüglich Y_{th} für "Arbeitsmaschinen" vorgenommen worden : Pumpen, Ventilatoren, Gebläse, Verdichter u.a.
Läßt man $Y_{th} \rightarrow -Y_{th}$ gehen, dann ergeben sich die notwendigen Zusammenhänge für "Kraftmaschinen" : Turbinen u.a.

(3) Die fluidmechanische Kopplung zwischen den Kanalwänden einer Strömungsmaschine und dem Fluid wird durch die in diesem Buch vorgestellte mechanische Wirbelarbeit, Gl.(19-1), hergestellt.

6. Beispiel

Mit Hilfe der Dimensionsanalyse soll für den Strömungsmaschinenbau eine Leistungskennzahl ermittelt werden, so daß man an Modellmaschinen gemessene Leistungen auf Normalmaschinen übertragen kann.

Lösung:

Als die Leistung bestimmende Haupteinflußgrößen sind erkannt worden: die Fluiddichte ϱ, die Umfangsgeschwindigkeit u, ein Laufreihenradius R (man bezieht sich hier meistens auf den Größtwert), $\dot{V}$ u. die massenspezifische Radarbeit Y_{th} .-Sinngemäß folgt nach Gl. (15-2) und Gl.(15-3):

$P_M = f\,(\varrho, u, R, \dot{V}, Y_{th}) = \sum k_i \cdot \varrho^{x_1} . u^{x_2} . R^{x_3} . \dot{V}^{x_4} . Y_{th}^{x_5}$; nun folgt weiter: $\dim P = (\dim \varrho)^{x_1} . (\dim u)^{x_2} . (\dim R)^{x_3} . (\dim \dot{V})^{x_4} . (\dim Y_{th})^{x_5}$.

Einführung der Symbole für die Grunddimensionen:

$$M.L^2.T^{-3} = (M.L^{-3})^{x_1} . (L.T^{-1})^{x_2} . L^{x_3} . (L^3.T^{-1})^{x_4} . (L^2.T^{-2})^{x_5} \quad .$$

Exponentenvergleich:

$$\left.\begin{array}{lll} M & : & 1 = x_1 \\ L & : & 2 = -3.x_1 + x_2 + x_3 + 3.x_4 + 2.x_5 \\ T & : & -3 = -x_2 - x_4 - 2.x_5 \end{array}\right\} \text{Man eliminiert } x_1,\ x_2 \text{ und } x_3\ !$$

Damit folgt also: $x_1 = 1$; $x_2 = 3-x_4-2.x_5$; $x_3 = 2-2.x_4$.

Für die Leistung ergibt sich jetzt:

$$P_M = \sum k_i \cdot \varrho \cdot u^{3-x_4-2.x_5} \cdot R^{2-2.x_4} \cdot \dot{V}^{x_4} \cdot Y_{th}^{x_5} \quad \text{oder}$$

$$P_M = \varrho . u^3 . R^2 . \sum k_i \cdot u^{-x_4-2.x_5} . R^{-2.x_4} . \dot{V}^{x_4} . Y_{th}^{x_5}$$

;ebenso kann man schreiben:

$$P_M = \overbrace{\frac{\varrho}{2} . u^2 . \pi . R^2}.u \cdot \sum \frac{2}{\pi}.k_i \cdot \left[\frac{\dot{V}}{u.R^2}\right]^{x_4} \cdot \left[\frac{Y_{th}}{u^2}\right]^{x_5} .$$

Daraus folgt die Definition der gesuchten dimensionslosen Leistungszahl:

$$\boxed{\lambda = \frac{P_M}{(\varrho/2).u^3.\pi.R^2} = \underbrace{\sum \frac{2}{\pi}.k_i \cdot \left[\frac{\dot{V}}{u.R^2}\right]^{x_4} \cdot \left[\frac{Y_{th}}{u^2}\right]^{x_5}}_{K_M}} \qquad (19\text{-}21).$$

Die analogen Ausführungen auf S.323 besagen,daß die für dieses Problem erhaltene Globalkennzahl K_M für die Übertragbarkeit einzuhalten ist.Man sucht,diese Forderung durch Gleichhaltung der Basiswerte in der vorgelegten Potenzreihe zu erfüllen.Die geklammerten Basiswerte sind in folgender Form bekannt als:

$$\boxed{\text{Lieferzahl } \varphi = \frac{\dot{V}}{u.\pi.R^2} \quad \text{und Druckzahl } \psi = \frac{Y_{th}}{u^2/2}} \qquad (19\text{-}22).$$

Bringt man diese derart definierten Kennzahlen mit der hydraulischen Leistung P_h ,Gl.(19-3),in Verbindung und verwertet man gleichzeitig Gl.(19-21),dann erhält man das Ähnlichkeitsgesetz für Turbomaschinen nach Rateau:

$$\boxed{\lambda = \varphi \cdot \psi} \qquad (19\text{-}23).$$

Bildet man den Volumenstrom mit $\dot{V} = \pi . R^2 . u . \varphi$,die spezifische Förder- oder Fallhöhe $H_{th} = Y_{th}/g = (u^2/2g) . \psi$ und die Umfangsgeschwindigkeit $u = R.(n\,\pi)/30$,so läßt sich der Radius eliminieren,damit man eine andere von der Maschinengröße unabhängige Kennzahl bekommt:

$$\frac{\dot{V}^2}{H_{th}^2} = \frac{\pi^4 . n^2 . \varphi^2 . R^6 . 30^6 . 2^3 . g^3}{30^2 . \pi^6 . n^6 . \psi^3 . R^6} = \frac{30^4 . 2^3 . g^3}{\pi^2 . n^4} \; \frac{\varphi^2}{\psi^3}$$

; eine Umgruppierung und das Ziehen der vierten Wurzel ergibt eine Beziehung,die unter dem Namen spezifische,aber dimensionsbehaftete Drehzahl bekannt ist:

$$n_q = n . \frac{\dot{V}^{0,5}}{H_{th}^{0,75}} = 157,79 . \frac{\varphi^{0,5}}{\psi^{0,75}} \qquad (19\text{-}24).$$

Die Maßeinheit von n_q ist $(1/min).m^{0,75}.s^{-0,5}$; überraschenderweise wird in der Literatur nur von 1/min gesprochen!

Den dimensionslosen Teilausdruck

$$\sigma = \varphi^{0,5} / \psi^{0,75} \qquad (19\text{-}25)$$

nennt man nach Keller "Schnellaufzahl".- Unter der dimensionsbehafteten,spezifischen Drehzahl kann man sich beispielsweise eine zu einem Prototyp geometrisch ähnliche Pumpe vorstellen,die bei einem Meter Förderhöhe einen Volumenstrom von 1 m^3/s fördert.

T E I L IV : G A S D Y N A M I K

20. GRUNDBEGRIFFE DER GASDYNAMIK

20.1. Einführung

Als Fluid kommen hier nur vollkommene Gase in Betracht (S.180).Die diesbezüglichen physikalischen Eigenschaften sind bei S. 35 bis 42 zusammengestellt: Masse,Druck,Zähigkeit,Leichtgewichtigkeit,Ausdehnbarkeit,Diffusion,Kompressibilität,Schallgeschwindigkeit und Wärmeeigenschaften.

Die Berechnung von Druckkräften hat nach Gl.(7-16),S.87,zu erfolgen.Es ist besonders dabei zu beachten,daß der Angriffspunkt der Druckkraft mit dem Schwerpunkt der projizierten Fläche zusammenfällt.
In der Gasdynamik wird der Schwereeinfluß ausnahmslos vernachlässigt.-Bei der Beschäftigung mit Gasen ist nur in den Aerostatik-Beispielen 5 und 6,S.173 und 176,die Erdschwere zu beachten gewesen.
Die Ausdehnbarkeit und die Kompressibilität - beide zusammen bilden die Elastizität von Gasen - spielen in der Gasdynamik eine zentrale Rolle.Dichteänderungen bilden einen wichtigen Problemkreis dabei.
Gasströmungen niedriger Geschwindigkeit und geringer Dichteänderungen dürfen mit den fluiddynamischen Gesetzmäßigkeiten behandelt werden.Wo die vereinbarte Grenze liegen mag,wird in Abschn. 21.3.2,S.386,noch behandelt werden.

20.2. Thermodynamisches Verhalten der Gase

20.2.1. Allgemeines

In der Gasdynamik muß man den Wärmeeigenschaften der Fluide ganz besondere Aufmerksamkeit schenken.
Die klassische Thermodynamik beschäftigt sich mit Gleichgewichtszuständen und den Übergängen (Prozeßwege,Prozeßführungen) vom einen zum anderen Zustand.Man muß in der Technik also praktisch immer zum Kompromiß von Quasi-Gleichgewichtszuständen bereit sein, was glücklicherweise oft zu genügend genauen Ergebnissen führt.
Hier soll in Ergänzung zu Abschn. 3.5.1,S.36,eine Zustandsgröße auch noch folgendermaßen definiert werden: Von einer Zustandsgrösse ist dann die Rede,wenn die Differenz der betreffenden physikalischen Größe nur von den beiden Systemzuständen abhängt,gleichgültig,wie es zu den beiden Systemzuständen gekommen ist.
In der Fluidmechanik ist es doch üblich,zur genaueren Untersuchung von Kräftegleichgewicht,Massenbilanz usw. Kontrollräume aus dem gesamten Fluidbereich herauszutrennen oder freizumachen.Eine analoge Arbeitsweise kennt man ebenfalls in der Thermodynamik.Nur spricht man dabei von einem System.
Den bisher (Abschn.3.5) besprochenen Wärmeeigenschaften lag immer ein geschlossenes System zugrunde,was besagt,daß man es bei einer

Zustandsänderung immer mit derselben Fluidmasse zu tun gehabt hat: Volumen,Temperatur usw. können sich ändern,nicht aber die Fluidmasse.
Bei den thermischen Turbomaschinen (Dampfturbinen,Gasturbinen, Kompressoren) beispielsweise ändert aber dauernd die Fluidmasse im Kontrollraum.In diesem Fall liegt ein sogenanntes offenes System vor.Wie man die thermodynamischen Erkenntnisse,die an geschlossenen Systemen gewonnen worden sind,auf offene Systeme (Kontrollräume) überträgt,ist mithin Aufgabe der folgenden Abschnitte.
Sieht man von elektrischen,magnetischen,auf der Kapillarität und der Gravitation beruhenden Wirkungen bezüglich der vollkommenen Gasen ab,dann darf von einem einfachen System gesprochen werden, das erfahrungsgemäß durch drei Zustandsgrößen beschrieben werden kann.Den diesbezüglichen Zusammenhang muß man experimentell beschaffen (thermische und kalorische Zustandsgleichungen).
Man kennt direkt meßbare und abgeleitete Zustandsgrößen.Als direkt meßbar können gelten: die drei thermischen Zustandsgrößen "Druck, Temperatur,Volumen" und die Masse.-Als abgeleitete Zustandsgrößen gelten die drei kalorischen Zustandsgrößen,von denen zwei: die innere Energie und die Enthalpie,S. 39,bereits bekannt sind.
Energie ist im allgemeinen Sprachgebrauch definiert als die Fähigkeit,Arbeit zu verrichten.Das ist aber unscharf.Seit Gl.(1-13), S.8,ist aber bekannt,daß bei der Verwendbarkeit der Energie ihr exergetischer Anteil allein den Ausschlag gibt,was nie vergessen werden möge.Jede Energieerscheinungsform ist unbedingt auf ihren wandlungsfähigen und nichtwandlungsfähigen Anteil zu untersuchen.

Jede Energieerscheinungsform ist im Gleichgewichtszustand eine Zustandsgröße.Sie ist es nicht mehr,wenn sie sich auf Wanderschaft befindet,wie die Wärme (Abschn. 20.2.3) oder die mechanische Arbeit.Beide sind Prozeßgrößen,Austauschgrößen oder Transformationsgrößen,also von der Prozeßführung oder dem Weg abhängig.Wärme u. mechanische Arbeit sind also Energieerscheinungsformen,aber dabei keine Zustandsgrößen.
Die allgemeine Zustandsgleichung für vollkommene Gase,Gl.(3-6),S.38, wird jetzt zur Diskussion gestellt: $p.V = m.R.T$ .Die physikalischen Größen p,V,m,T können im Gleichgewichtszustand "relativ einfach" gemessen werden.Da es sich bei allen vieren um Zustandsgrößen handelt,stellen beide Gleichungsseiten wiederum,wenn auch zusammengesetzte Zustandsgrößen dar,und zwar von der Dimension einer Energie.In Gl.(1-9),S. 7,ist $p.V$ bereits als Druckenergie

eingeführt worden.Es wird nun hier der Vorschlag gemacht,das Produkt m.R.T "thermische Energie" E_{thm} zu nennen.
Nimmt man an einem geschlossenen System durch Arbeits- und Wärmezufuhr oder -abfuhr eine Zustandsänderung vor,dann folgt durch Differenzbildung ohne weiteres:

$$\boxed{p_2 \cdot V_2 - p_1 \cdot V_1 = m \cdot R \cdot (T_2 - T_1) = \Delta E_{thm}} \quad (20\text{-}1).$$

Auf die Änderung der Druckenergie ist bereits in Gl.(3-5),S.38, hingewiesen worden.Nur ist hier die Koppelung mit der thermischen Energie vorgenommen worden.-Entwickelt man obige Gleichung weiter mit den Beziehungen aus Gl.(3-9;3-10;3-12),dann folgt:

$$\boxed{p_2.V_2 - p_1.V_1 = m.(c_p - c_v).(T_2 - T_1) = \Delta H - \Delta U} \quad (20\text{-}2).$$

20.2.2. Arbeit der Druckkraft und Druckarbeit (Volumen- und Druckänderungsarbeit)

Da p.V eine Zustandsgröße ist,darf man von dieser Größe das totale Differential bilden;desgleichen von m.R.T : $dE_d = dE_{thm}$;

$$\boxed{d(p.V) = p.dV + V.dp = m.R.dT} \quad (20\text{-}3).$$

Die Integration führt zu:

$$\boxed{p_2.V_2 - p_1.V_1 = \int_{1.2} p.dV + \int_{1.2} V.dp = m.R.(T_2-T_1)} \quad (20\text{-}4).$$

Das erste Integral hiervon heißt auch Arbeit der Druckkraft oder, wie üblich,Volumenänderungsarbeit.(Der letzte Ausdruck ist nicht ganz treffend,weil ja das Volumen als geometrische Größe keine Arbeit verrichten kann).-Zur weiteren Erläuterung dient Bild 20-1. Ein gasgefüllter, elastischer Ballon befindet sich in Vakuum-Umgebung.Durch Wärme- und Arbeitszufuhr (Q;W) geht der Zustand (V_1; p_1;T_1) des geschlossenen Systems über in den Zustand (V_2;p_2;T_2). Die elementare Druckkraft $\vec{n}$.p.dA verrichtet lokal die Arbeit dW= p.dA.$d\vec{r}$.Dafür kann man auch schreiben: dW = p.dV .Auf diese Art läßt sich der Name "Arbeit der Druckkraft" erläutern:

$$W_{Fp} = \int_{1.2} p \cdot dV \qquad (20\text{-}5).$$

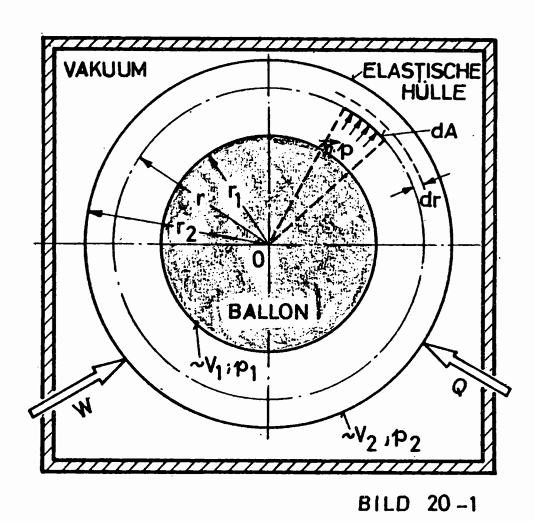


BILD 20-1

Das zweite Integral in Gl.(20-4) möge Druckarbeit oder Druckänderungsarbeit genannt werden. Denn hier ist es die mechanische Größe "Druck", die zur Arbeitsverrichtung herangezogen wird. (Für den dissipationsfreien Fall ist für diesen Ausdruck auch die Bezeichnung "technische Arbeit" gebräuchlich; davon wird ebenfalls kein weitererGebrauch gemacht,weil nicht nur das Integral $\int V.dp$ technische Bedeutung hat.)- Die Druckarbeit lautet also :

$$W_p = \int_{1.2} V \cdot dp \qquad (20\text{-}6).$$

Stellt man die thermische Zustandsgleichung,Gl.(3-6),grafisch dar, dann stößt man auf ein Hyperboloid mit dem absoluten Nullpunkt als Koordinatenursprung.Legt man Schnittflächen zur p,V-Ebene,so ergeben sich gleichseitige Hyperbeln,Bild 20-2.Außerdem ist eine Zustandsänderung (Expansion) von 1→2 eingetragen.Man findet dabei eine geometrische Veranschaulichung von Gl.(20-4).Flächen im pV-Diagramm sind ein Maß für verrichtete Arbeiten.

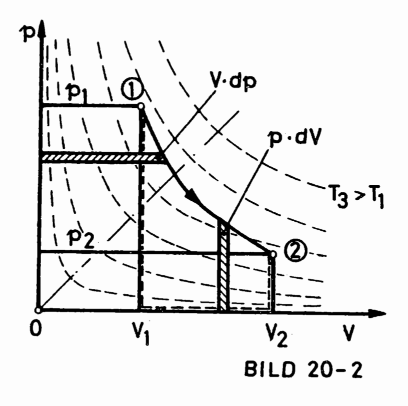


BILD 20-2

20.2.3. Wärme

Zu den Behandlungsgegenständen der Abschn.(2.9.1;3.5.7 ÷ 3.5.10): Wärmemenge,Wärmeaustausch,innere Energie,Enthalpie und erster Hauptsatz der Thermodynamik werden hier noch ein paar Ergänzungen nachgereicht.

Zunächst wird vereinbart,daß bei Ableitungen extensive Größen (Abschn. 1.3.3,S.5) durch Massenbezug zu spezifischen Größen (Abschn. 1.3.4, S.5) gemacht werden,weshalb nun kleingeschriebene Symbole verwendet werden.Z.B.: $V/m = v$; $Q/m = q$ u.a.

Es gibt grundsätzlich nur "die" Energie,aber verschiedene Energieerscheinungsformen.So kennt man mechanische Energie,elektrische und magnetische Energie,kalorische Energie u.a.

Zur kalorischen Energieerscheinungsform gehören nun folgende,bereits bekannte physikalische Größen: die Wärme,die innere Energie,die Enthalpie und die sogenannte thermische Energie.Nach den bisher vorliegenden Betrachtungen ist von diesen vier Größen nur die Wärme keine Zustandsgröße.Wegen ihres dynamischen Charakters ist sie eine Prozeßgröße,eine Austauschgröße oder,wie man auch noch sagt: eine Transformationsgröße.-Wenn man in diesem Zusammenhang sich der mechanischen Arbeit erinnert,die gleichermaßen wegabhängig ist und dabei zur Familie der mechanischen Energieerscheinungsformen gehört,dann kann man doch die sogenannte WÄRME analogerweise KALORISCHE ARBEIT nennen.Mit diesem Begriff ist nämlich die Wärme genauer definiert.

Wegen der Berechnung von der inneren Energie mit c_v ,der spezifischen Wärme bei isochorem Wärmeaustausch,und der Enthalpie mit c_p , der spezifischen Wärme bei isobarem Wärmeaustausch,könnte man daran zweifeln,ob die innere Energie u und die Enthalpie h tatsächlich Zustandsgrößen sind,da ja c_v und c_p wegabhängig sind.Zur weiteren Beurteilung dieser Situation wird durch Bezugnahme auf das absolute Vakuum (T=0;p=0;v=0) mit Hilfe der Gl.(3-9),Gl.(3-10) und Gl.(20-1) folgende Gegenüberstellung möglich:

$$\boxed{u = c_v.T \quad ; \quad h = c_p.T \quad ; \quad e_{thm} = R.T} \qquad (20\text{-}7).$$

Bei vollkommenen Gasen dürfen die "Faktoren" c_v,c_p und R als konstant angesehen werden.Diese Konfrontation möge die Zweifel beseitigen;denn in allen drei Fällen wird die absolute Temperatur mit einem konstanten Faktor multipliziert,der sich aus den thermodynamischen Ableitungen ergab und und"zufällig" für die Ermittlung von u und h mit einer

bekannten, wegabhängigen Größe korrespondiert. Zur weiteren Übersicht werden die Gl.(3-9), Gl.(3-10), Gl.(3-11) und Gl.(3-13) zusammengefaßt:

$$\boxed{\begin{aligned} dq &= du + p.dv = dh - v.dp \\ dq &= c_v.dT + p.dv = c_p.dT - v.dp \end{aligned}} \qquad (20\text{-}8).$$

Daraus läßt sich auch ableiten:

$$dh = du + p.dv + v.dp = du + d(p.v) \quad ;$$

für die Enthalpie in ihrer massenspezifischen Form ergibt sich schließlich:

$$\boxed{h = u + p.v} \qquad (20\text{-}9).$$

20.2.4. Entropie

Mit Hilfe des Schwartzschen Satzes (Abschn. 11.2.3) kann man erneut die Wegabhängigkeit der kalorischen Arbeit (Wärme) nachweisen:

Gl.(3-5) und Gl.(20-8) ermöglichen:

$$dq = c_v.dT + (R.T/v).dv = f\ (T,v) \quad .$$

Diesem Differentialausdruck liegt deshalb keine Zustandsgröße zugrunde, weil die gemischten, partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{R.T}{v}\right) \longrightarrow 0 \neq R/v \quad \text{nicht gleich sind !}$$

Mittels eines integrierenden Faktors F kann der Differentialausdruck zu einem vollständigen Differential werden.-Der Versuch, nachzuprüfen, ob ein solcher integrierender Faktor nur von der absoluten Temperatur abhängt, ist erfolgreich:

$$F(T).dq = F(T).c_v.dT + F(T).\frac{R.T}{v}.dv$$; das Schwartzsche Kriterium für die Existenz eines totalen Differentials ist bekanntlich die Gleichheit der gemischten, partiellen Ableitungen:

$$\frac{\partial}{\partial v}(F.c_v) = \frac{\partial}{\partial T}(F.R.T/v) \quad \text{oder:} \quad 0 = F.\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{R.T}{v}\right) + \frac{R.T}{v}.\frac{\partial F}{\partial T} \quad ;$$

$$-F.\frac{R}{v} = \frac{R.T}{v}.\frac{dF}{dT} \longrightarrow \frac{dF}{F} = -\frac{dT}{T} \; ; \quad \ln F = -\ln T \; ;$$

$$\ln (F.T) = 0 = \ln 1 \longrightarrow F.T = 1 \longrightarrow \underline{\underline{F = \frac{1}{T} = F\ (T)}}.$$

Es existiert also tatsächlich ein nur von T abhängiger, integrierender Faktor.
Nunmehr geht der erste Hauptsatz der Thermodynamik über in ein totales Differential:

$$\boxed{\frac{dq}{T} = c_v \cdot \frac{dT}{T} + R \cdot \frac{dv}{v} = ds} \qquad (20\text{-}10).$$

Die kalorische Zustandsgröße s ,gemessen in J/(kg.K) ,nennt Clausius ENTROPIE .Integriert man zwischen den Zuständen 1 und 2 ,so erhält man für die Änderung dieser dritten, kalorischen Zustandsgröße:

$$\boxed{s_2 - s_1 = \Delta s = c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1} + R \cdot \ln \frac{v_2}{v_1}} \qquad (20\text{-}11).$$

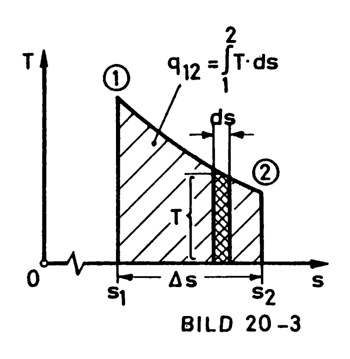


BILD 20-3

In Bild 20-3 wird ein thermodynamisches Diagramm gezeigt: das T,s-Diagramm. Es zeichnet sich besonders dadurch aus, daß aufgrund der Definition von $ds = dq/T \rightarrow dq = T.ds$ die zwischen den beiden Zuständen 1 und 2 ausgetauschten Wärmemengen als Flächen darstellbar sind:

$$\boxed{q_{12} = \int_{1.2} T \cdot ds} \qquad (20\text{-}12).$$

An dieser Stelle ist auch auf die Vorzeichenvereinbarung in der Thermodynamik aufmerksam zu machen:

> Zugeführte Wärmemengen gelten als positiv.
> Zugeführte Arbeiten gelten als negativ.

20.2.5. Zweiter Hauptsatz der Thermodynamik

Carnot (1824) hat die thermodynamischen Begriffe "reversibel" und "irreversibel" folgendermaßen erläutert [7]:

Kann ein System, in dem ein Prozeß abgelaufen ist, wieder in seinen Anfangszustand gebracht werden, ohne daß irgendwelche Änderungen in der Umgebung zurückbleiben, so heißt der Prozeß "reversibel" oder umkehrbar.
Ist der Anfangszustand des Systems ohne Änderung in der Umgebung nicht wiederherstellbar, so nennt man den Prozeß "irre-

versibel " oder nicht umkehrbar.
Die Erfahrung lehrt nun, daß alle natürlichen Prozesse nur in einer Richtung von selbst ablaufen können. Clausius u.a. formulierten deshalb den ZWEITEN HAUPTSATZ DER THERMODYNAMIK, dessen Inhalt folgendermaßen komprimiert werden kann:

> Alle natürlichen Prozesse sind irreversibel. Reversible Prozesse sind nur idealisierte Grenzfälle irreversibler Prozesse.

Irreversible Prozesse lassen sich einteilen in Ausgleichsvorgänge (Druck-, Temperatur- und Dichteunterschiede gleichen sich aus) und in dissipative Prozesse (z.B.: hauptsächlich Reibung und plastische Verformungen).
Der zweite Hauptsatz der Thermodynamik hat, je nach seiner speziellen Anwendung, verschiedenartige Formulierungen erhalten. Eine davon heißt:

> Kalorische Energie in Form von Wärme fließt nie allein vom Körper tiefer Temperatur zu einem Körper höherer Temperatur.

Die hydraulische Analogie ist naheliegend: Wasser fließt von allein nur talwärts. Nach oben muß es gepumpt werden; genauso auch kalorische Energie (Wärmepumpen).
Bei quasi-statischen Prozeßführungen beruhen in der Thermodynamik die Irreversibilitäten hauptsächlich auf dissipativer Reibung. Solche Effekte führen wandlungsfähige Energie (Exergie) in nicht wandlungsfähige Energie (Anergie) über.
Reibungsarbeiten gehen spontan in Reibungswärmen über, so daß gilt:

$$dw_{R12} = dq_{irr} \quad .$$

Man beachte auch Gl.(17-1).-Es ist nunmehr festzuhalten, daß die an einem geschlossenen System verrichtete, kalorische Arbeit aus zwei Anteilen besteht: aus dem mit der Umwelt ausgetauschten Betrag dq_A und der im System entstandenen Reibungswärme dq_{irr}. Somit gilt:

$$\boxed{dq = dq_A + dq_{irr}} \qquad (20\text{-}13).$$

Diese Erkenntnis führt zu einer erweiterten Formulierung des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik:
Gl.(20-8):

$$\boxed{\begin{aligned} dq = dq_A + dq_{irr} &= du + p.dv = dh - v.dp \\ &= c_v.dT + p.dv = c_p.dT - v.dp \end{aligned}} \qquad (20\text{-}14).$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit dem integrierenden Faktor $1/T$, so ergibt sich für die Entropieänderung:

$$ds = \frac{dq}{T} = \frac{dq_A}{T} + \frac{dq_{irr}}{T} = ds_{rev} + ds_{irr}$$, wobei man

$ds_{rev} = dq_A / T$ den <u>Entropiestrom</u> und

$ds_{irr} = dq_{irr}/T$ die <u>Entropieerzeugung</u> nennt.

Der Entropiestrom beruht auf dem Austausch kalorischer Arbeit (Wärme) mit der Umgebung des geschlossenen Systems (das geschlossene System und seine Umgebung bilden übrigens das Gesamtsystem),die Entropieerzeugung hingegen geschieht im System selbst.-Nunmehr kann man vermerken:

$$\Delta s = s_{rev12} + \int_{1.2} ds_{irr} = c_v . \ln \frac{T_2}{T_1} + R . \ln \frac{v_2}{v_1} = c_p . \ln \frac{T_2}{T_1} - R . \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (20\text{-}15).$$

Jetzt erfolgt die Anbindung des Entropiebegriffs an die Aussage des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik:

Zunächst betrachte man ein geschlossenes System,das mit seiner Umgebung nicht im Wärmeaustausch steht - man nennt es nach Abschn.3.5.12, S.42,ein adiabates System - ,wonach also dq_A und ds_{rev} verschwinden.Da bei natürlichen Prozessen immer dissipative Effekte im System auftreten,ist $ds_{irr} = dq_{irr}/T > 0$!-Mit anderen Worten:

In einem geschlossenen System,das mit seiner Umgebung nicht im Wärmeaustausch steht,wird bei natürlichen Prozessen ständig Entropie erzeugt.

Betrachtet man nun den Fall des Gesamtsystems,wo also das geschlossene System durchaus mit seiner Umgebung ebenfalls im Wärmeaustausch stehen kann,dann kommt es zu irreversiblen Austauschvorgängen.Auch sie vermehren die Entropie des Gesamtsystems.-Der zweite Hauptsatz kann folgendermaßen formal fixiert werden:

Die algebraische Summe der Entropieänderungen von Teilsystemen in einem Gesamtsystem ist immer größer null:

$$\sum s_i \geqq 0 \qquad (20\text{-}16).$$

Das Gleichheitszeichen steht für den reversiblen,idealen Grenzfall, der für Vergleichszwecke sehr wertvoll ist.

20.2.6. Berechnung von Zustandsänderungen und kalorischer Arbeit

Das diesbezügliche Handwerkszeug ist bereits bekannt:

S.33 : Gl.(2-31) : kalorische Arbeit (Wärmeaustausch) ;
S.38 : Gl.(3-7) : allgemeine Zustandsgleichung vollkommener Gase;
S.39 : Gl.(3-9) : Änderung der inneren Energie;
S.39 : Gl.(3-10) : Änderungen der Enthalpie ;
S.41 : Gl.(3-14) : Polytropenexponent ;
S.41 : Gl.(3-15) : polytrope Zustandsänderung ;
S.373 : Gl.(20-1) : Änderung der Druckenergie und der thermischen Energie ;
S.374 : Gl.(20-5) : Arbeit der Druckkraft (Volumenänderungsarbeit);
S.374 : Gl.(20-6) : Druckarbeit (Druckänderungsarbeit) ;
S.376 : Gl.(20-8) : erster Hauptsatz der Thermodynamik ;
S.377 : Gl.(20-11) : Entropieänderung
S.378 : Gl.(20-14) : erweiterter,erster Hauptsatz ;
S.379 : Gl.(20-15) : erweiterte Entropieänderung ;
S.379 : Gl.(20-16) : zweiter Hauptsatz der Thermodynamik .

Es wurden hier natürlich nur die wichtigsten Beziehungen zusammengestellt.

Es ist nun üblich geworden,Sonderfälle von Zustandsänderungen herauszuheben.Obige Gleichungen werden sich dementsprechend vereinfachen. Eine stichwortartige Zusammenstellung möge den Überblick verschaffen:

Bezeichnung der Zust.änderg. (Charakteristik)	Poytropen-exponent	Gl.f.therm. Zust.änderg.	Spezifische Wärme	Kal.Arbeit (Wärme)
ISOBARE (p=const)	$n = 0$	$v/T = \text{const}$	$c = c_p$	$c_p \cdot \Delta T$
ISOTHERME (T=const)	$n = 1$	$p.v = \text{const}$	$c \rightarrow \infty$	$\int_{1.2} p.dv$
ISENTROPE (s=const)	$n = \frac{c_p}{c_v} = \varkappa$	$p.v^{\varkappa} = \text{const}$	$c = 0$	0
ADIABATE ($q_{A12}=0$)	n	$p.v^n = \text{const}$	$c = c_v \cdot \frac{n-\varkappa}{n-1}$	$c_v \cdot \frac{n-\varkappa}{n-1} \cdot \Delta T$
ISOCHORE (v=const)	$n \rightarrow \infty$	$p/T = \text{const}$	$c = c_v$	$c_v \cdot \Delta T$
POLYTROPE (keine Einschränkung)	n	$p.v^n = \text{const}$	$c = c_v \cdot \frac{n-\varkappa}{n-1}$	$c_v \cdot \frac{n-\varkappa}{n-1} \cdot \Delta T$

Bemerkungen:

(1) Der isotherme Wärmeaustausch berechnet sich nach dem ersten Hauptsatz, Gl.(20-8): $dq = dq_A + dq_{irr} = du + p.dv$; $du = c_v.dT = 0$;

$$q_{12} = \int_{1.2} p.dv \quad .$$

(2) Der Exponent der Isentropen heißt auch Isentropenexponent. Die Isentrope ist dadurch charakterisiert, daß das geschlossene System wärmeisoliert (adiabat!) ist und daß die systeminternen Prozesse dissipationsfrei ablaufen!- $ds = (dq_A + dq_{irr})/T = 0 \rightarrow s = const$!

(3) Während mit der Isentropen eine reversible Adiabate vorliegt, muß man im Normalfall einer Adiabaten mit Dissipationen rechnen. Hier ist nur $dq_A = 0$, nicht aber dq_{irr} !-Der Exponent ist fallweise durch Experimente zu ermitteln.

(4) Obwohl alle Zustandsänderungen letztlich Polytropen sind, spricht man gewöhnlich von polytropen Zustandsänderungen, wenn es sich dabei nicht um isobare, isotherme, isentrope, adiabate und isochore Zustandsänderungen handelt.

(5) Die Tabellenanordnung geschah unter dem Gesichtswinkel wachsender Polytropenexponenten. Eine Ausnahme bildet natürlich die Polytrope.

Von Interesse sind in diesem Überblick auch die Entropieänderungen:

ISOBARE :	$\Delta s = c_p.\ln T_2/T_1$	ISOTHERME :	$\Delta s = R.\ln v_2/v_1$
ISENTROPE :	$\Delta s = 0$	ADIABATE :	$\Delta s_{irr} = c_v.\frac{n-\varkappa}{n-1}.\ln\frac{T_2}{T_1}$
ISOCHORE :	$\Delta s = c_v.\ln T_2/T_1$	POLYTROPE :	$\Delta s =$ "

Bemerkung:

Die Entropieänderung der Adiabaten und der Polytropen ergibt sich aus Gl.(20-10) und Gl.(20-13): $ds = (dq_A + dq_{irr})/T = c.dT/T$. — In Bild 20-4 werden drei thermodynamische Diagramme angegeben.

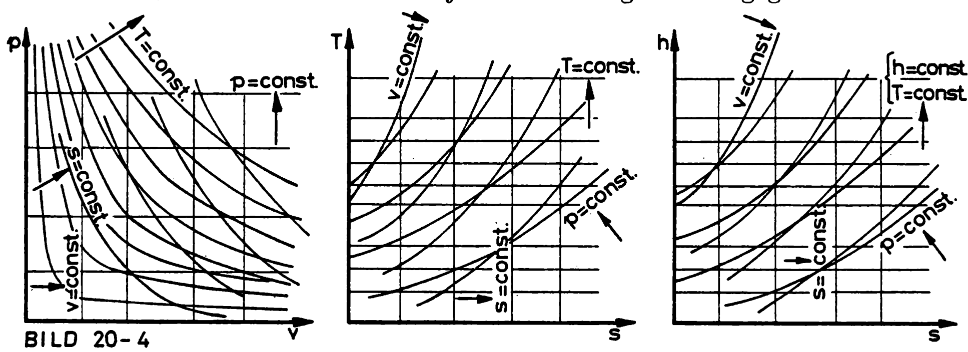


BILD 20-4

21. EINDIMENSIONALE BEWEGUNG

21.1. Kontinuitätsgleichung

Da in der Gasdynamik die Dichte $\varrho(x,y,z,t)$ keine Konstante mehr ist wie etwa bei stationären Strömungen in der Hydrodynamik,muß man in allen Formen der Kontinuitätsgleichung mit der Massenstromdichte $(\varrho \cdot \vec{c})$ operieren!-Alle Gleichungen in den Abschnitten 11.2.1 und 11.2.2 ,die auf dem Massenstrom aufgebaut sind,behalten ihre Gültigkeit in der Gasdynamik,auch die Gl.(11-19),S.195,wenn man die Dichte zum Integranden packt.
Volumenströme kann man natürlich auch in der Gasdynamik berechnen,sie dürfen aber nicht mehr zu Kontinuitätszwecken Verwendung finden.

Für gasdynamische Rohrströmungen soll jetzt nur noch die Gl.(11-34), S.202,eine formelle Anpassung an gleichbleibenden Querschnitt erfahren:

$$\boxed{\varrho \cdot \frac{\partial c}{\partial s} + c \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial s} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0} \qquad (21\text{-}1).$$

Je nach Art der Zustandsänderung des Gases während der Strömung kann beispielsweise die lokale Dichteänderung $\partial\varrho / \partial t$ zudem verschwinden.

21.2. Schallgeschwindigkeit

Nach Abschn. 2.3.1 ,S.9,weiß man um die Bedeutung der Schallgeschwindigkeit: Sie ist eine andere Darstellungsart für das elastische Verhalten eines Fluids oder Festkörpers.-Die Anpassung an gasförmige Fluide geschah auf S.36 und führte zur Gl.(3-1): $c_s = \sqrt{dp/d\varrho}$,wobei jetzt natürlich die dementsprechende Zustandsänderung zu berücksichtigen ist.-Geht man etwa von einer isentropen Zustandsänderung aus (S.380 oder S.41 mit $n = \varkappa$),dann ergibt sich:

$$p = \text{const.}\varrho^{\varkappa} \; ; \; dp/d\varrho = \varkappa .\text{const.}\varrho^{\varkappa -1} = \varkappa \cdot \frac{p}{\varrho^{\varkappa}} \cdot \varrho^{\varkappa -1} \; ;$$

$$\frac{dp}{d\varrho} = \varkappa \cdot \frac{p}{\varrho} = \varkappa .p.v = \varkappa .R.T \; ;$$

$$\boxed{c_s = \sqrt{\varkappa \cdot R \cdot T}} \qquad (21\text{-}2).$$

Da die gesamte Ableitung der Schallgeschwindigkeit (hier die isentro-

pe Schallgeschwindigkeit) auf die beweislos angeführte Gl.(2-4),S.9, aufgebaut ist,möge sie jetzt mit Hilfe der Dimensionsanalyse (Abschn. 15.2) nachgeprüft werden.

Funktioneller Ansatz: $c_s = f(E,\varrho) = \sum k_i . E^{x_1} . \varrho^{x_2}$;

Dimensionsgleichung: $\dim c_s = (\dim E)^{x_1} . (\dim \varrho)^{x_2}$;

$L.T^{-1} = (L^{-1}.T^{-2}.M)^{x_1} . (L^{-3}.M)^{x_2}$;

Exponentenvergleich:

L : $1 = -x_1 - 3.x_2$;

T : $-1 = -2.x_1$;

M : $0 = x_1 + x_2$;

Lösungen: $\underline{\underline{x_1 = -x_2 = 1/2}}$.

$c_s = \sum k_i . E^{1/2} . \varrho^{-1/2}$;

$$\underline{\underline{c_s = \sqrt{\frac{E}{\varrho}} . \sum k_i}} \quad .$$

Bis auf einen konstanten Faktor konnte mittels der Dimensionsanalyse der Nachweis für die Richtigkeit der Gl.(2-4) erbracht werden.Die Dimensionsanalyse ist also hier nicht in der Lage,das genaue Ergebnis herbeizuführen.Damit deuten sich auch ihre Einsatzgrenzen an.-Experimente ergaben $\sum k_i = 1$.

21.3. Bernoulligleichung

21.3.1. Theorie

Aus der Zusammenfassung der letzten Gleichungszeile im Zuge der Ableitung von Gl.(12-3),S.228,und der Aussage von Gl.(17-1),S.337,kann man die Bernoulligleichung für folgende Charakteristik zusammenschreiben: instationär,kompressibel,reibungsbehaftet,ohne Arbeitsaustausch und bei Vernachlässigung der Erdschwere:

$$\int_{1.2} \frac{\partial c}{\partial t} . ds + \int_{1.2} \frac{dp}{\varrho} = \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} - w_{R12} \quad ;$$

Legt man der allgemeinen Zustandsänderung die Polytrope zugrunde,so folgt für das Integral $\int dp/\varrho$:

$$p = \text{const.} \varrho^n = C.\varrho^n \; ; \; dp = C.n.\varrho^{n-1}.d\varrho \; ; \; dp/\varrho = C.n.\varrho^{n-2}.d\varrho \; ;$$

$$\int_{1.2} dp/\varrho = C.n.\int_{1.2} \varrho^{n-2}.d\varrho = C.\, n/(n-1).\, \varrho^{n-1} \Big|_1^2 \quad ;$$

$$\int_{1.2} dp/\varrho = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p}{\varrho^n} \cdot (\varrho_2^{n-1} - \varrho_1^{n-1}) \quad ; \quad \text{mit} \quad p_1/\varrho_1^n = p_2/\varrho_2^n = p/\varrho^n$$

folgt schließlich:

$$\boxed{\frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_1}{\varrho_1} + \frac{c_1^2}{2} = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_2}{\varrho_2} + \frac{c_2^2}{2} + \int_{1.2} \frac{\partial c}{\partial_t} .ds + w_{R12}} \qquad (21\text{-}3).$$

21.3.2. Beispiele [25]

1. Beispiel

Aus einem Druckluftbehälter strömt Luft aus. Der Behälter ist verhältnismäßig groß, und der thermodynamische Luftzustand bleibe unverändert, Bild 21-1. - Angaben:

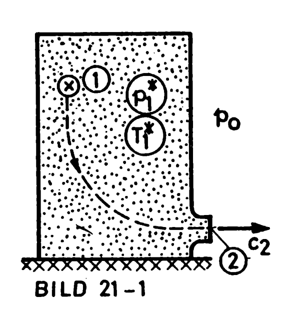


BILD 21-1

Anfangsgeschwindigkeit $c_1 = 0$; $c_p = 1004{,}5 \frac{J}{kg.K}$; Absolutdruck im Behälter : 1,9 bar; Absoluttemperatur im Behälter : 293 K ; Atmosphärendruck $p_2 = p_o = 1{,}015$ bar ; Polytropenexponent $n = \varkappa = 1{,}4$; individuelle Gaskonstante $R = 287$ J/(kg.K) ; Erdschwere ist zu vernachlässigen. - Man ermittle:

a) die stationäre Austrittsgeschwindigkeit c_2; im isentropen Fall;

b) die statische Temperatur T_2 , die kinetische Temperatur; die Totaltemperatur am Austritt;

c) die Austrittsgeschwindigkeit c_2' nach Bunsen, also im inkompressiblen oder dichtebeständigen Fall;

d) Vergleich der beiden Geschwindigkeiten und Folgerung für die definitionsgemäße Trennung zwischen Hydrodynamik und Gasdynamik.

Lösungen:

a) c_2 :

In Gl.(21-3) fallen nach Angaben das instationäre Glied, $c_1^2/2$ und w_{R12} weg, so daß eine weitgehende Vereinfachung möglich ist.
In Zukunft sind thermodynamische Zustände auch kinematisch genauer zu beschreiben:
Man unterscheidet die Total-Zustandsgrößen (T*; p*; ϱ*; v*;h* usw.) für ruhendes Gas von den statischen Zustandsgrößen (T;p; ;v;h usw.)

bewegter Gase.Die Differenzen hierzu beruhen auf der Geschwindigkeit des Gases.Man beachte ebenfalls die Ausführungen auf S.249,wo beispielsweise der Totaldruck für Flüssigkeitsströmungen eingeführt worden ist.Es ist also zu beachten:

$$\boxed{\text{Wenn } c = 0,\text{dann gilt } T \to T^*;\ p \to p^*\ ;\ v \to v^*\ ;\ h \to h^*\ \text{u.a.}} \qquad (21\text{-}4).$$

Für die angestrebte Lösung von c_2 geht demnach $p_1 \to p_1^*$ und $\varrho \to \varrho_1^*$:

$$c_2^2 / 2 = \frac{n}{n-1} \cdot \left(p_1^* / \varrho_1^* - p_2 / \varrho_2 \right) = \frac{n}{n-1} \cdot \frac{p_1^*}{\varrho_1^*} \cdot \left[1 - \frac{p_2}{p_1^*} \cdot \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \right];$$ nach

Gl.(3-16) ergibt sich endlich mit $n = \varkappa$:

$$\boxed{c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot \underbrace{\frac{p_1^*}{\varrho_1^*}}_{= R \cdot T_1^*} \cdot \left[1 - \left(\frac{p_2}{p_1^*} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right]}} \qquad (21\text{-}5).$$

Das ist die bekannte Gleichung von Saint-Venant und Wantzel.-In Zahlen:

$$c_2 = \sqrt{2 \cdot \frac{1,4}{1,4-1} \cdot 287 \cdot 293 \cdot \left[1 - \left(\frac{1,015 \cdot 10^5}{1,9 \cdot 10^5} \right)^{(1,4-1)/1,4} \right]}$$

$$\underline{\underline{c_2 = 310,85 \text{ m/s}}}\ .$$

b) T_2 ; T_{2kin} ; T_2^* :

Mit den Gl.(3-12) und Gl.(3-16) läßt sich Gl.(21-5) auch folgendermaßen anschreiben:

$$\boxed{c_2 = \sqrt{2 \cdot c_p \cdot (T_1^* - T_2)} = \sqrt{2 \cdot (h_1^* - h_2)}} \qquad (21\text{-}6)\ .$$

Durch Auflösung nach T_1^* folgt:

$$\frac{c_2^2}{2 \cdot c_p} + T_2 = T_1^* = T_2^*$$; die Totaltemperaturen sind im isentropen und adiabaten Strömungsfall konstant,

vgl.Gl.(21-28) für $Y_i = 0$ und $c_p = \text{const}$ u.S.397.

Man nennt T_2 die statische,absolute Temperatur und $\frac{c_2^2}{2 \cdot c_p}$ die kinetische Temperatur T_{kin} .Allgemein gilt sodann:

$$\boxed{T^* = T + T_{kin} = T + c^2/(2 \cdot c_p)} \qquad (21\text{-}7).$$

In Zahlen: $T_{2kin} = 310{,}85^2/(2.1004{,}5)$; $\underline{\underline{T_{2kin} = 48{,}1 \ K}}$;
$T_2 = T_2^* - T_{2kin} = 293 - 48{,}1$; $\underline{\underline{T_2 = 244{,}9 \ K = -28{,}1^oC}}$.

$\underline{\underline{T_2^* = T_1^* = 293 \ K}}$.

c) $\underline{c_2'}$:

Die Bunsensche Formel, Gl. (12-12), S.236, wird genauer mit Indizes bestückt: $c_2' = \sqrt{2.(p_1^* - p_2)/\varrho_1^*}$; die Dichte für den Totalzustand im Behälter ist: $\underline{\varrho_1^*} = p_1^*/(R.T_1^*) = 2.10^5/(287.293) = \underline{2{,}378 \ kg/m^3}$; es folgt:

$c_2' = \sqrt{2.(1{,}9-1{,}015).10^5/2{,}378}$; $\underline{\underline{c_2' = 272{,}82 \ m/s}}$.

d) Vergleich und Kommentar :

Der relative Fehler beträgt $\underline{\underline{(c_2-c_2')/c_2 = 12{,}23 \ \%}}$,ein beachtlicher Wert.
Empfehlenswert für die Grenze zwischen kompressibler und inkompressibler Rechnung ist ein relativer Fehler von 2 % !

2. Beispiel

Der Kanalverlauf einer sogenannten LAVAL-Düse wird in Bild 21-2 gezeigt. Dem konvergenten Kanalverlauf folgt nach der engsten Stelle ein divergenter. - Als bekannte Größen werden in diesem Beispiel angesehen: p_1 ; T_1 ; c_1 ; $p_3 = p_4$ (Umgebungsdruck) ; c_p ; R ; $D_2 = D_e$. - Man ermittle:

a) den Totalzustand in Kontrollebene 1 ;
b) den Totalzustand im Behälter ;
c) die Machzahl in Kontrollebene 1 ;
d) die Differentialgleichung von Hugoniot (sie gibt bei polytroper Strömung den Zusammenhang zwischen Querschnitts- und Geschwindigkeitsänderungen sowie der Machzahl an) ;
e) Diskussion der Hugoniot-Gleichung;
f) die Geschwindigkeit im engsten Querschnitt und die thermischen Zustandsgrößen ;
g) den maximalen Massenstrom ;
h) einen Vergleich der Machzahlen Ma_1 , Ma_2 und Ma_3 ;
i) Formel zur Berechnung der Geschwindigkeit c_3 ,wenn man vom Zustand 1 direkt ausgeht.

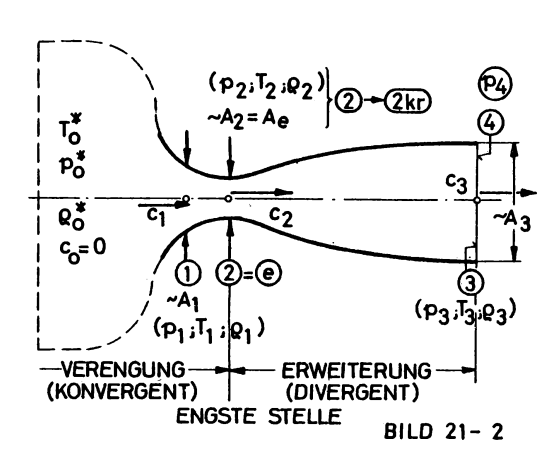


BILD 21- 2

Lösungen:

a) T_1^* ; p_1^* ; ϱ_1^* :

Aus den Angaben der absoluten statischen Temperatur T_1 und der Geschwindigkeit c_1 läßt sich mittels Gl.(21-7) die Totaltemperatur T_1^* ermitteln:

$$T_1^* = T_1 + \frac{c_1^2}{2.c_p} \qquad (21\text{- }8).$$

Da der statische und der totale, thermodynamische Zustand jeweils im isentropen Zusammenhang miteinander stehen, läßt sich mittels der Gl.(3-16),S.41,für n=æ folgende Zustandsänderungsgleichung angeben, die sogar allgemein gilt:

$$p_1^* / p_1 = (T_1^* / T_1)^{æ/(æ-1)} \qquad (21\text{-}9).$$

Nachdem nun T_1^* und p_1^* bekannt sind, läßt sich ohne weiteres mit der allgemeinen Zustandsgleichung etwa, Gl.(3-7),S.38, auch die unbekannte Dichte für den Totalzustand ϱ_1^* bestimmen.

b) p_o^* ; T_o^* ; ϱ_o^* bei $c_o = 0$:

Im verlustlosen, adiabaten Strömungsfall, also bei isentroper Strömung, bleiben Totaltemperatur und Totaldruck konstant; Gleiches gilt dann auch für die Dichte bzw. das spezifische Volumen (Gl.3-8).

c) Ma_1 : Aus Gl.(15-6),S.323,und Gl.(21-2) folgt:

$$Ma_1 = c_1/c_{s1} = c_1 / \sqrt{æ.R.T_1} \qquad (21\text{-}10).$$

d) Differentialgleichung von Hugoniot:

Die logarithmische Differentiation der Kontinuitätsgleichung, Gl.(11-16), lautet: $\ln\varrho + \ln A + \ln c = \ln \text{const}$; $d\varrho/\varrho + dA/A + dc/c = 0$;

Die Differentiation der Bernoulligleichung für den statonären, reibungsfreien und schwerelosen Fall ergibt nach Abschn.21.3.1 :

$$c\ .\ dc + dp/\varrho = 0 \ ;$$

Führt man das Quadrat der Schallgeschwindigkeit nach Gl.(3-1) :
$c_s^2 = dp/\,d\varrho$ ein,so folgt schließlich

$$dA\,/\,A = (dc\,/\,c)\cdot(Ma^2 - 1) \qquad (21\text{-}11).$$

Das ist die gesuchte Dgl. von Hugoniot.

e) Diskussion der Hugoniot-Gleichung:

In Bild 21-3 sind Diskussionsergebnisse tabellarisch erfaßt.

KANALVERENGUNG: $\frac{dA}{A} < 0$			ENGSTER QUERSCHN.: $\frac{dA}{A} = 0$			KANALERWEITERUNG: $\frac{dA}{A} > 0$		
$Ma = \frac{c}{c_s} < 1$	$Ma = 1$	$Ma > 1$	$Ma < 1$	$Ma = 1$	$Ma > 1$	$Ma < 1$	$Ma = 1$	$Ma > 1$
$Ma^2-1<0$	$Ma^2-1=0$	$Ma^2-1>0$	$Ma^2-1<0$	$Ma^2-1=0$	$Ma^2-1>0$	$Ma^2-1<0$	$Ma^2-1=0$	$Ma^2-1>0$
$\frac{dc}{c} > 0$	KEINE LÖSUNG	$\frac{dc}{c} < 0$	$\frac{dc}{c} = 0$	$\frac{dc}{c} \gtreqless 0$	$\frac{dc}{c} = 0$	$\frac{dc}{c} < 0$	KEINE LÖSUNG	$\frac{dc}{c} > 0$
UNTER-SCHALL-DÜSE		ÜBER-SCHALL-DIFFUSOR	PARALLELE UNTER-SCHALL-STRÖMG.	1)ÜBER-SCHALL-DÜSE 2)PARALLE-SCHALLG. 3)UNTERSCHALL-DIFFUSOR	PARALLELE ÜBER-SCHALL-STRÖMG.	UNTER-SCHALL-DIFFUSOR		ÜBER-SCHALL-DÜSE

BILD 21-3

Unterschalldüse: Bei abnehmendem Kanalquerschnitt und wachsender Geschwindigkeit wird nirgends die Schallgeschwindigkeit erreicht.
Überschalldiffusor: Bei abnehmendem Querschnitt und fallender Geschwindigkeit liegt in jedem Querschnitt noch Überschallgeschwindigkeit vor.
Parallele Unterschallströmung: Sie liegt vor,wenn der Strömungsquerschnitt konstant bleibt und die Strömungsgeschwindigkeit anfangs schon im Unterschallbereich gelegen ist.
Überschalldüse: Im engsten Querschnitt herrscht als Strömungsgeschwindigkeit gerade die lokale Schallgeschwindigkeit vor.Steigt wegen $p_3 < p_2$ die Geschwindigkeit bei zunehmendem Kanalquerschnitt,dann liegt die sogenannte LAVALdüse vor.
Parallele Schallgeschwindigkeit: Bleibt der engste Querschnitt,in dem hier Schallgeschwindigkeit vorliegt,weiterhin erhalten,und gilt $p_2 = p_3$, so erhält man eine Parallelströmung mit Schallgeschwindigkeit.

Unterschalldiffusor: Um ihn handelt es sich, wenn bei Querschnittszu- und Geschwindigkeitsabnahme höchstens am Eintritt Schallgeschwindigkeit festzustellen ist.

Parallele Überschallströmung ist dann zu erwähnen, wenn nach ihrer Erzeugung der Querschnitt gleichgroß bleibt und $p_2 = p_3$ gilt.

Wenn im engsten Querschnitt eines solchen Gerätes die Strömungsgeschwindigkeit gleich der diesem thermodynamischen Zustand zuzuschreibenden lokalen Schallgeschwindigkeit ist, so nennt man ihn den kritischen Zustand und spricht auch vom kritischen Querschnitt.

Wenn $c_2 = c_{s2kr}$ dann $A_2 = A_e = A_{kr}$ und $c_2 = c_{2kr}$;
ebenfalls $p_2 = p_{2kr}$; $T_2 = T_{2kr}$ und $\varrho_2 = \varrho_{2kr}$ (21-12).

f) c_{2kr} ; T_{2kr} ; p_{2kr} ; ϱ_{2kr} :

Aus der Bernoulligleichung, Gl.(21-3), folgt für die Strömungsgeschwindigkeit $c_{2kr} = c_{s2kr}$ (wegen Ma = 1 sind ja Strömungsgeschwindigkeit und lokale Schallgeschwindigkeit gleich) im kritischen Zustand, sofern man beachtet: $p_2 = p_{2kr}$ und $\varkappa \cdot p_{2kr}/\varrho_{2kr} = c^2_{s2kr}$
c_1 und $(p_1 ; \varrho_1)$ bilden zusammen den Totalzustand (p_1^* ; ϱ_1^*), $n = \varkappa$; isentrope und stationäre Strömung:

$$\frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot R \cdot T_1^* = \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot R \cdot T_{2kr} + c^2_{s2kr}/2 = \frac{c^2_{s2kr}}{\varkappa-1} + \frac{c^2_{s2kr}}{2} \; ;$$

$$c_{s2kr} = c_{2kr} = \sqrt{2 \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa+1} \cdot R \cdot T_1^*} \qquad (21\text{-}13).$$

Für T_1^* kann hier natürlich auch T_o^* gesetzt werden, wie es unter Pos. b) erwähnt worden ist.

Beachtet man $c_{s\,2kr} = \sqrt{\varkappa \cdot R \cdot T_{2kr}}$, Gl.(21-2), dann kann man sofort aus Gl.(21-13) nachweisen, daß gilt:

$$T_{2kr} = \left[2/(\varkappa+1)\right] \cdot T_1^* \qquad (21\text{-}14).$$

Setzt man die Quadrate der Gl.(21-5) und Gl.(21-13) einander gleich, dann folgt für das sogenannte kritische Druckverhaltnis bei $p_2 \rightarrow p_{2kr}$:

$$\frac{p_{2kr}}{p_1^*} = \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\varkappa/(\varkappa-1)} \qquad (21\text{-}15).$$

Mit den beiden thermischen Zustandsgrößen T_{2kr} und p_{2kr} ist über die Isentropengleichung, Gl. (3-16), auch die Dichte im kritischen Zustand bestimmbar geworden:

$$\varrho_{2kr} = \varrho_1^* \cdot \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{1/(\varkappa-1)} \qquad (21\text{-}16).$$

g) <u>den maximalen Massenstrom:</u>

Den Massenstrom berechne man zunächst für einen beliebigen Querschnitt, so daß man Gl. (11-17) anschreibt: $\dot{m} = \varrho \cdot c \cdot A$; setzt man hierin $\varrho = \varrho_1^* \cdot (p/p_1^*) \exp 1/\varkappa$ und c nach Gl. (21-5) ein, dann folgt:

$$\dot{m} = \sqrt{2 \cdot p_1^* \cdot \varrho_1^*} \cdot A \cdot \underbrace{\left[\frac{p}{p_1^*}\right]^{\frac{1}{\varkappa}} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{p}{p_1^*}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]}}_{\psi \,=\, f(p/p_1^*;\varkappa):\ \text{Ausflußfunktion}} \qquad (21\text{-}17)$$

Die nur vom Druckverhältnis p/p_1^* und dem Isentropenexponenten abhängige Ausflußfunktion kennt bei $(p/p_1^*) = 0$ und $(p/p_1^*) = 1$ zwei Nullstellen. Die Differentiation von ψ weist nach, daß beim kritischen Druckverhältnis

$$\frac{p}{p_1^*} = \left[\frac{2}{\varkappa+1}\right]^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = \frac{p_{2kr}}{p_1^*}$$

ein Maximum von ψ und damit auch vom Massenstrom vorliegt. Insofern erhält man nach Einsetzen in Gl. (21-17) bei $A = A_e$ (thermodynamischer Zustand, Geschwindigkeit und Querschnitt gehören zusammen) für den maximalen Massenstrom:

$$\dot{m}_{max} = \left[\frac{2}{\varkappa+1}\right]^{\frac{1}{\varkappa-1}} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa+1}} \cdot \sqrt{2 \cdot p_1^* \cdot \varrho_1^*} \cdot A_e \qquad (21\text{-}18).$$

Besitzt das strömende Gas in einem engsten Querschnitt den kritischen, thermodynamischen Zustand , dann liegt gleichzeitig ein kritischer Querschnitt vor, und der Massenstrom nimmt einen Maximalwert an.

Läge an einer Behälteröffnung ein kleinerer Druck an als p_{kr}, dann stellt sich in dem Austrittsquerschnitt der kritische Zustand ein bei

maximalem Massenstrom.Es ist nicht so,daß man ,was naheläge , durch einen möglichst geringen Gegendruck möglichst viel Masse aus dem Gefäß herausholen kann.Das erklärt sich damit,daß das Störsignal : "weitere Druckabsenkung" - " Nachlieferung erbeten" - in der Austrittsebene stehen bleibt,da es sich relativ zum mit Schallgeschwindigkeit strömenden Gas ja selbst nur mit Schallgeschwindigkeit ausbreiten kann: $\vec{c} = \vec{w} + \vec{v}$; $\vec{c} = -\vec{c}_s + \vec{c}_{Gas} = 0$.

h) Ma_1 ; Ma_2 ; Ma_3 :

Bekanntlich ist $Ma_2 = Ma_{2kr} = 1$.- Die Geschwindigkeit c_3 bestimme man mit Gl.(21-5) für $c_2 \rightarrow c_3$ und $p_2 \rightarrow p_3$! - Vergleichsweise läßt sich notieren:

$$Ma_1 < Ma_2 = Ma_{2kr} = 1 < Ma_3 \quad .$$

Unterschall — Schall — Überschall

i) c_3 bei Vorgeschwindigkeit c_1 :

Man greife auf die Bernoulligleichung,Gl.(21-3) zurück;es schreibt sich für eine isentrope und stationäre Strömung : $c_2 \rightarrow c_3$, $p_2 \rightarrow p_3$:

$$c_3^2 = 2.\frac{\varkappa}{\varkappa-1}.(\frac{p_1}{\varrho_1} - \frac{p_2}{\varrho_2}) + c_1^2 = 2.\frac{\varkappa}{\varkappa-1}.R.(T_1 - T_3) = 2.\frac{\varkappa}{\varkappa-1}.R.T_1.(1-\frac{T_2}{T_1});$$

beachtet man die Isentropengleichung nach Gl.(3-16): $T_2/T_1=(p_2/p_1)^{\varkappa/\varkappa-1}$, dann ergibt sich für die Austrittsgeschwindigkeit,sofern man nicht mit dem Totalzustand rechnen möchte,wie es eigentlich Gl.(21-5) nahelegt:

$$c_3 = \sqrt{2.\frac{\varkappa}{\varkappa-1}.R.T_1.\left[1 - (\frac{p_3}{p_1})^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right] + c_1^2} \qquad (21\text{-}19).$$

3.Beispiel

Man gibt eine Lavaldüse nach dem Muster von Bild 21-2 vor und vermerkt noch folgende Angaben: Es handle sich um eine stationäre,isentrope Luftströmung; $D_2 = D_e = 0{,}06$ m; $\varkappa = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg.K) ; $p_o^* = 5$ bar; $T_o^* = 500$ K; $p_3 = p_4 = 2$ bar .-Man ermittle:

a) den Berechtigungsnachweis für eine Lavaldüse;

b) die spezifische thermische Energie e_{thm}^* ;

c) die spezifische Totalenthalpie h_o^* ;

d) die spezifische totale,innere Energie u_o^* ;
e) die spezifische Druckenergie im Behälter $p_o^*.v_o^*$;
f) die Schallgeschwindigkeit für den Behälterzustand c_{so}^* ;
g) die kritischen,thermischen Zustandsgrößen p_{kr}, T_{kr} und ϱ_{kr} für den statischen Zustand;
h) die Strömungs- und die Schallgeschwindigkeit im kritischen Zustand c_{2kr} und c_{skr} ;
i) den maximalen Massenstrom $\dot{m}_{max}$ mittels der thermischen Einzelgrößen ;
j) den maximalen Massenstrom mittels einer geschlossenen Gleichung ;
k) den Düsenaustrittsquerschnitt A_3 und den Durchmesser D_3 ;
l) die Austritts-Machzahl Ma_3 ;
m) die statische Temperatur T_3 ;

Lösungen:

a) Nachweis für Berechtigung einer Lavaldüse:

Eine Lavaldüse ist dann angebracht,wenn der statische Düsenaustrittsdruck unterhalb des kritischen Druckes liegt.Den kritischen Druck berechnet man mit Gl.(21-15): Wegen der Isentropität ist $p_o^*=p_1^*$:

$$p_{2kr} = p_1^* \cdot \left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 5.10^5.\left(\frac{2}{\varkappa+1}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} \quad ; \quad p_{2kr} = 2,64 \text{ bar} \; ;$$

da $p_{2kr} > p_3$ ist,muß bei geordneter Expansion eine Lavaldüse verwendet werden.

b) e_{thm}^* : nach Gl.(20-7) folgt: $e_{thm}^* = R.T_o^* = 287.500 = 143,5 \; \frac{kJ}{kg}$.

c) h_o^* : ebenfalls nach Gl.(20-7) : $h_o^* = c_p.T_o^* = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}.R.T_o^*$;

$$h_o^* = \frac{1,4}{1,4-1}.287.500 = 502,25 \text{ kJ/kg} \; .$$

d) u_o^* : Gl.(20-7) und Gl.(3-12) führen zu: $u_o^* = c_v.T_o^* = (c_p-R).T_o^*$;

$$u_o^* = (1004,5-287).500 = 358,75 \text{ kJ/kg}.$$

e) $p_o^*.v_o^*$: Nach Gl.(20-1) oder Gl.(20-9) erhält man :

$$p_o^*.v_o^* = h_o^* - u_o^* = 502,25 - 358,75 = 143,5 \text{ kJ/kg} \; .$$

f) c^*_{so} : Gl.(21-2): $c^*_{so} = \sqrt{1{,}4.287.500} = 448{,}22$ m/s .

g) p_{kr} ; T_{kr} ; ϱ_{kr} :

Da nachweislich eine Lavaldüse vorliegt, ist der engste auch gleichzeitig der kritische Querschnitt.-Den kritischen Druck hat man bereits unter Pos. a) berechnet: $p_{2kr} = 2{,}64$ bar .

Gl.(21-14) liefert jetzt aber die statische, absolute, kritische Temperatur zu: Wegen der Isentropität ist $T^*_1 = T^*_o$:

$T_{2kr} = \dfrac{2}{\varkappa+1} \cdot T^*_1 = \dfrac{2}{1{,}4+1} \cdot 500 = 416{,}67$ K . - Am einfachsten kommt man neben Gl.(21-16) mit der allgemeinen Gasgleichung zum Ziel:

$$\varrho_{kr} = 2{,}64.10^5/(287.416{,}67) = 2{,}208 \text{ kg/m}^3 .$$

h) c_{2kr} und c_{skr} :

Nach Gl.(21-13) weiß man um ihre Gleichheit.-Es folgt danach:

$$c_{2kr} = \sqrt{2.\frac{\varkappa}{\varkappa+1}.R.T^*_1} = \sqrt{2.\frac{1{,}4}{1{,}4+1}.287.500} = 409{,}165 \text{ m/s} = c_{s2kr} .$$

i) $\dot{m}_{max}$: $\dot{m}_{max} = \varrho_{kr} \cdot c_{2kr} \cdot A_{kr} = 2{,}208.409{,}17.(\pi/4).0{,}06^2 = 2{,}555$ kg/s.

j) $\dot{m}_{max}$: Als geschlossene Gleichung bietet sich hierfür Gl.(21-18) an.

$$\dot{m}_{max} = \left[\frac{2}{1{,}4+1}\right]^{\frac{1}{1{,}4-1}} . \sqrt{\frac{1{,}4}{1{,}4+1}} . \sqrt{2.5.10^5.\frac{5.10^5}{287.500}} .(\pi/4).0{,}06^2 ;$$

$$\dot{m}_{max} = 2{,}555 \text{ kg/s} .$$

k) A_3 un D_3 :

Nachdem der Massenstrom festliegt, bietet sich mit $p^*_o \rightarrow p^*_1$ und $p \rightarrow p_3$ die Gl.(21-17) an :

$$2{,}555 = \sqrt{2.5.10^5.3{,}484} . \left(\frac{2.10^5}{5.10^5}\right)^{\frac{1}{1{,}4}} . \sqrt{3{,}5.\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{0{,}286}\right]} . A_3$$

$$A_3 = 0{,}00293 \text{ m}^2 ; \quad D_3 = 0{,}0611 \text{ m} .$$

l) Ma_3 : Die Austrittsgeschwindigkeit c_3 berechne man mit Gl.(21-5):

$$c_3 = \sqrt{2 \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa-1} \cdot R \cdot T_0^* \cdot \left\{1-\left[\frac{p_3}{p_0^*}\right]^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right\}} = \sqrt{2 \cdot \frac{1,4}{1,4-1} \cdot 287 \cdot 500 \cdot \left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1,4-1}{1,4}}\right]} ,$$

weil bei einer isentropen Strömung die Totalzustände 0* und 1* gleich sind.Das Ergebnis lautet: $\underline{c_3 = 481,22\ m/s}$.

Zur Ermittlung der Schallgeschwindigkeit c_{s3} benötigt man noch die absolute,statische Temperatur T_3 ,welche sich aus der Isentropengleichung nach Gl.(3-16) bestimmen läßt:

$$\underline{T_3} = T_0^* \cdot (p_3/p_0^*)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 500 \cdot (2/5)^{(1,4-1)/1,4} = \underline{384,73\ K.}$$ - Analog zu Gl.(21-10) folgt:

$$Ma_3 = c_3/\sqrt{\varkappa \cdot R \cdot T_3} = 481,22/\sqrt{1,4 \cdot 287 \cdot 384,73} \ ; \quad \underline{\underline{Ma_3 = 1,22}} \ .$$

m) $\underline{T_3}$: Bereits ermittelt zu $\underline{\underline{T_3 = 384,73\ K}}$.

4.Beispiel

Nach den jetzigen Erkenntnissen ist es interessant geworden,das erste Beispiel dieser Reihe nocheinmal aufzugreifen (Bild 21-1),dieses Mal aber mit dem absoluten,totalen Anfangsdruck von $p_1^* = 5$ bar . -Man bestimme:

a) das kritische und das angelegte Druckverhältnis;
b) den statischen Druck in der Austrittsebene;
c) eine Interpretation der Ausflußfunktion nach Darstellung von Bild 21-4.

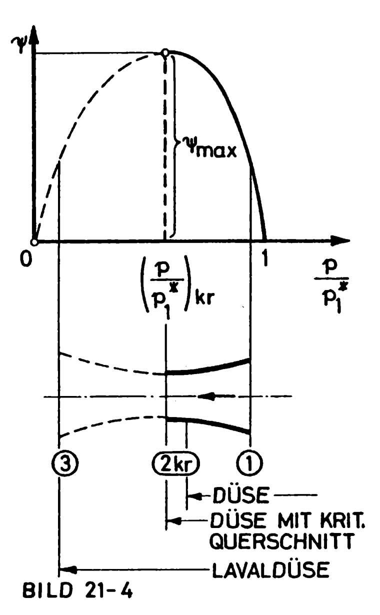


BILD 21-4

Lösungen:

a) $\underline{(p_2/p_1^*)_{kr} \text{ und } p_0/p_1^*}$:

Für das zu berechnende kritische Druckverhältnis bietet sich Gl.(21-15) an:

$$\underline{\underline{\frac{p_{2kr}}{p_1^*}}} = \left(\frac{2}{1,4+1}\right)^{\frac{1,4}{1,4-1}} = \underline{\underline{0,528}} \ .$$

Das angelegte Druckverhältnis beträgt $p_o/p_1^* = 1{,}015/5 = 0{,}203$; es ist kleiner als das kritische.

b) p_2 :

Der engste Querschnitt fungiert als kritischer Querschnitt mit dem kritischen Zustand.Der statische Druck in der Austrittsebene ist infolgedessen p_{2kr} und nicht p_o wie im ersten Beispiel,wo das angelegte Druckverhältnis $1{,}015/1{,}9 = 0{,}534$ größer ist als das kritische:

$$p_{2kr} = 0{,}528.5 \quad ; \quad \underline{\underline{p_{2kr} = 2{,}64 \text{ bar}}} \quad .$$

Verläßt der Strahl die düsenförmige Austrittsöffnung des Behälters, so zerplatzt der Strahl infolge einer ungeordneten,dissipativen Nachexpansion auf den Umgebungsdruck $p_o = 1{,}015$ bar !

c) Interpretation von Bild 21-4 :

Die Ausflußfunktion nach Gl.(21-17) ist für $\varkappa = 1{,}4$ qualitativ dargestellt.Auf S.390 ist bereits gesagt worden,daß sie zwei Nullstellen und ein Maximum besitzt;Analoges gilt natürlich für den Massenstrom. Geht man bei der Diskussion immer von einer Unterschallzuströmung 1 aus,so sind fünf Fälle erwähnenswert.

1.Fall

Das angelegte Druckverhältnis ist größer als das kritische.Der engste Querschnitt der konvergenten Düse zeigt keine kritischen Daten.Die Expansion geschieht bis zum Umgebungsdruck.

2.Fall

Das angelegte Druckverhältnis ist gleich dem kritischen.Der engste Querschnitt heißt jetzt auch kritischer Querschnitt.Die Expansion erfolgt bis zum Umgebungsdruck.

3.Fall

An die nur konvergente Düse wird nunmehr ein Druckverhältnis angelegt, das kleiner ist als das kritische.Der engste Querschnitt ist zwar ein kritischer Querschnitt,aber der Strahl zerplatzt infolge dissipativer Nachexpansion auf Umgebungsdruck.Der Massenstrom behält seinen maximalen Wert bei,gleichgültig,wie niedrig der Gegendruck ist.

4.Fall

Erst die Lavaldüse erlaubt eine geordnete Expansion auf Überschall bei maximalem Massenstrom,wenn der Austrittsdruck gleich dem Umgebungsdruck ist,was durch eine entsprechende Kanaldivergenz erreicht wird.

5.Fall

Ist die Kanalerweiterung ungenügend,dann stellt sich im Sinne der Aus-

flußfunktion ein Austrittsdruck p_3 ein, welcher noch über dem Umgebungsdruck liegt, so daß auch hier eine dissipative Nachexpansion auftritt.-Der divergente Verlauf der Lavaldüse ist deshalb erforderlich, weil nach dem kritischen Zustand das spezifische Volumen gas- und dampfförmiger Fluide stärker zunimmt als die Geschwindigkeit!

5.Beispiel

Es ist eine adiabate und irreversible Strömung durch eine Lavaldüse (Bild 21-2) zu untersuchen.-Angaben: Luft mit $c_p = 1004{,}5$ J/(kg.K); $\varkappa = 1{,}4$; $R = 287$ J/(kg.K); $c_1 = 50$ m/s; $T_1^* = 450$ K; $p_1^* = 12$ bar; $p_3 = 4$ bar; die Dissipationen werden durch den Geschwindigkeitsverlustbeiwert $\varphi = 0{,}9$ berücksichtigt:

$$\boxed{c_3 = \varphi \cdot c_{3s}} \qquad (21\text{-}20)\ ;$$

c_{3s} ist die isentrop erreichte Endgeschwindigkeit.-Die Strömungsvorgänge sind in einem qualitativen hs- und Ts-Diagramm festgehalten, Bild 21-5.-Man bestimme :

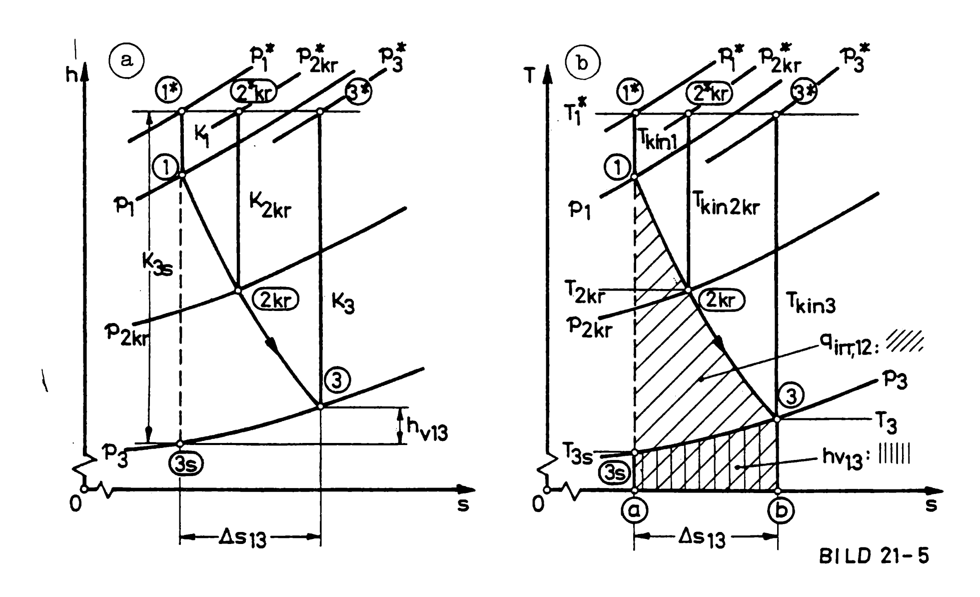


BILD 21-5

a) den Nachweis, daß die Totaltemperaturen längs der Düse konstant bleiben;
b) den statischen Zustand p_1 und T_1 ;
c) die reale Austrittsgeschwindigkeit c_3 und die massenspezifische

kinetische Energie K_3 ;

d) den Strömungsverlust

$$\boxed{h_v = K_{3s} - K_3} \qquad (21\text{-}21),$$

der als Manko an kinetischer Energie verstanden werden möge.

e) die reale, statische Endtemperatur T_3 ;

f) den Polytropenexponenten n ;

g) den realen Totaldruck am Ende p_3^* ;

h) für den realen kritischen Zustand p_{2kr} ; T_{2kr} ; K_{2kr} ; c_{2kr} ; p_{2kr}^* ;

i) die Entropiezunahme Δs

j) die Reibungswärme q_{irr}

k) den Vergleich zwischen Strömungsverlust und Reibungswärme.

Lösungen:

a) Nachweis für die Konstanz der Totaltemperaturen :

Die Differentiation der Bernoulligleichung nach Gl.(21-3) ergibt für den stationären Strömungsfall:

$$v.dp = - c.dc - dw_R \; .$$

Man ersetzte $v.dp$ mittels des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik, Gl.(20-14), und bekommt:

$$dh - dq_A - dq_{irr} = - c.dc - dw_R \quad ;$$

da ein adiabater Strömungsfall vorliegt, ist der Wärmeaustausch $dq_A=0$. Reibungswärme dq_{irr} und die Reibungsarbeit dw_R entsprechen einander, so daß auch sie verschwinden. Es bleibt: $dh + c.dc = 0$. Die Integration erbringt: $h_2 - h_1 = c_1^2/2 - c_2^2/2$.

Im Sinne des Kommentars zur Gl.(21-6), S.385, definiert man die Totalenthalpie:

$$\boxed{h_2 + c_2^2/2 = h_2^* = h_1 + c_1^2/2 = h_1^* = h^*} \qquad (21\text{-}22).$$

Man erkennt: Bei einer adiabaten Strömung, ob reversibel oder irreversibel, bleibt die Totalenthalpie konstant.-Das bedeutet für ein vollkommenes Gas, daß nach Division der Totalenthalpiewerte durch die konstante spezifische Wärme c_p ohne weiteres die Konstanz auch der Totaltemperaturen folgt:

$$\underline{\underline{T_1^* = T_2^* = T^*}} \; .$$

b) p_1 ; T_1 :

Gl.(21-7) : $T_1 = T_1^* - c_1^2/(2.c_p) = 450 - \dfrac{50^2}{2.1004,5}$; $\underline{\underline{T_1 = 448,76\ K}}$.

Gl.(3-16): $p_1 = p_1^*.(T_1/T_1^*)^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 12.10^5.(448,76/450)^{1,4/(1,4-1)}$ Pa;

$p_1 = 11,88$ bar .

c) c_3 und K_3 :

Gl.(21-20): $c_3 = \varphi . c_{3s}$; c_{3s} nach Gl.(21-5):

$$c_{3s} = \sqrt{2.\frac{1,4}{1,4-1}.287.450.\left[1-(4/12)^{0,286}\right]} \quad ; \quad c_{3s} = 493,72 \text{ m/s} .$$

$$c_3 = 0,9.493,72 \quad ; \quad c_3 = 444,35 \text{ m/s}.$$

Gl.(1-8) : $K_3 = c_3^2/2 = 444,35^2/2$; $K_3 = 98,722$ kJ/kg .

d) h_v :

Gl.(21-21) : $h_v = K_{3s} - K_3 = \frac{493,72^2}{2} - 98\,722$; $h_v = 23,156$ kJ/kg.

e) T_3 :

Gl.(21-7) : $T_3 = T_3^* - \frac{c_3^2}{2.c_p} = 450 - \frac{444,35^2}{2.1004,5}$; $T_3 = 351,72$ K .

f) n :

Setzt man eine quasi-statische Zustandsänderung voraus,so läßt sich die irreversible,adiabate Zustandsänderung durch einen Polytropenexponenten nach Gl.(3-16) beschreiben:

$$\frac{p_3}{p_1} = \left[\frac{T_3}{T_1}\right]^{\frac{n}{n-1}} \quad ; \quad \frac{n}{n-1}.\ln\frac{351,72}{448,76} = \ln\frac{4}{11,88} \quad ; \quad \frac{n}{n-1} = 4,4677 \quad ; \quad n = 1,288.$$

g) p_3^* :

Gl.(3-16) : $p_3^* = p_3.(T_3^*/T_3)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} = 4.10^5.(450/351,72)^{3,5}$; $p_3^* = 9,476$ bar.

h) p_{2kr}; T_{2kr}; K_{2kr}; c_{2kr}; p_{2kr}^* :

Gl.(21-15) : $p_{2kr} = 0,528.12.10^5$ Pa ; $p_{2kr} = 6,336$ bar .

Gl.(3-16) : $T_{2kr} = T_1.(p_{2kr}/p_1)^{(n-1)/n} = 448,76.(6,336/11,88)^{0,224}$ K;

$T_{2kr} = 389,82$ K .

Gl.(3-10) : $\Delta h = K_{2kr} = c_p.\Delta T = 1004,5.(450-389,82)$;

$K_{2kr} = 60,453$ kJ/kg.

Gl.(1-8) : $c_{2kr} = \sqrt{2.K_{2kr}} = \sqrt{2.60453}$; $\underline{\underline{c_{2kr} = 347,71\ m/s.}}$

Gl.(3-1) : $p^*_{2kr} = p_{2kr}.(T^*_{2kr}/T_{2kr})^{\frac{\varkappa}{\varkappa-1}} = 6,336.10^5.(450/389,82)^{3,5}$ Pa;

$\underline{\underline{p^*_{2kr} = 10,472\ bar.}}$

i) $\underline{\Delta s_{13}}$:

Nach S.381 gilt: $\Delta s_{irr,13} = c_v.\frac{n-\varkappa}{n-1}.\ln(T_3/T_1)$; $\underline{c_v = \frac{c_p}{\varkappa} = 717,5\ \frac{J}{kg.K}}$;

$$\Delta s_{irr,13} = 717,5.\frac{1,288-1,4}{1,288-1}.\ln 351,72/448,76\ ;$$

$$\underline{\underline{\Delta s_{irr,13} = 67,99\ J/(kg.K)}}\ .$$

j) $\underline{q_{irr}}$:

Nach S.380 gilt: $q_{irr} = c_v.\frac{n-\varkappa}{n-1}.(T_3 - T_1)$;

$q_{irr} = 717,5.\frac{1,288-1,4}{1,288-1}.(351,72-448,76)$; $\underline{\underline{q_{irr} = 27,077\ \frac{kJ}{kg}}}$.

k) Vergleich zwischen Strömungsverlust und Reibungswärme :

Überraschenderweise stellt man fest,daß bei adiabater und irreversibler Strömung der Strömungsverlust geringer ist als die Reibungswärme. Es fällt der sogenannte Wärmerückgewinn q_{RG} an:

$$\boxed{q_{irr} = h_v + q_{RG}} \qquad (21\text{-}23).$$

Da die Reibungswärme spontan und isobar dem Fluid zugeführt wird,liegt die Endenthalpie höher als bei isentroper Expansion.- Im Ts-Diagramm liegt die Reibungswärme als Fläche unterhalb der Zustandsänderungslinie 1-2kr-3 .-Der Strömungsverlust läßt sich auch mit $h_v = h_3 - h_{3s}$ ausdrücken.Versteht man unter der Enthalpie aufgrund ihrer Berechnungsart isobar zu- oder abgeführte Wärme,so stellt die Fläche unterhalb der Isobaren p_3 zwischen den Grenzen a und b den auftretenden Strömungsverlust dar. - Siehe auch Bild 21-5,Pos. a und b .

Es wird hier nochmals daraufhingewiesen,daß der sogenannte Strömungsverlust als Mangel an kinetischer Energie aufzufassen ist.h_v ist energetisch zwar im Fluid vorhanden,kann aber nicht umgeformt werden.

6.Beispiel

Durch eine Stahlrohrleitung ($D = 0{,}2$ m; $L = 500$ m; $k = 0{,}2$ mm) strömt Methan (CH_4; $R = 518{,}31$ J/(kg.K); $c_p = 2156$ J/(kg.K); $\varkappa = 1{,}317$; $\nu_1 = 0{,}5.10^{-6}$ m^2/s) mit folgenden Anfangsdaten: $T_1 = 300$ K; $p_1 = 25$ bar; $c_1 = 50$ m/s.-Man bestimme :

a) die Bernoulligleichung in entwickelter Form für eine isotherme Rohrströmung;

b) dafür die Austrittsgeschwindigkeit c_2 und den Druck p_2 sowie Ma_2;

c) die Bernoulligleichung in entwickelter Form für eine adiabate Rohrströmung;

d) dafür c_2 und p_2 ;zur Kontrolle Ma_2 .

Lösungen:

a) Isotherme Rohrströmung:

Diese Strömungsart liegt nahezu bei in der Erde verlegten Pipelines vor.-Die differenzierte Bernoulligleichung wird in der Form,wie sie auf S.397 erwähnt ist,hier übernommen:

$$v.dp = - c.dc - dw_R \quad . \qquad (1)$$

Differenzierte Form der Kontinuitätsgleichung,Gl.(11-17):

(Logarithmische Diff.) $0 = d\varrho/\varrho + dc/c + \cancel{dA/A}$; (2)

dA/A verschwindet bei einer Rohrströmung.

Differenzierte Form der Zustandsgleichung,Gl.(3-7):

(Logarithmische Diff.) $dT/T = dp/p - d\varrho/\varrho = dp/p + dv/v$ (3).

Setzt man (2) in (3) ein,dann folgt:

$$dT/T = dp/p + dc/c \quad . \qquad (4).$$

Wegen der isothermen Strömung ist $dT/T = 0$,so daß gilt:

$$dp/p = - dc/c \qquad (5).$$

Ersetzt man in (1) v durch $R.T_1/p$ und dp nach (5),dann folgt:

$$R.T_1.dc/c - c.dc = dw_R \qquad (6).$$

Für ein differentielles Rohrstück ergibt sich nach den Gl.(17-2) und Gl.(17-5) für die Reibungsarbeit:

$$dw_R = \lambda/(2.D) \;.\; dx \;.c^2 \qquad (7).$$

Setzt man jetzt (7) in (6) ein,dann erhält man eine Differentialgleichung:

$$R.T_1.\frac{dc}{c^3} - \frac{dc}{c} = \frac{\lambda}{2.D} \;.\; dx \quad .$$

Die Integration zwischen 1 und 2 ergibt:

$$R.T_1.\left[\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}\right] + \ln\left[\frac{c_1}{c_2}\right]^2 = \frac{\lambda}{D}.L \quad .$$

Erinnert man sich der Machzahl nach Gl.(15-6) und der Schallgeschwindigkeit nach Gl.(21-2), so erhält man mit $c_{s1}^2 = \varkappa.R.T_1$ und $Ma_1^2 = c_1^2/c_{s1}^2$:

$$\frac{1}{\varkappa.Ma_1^2}.\left[1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\right] + \ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = \lambda.\frac{L}{D} \quad (21\text{-}24).$$

Die Rohrreibungszahl bleibe aus Gründen der Vereinfachung konstant und werde mit den Daten für den Anfangszustand beschafft. Die obige Gleichung wird durch c_2-Variation näherungsweise ermittelt.

b) c_2 und p_2 ; zur Kontrolle Ma_2 :

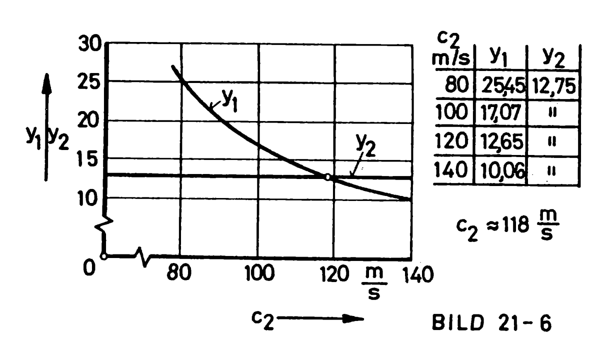
Zunächst werden einige Daten ermittelt, bevor das Näherungsverfahren beginnen kann.- $c_{s1} = \sqrt{1,317.518,31.300}$; $c_{s1} = 452,53$ m/s ;
$Ma_1 = c_1/c_{s1} = 50/452,53$; $Ma_1 = 0,11$.
Bestimmung von λ : Hierzu benötigt man die Re-Zahl: $Re = c_1.D/\nu_1$;
$Re = 50.0,2/(0,5.10^{-6}) = 2.10^7$; aus Bild 17-2 ist für die relative Rauhigkeit $k_s/D \approx k/D = 0,2/200 = 0,001$ damit die Rohrreibungszahl λ abzulesen: $\lambda = 0,02$. Setzt man nun alle Angaben in Gl.(21-24) ein, dann ergibt sich:

$$62,752 - 62,752.(50/c_2)^2 + \ln(50/c_2)^2 = 0,02.500/0,2 = 50$$

$$\underbrace{62,752.(50/c_2)^2 - \ln(50/c_2)^2}_{y_1 = f(c_2)} = \underbrace{12,752}_{y_2 = const} \quad ;$$

Die grafische Näherungslösung nach dem Intersektionsverfahren ist in Bild 21-6 angeboten. -Man wähle zunehmende c_2-Werte (siehe Tabelle) und berechne y_2 . Diese Funktion schneidet y_1 = const etwa bei einem Geschwindigkeitswert von

$c_2 = 118$ m/s .



c2 m/s	y1	y2
80	25,45	12,75
100	17,07	"
120	12,65	"
140	10,06	"

BILD 21-6

Daß die Geschwindigkeit zunehmen muß,beruht darauf: Infolge der Überwindung des Rohrreibungswiderstandes nimmt der statische Druck des Gases ab,das spezifische Volumen steigt,so daß wegen gleichbleibenden Querschnitts die Geschwindigkeit anwachsen muß.Der zur Beschleunigung erforderliche Druckunterschied bleibt bei dieser Näherung außer Betracht.

Den statischen Druck am Ende der Rohrleitung bekommt man mit Hilfe der Kontinuität und der Zustandsgleichung:

$$\varrho_1 \cdot c_1 \cdot A_1 = \varrho_2 \cdot c_2 \cdot A_2 \quad ;$$

$$\varrho_1 = \frac{p_1}{R.T_1} = \frac{25.10^5}{518{,}31.300} \quad ; \quad \underline{\underline{\varrho_1 = 16{,}078 \ \mathrm{kg/m^3}}} \quad ;$$

$$\varrho_2 = 50.16{,}078/118 \ ; \quad \underline{\underline{\varrho_2 = 6{,}813 \ \mathrm{kg/m^3}}} \quad ; \quad p_2 = \varrho_2.R.T_1 \quad ;$$

$$p_2 = 6{,}813.518{,}31.300 \ ; \quad \underline{\underline{p_2 = 10{,}593 \ \mathrm{bar}}} \ .$$

Man muß bei solchen Aufgaben die Austrittsmachzahl Ma_2 kontrollieren, weil sie nicht gegen den Wert eins anwachsen darf.Sonst entstünde ein ebener Verdichtungsstoß,der zusätzliche Dissipationen auslöst.Darüber wird in Abschn. 21.5.2 berichtet.

$$Ma_2 = c_2/c_{s2} = c_2/c_{s1} = 118/452{,}53 \ ; \quad \underline{\underline{Ma_2 = 0{,}26 < 1}} \quad !$$

c) Adiabate Rohrströmung :

Diese Strömungsart liegt bei isolierten Heißdampf- und Heißgasleitungen sowie bei Kaltdampfleitungen beispielsweise vor.
Von einer adiabaten Strömung,ob reversibel oder irreversibel,weiß man seit Gl.(21-22),daß die Totalenthalpie längs der Rohrleitung gleich groß bleibt.Die differentielle Form dieses Sachverhaltes lautet:

$$dh + c.dc = 0 \qquad (8) \quad ;$$

Weiterentwicklung von dh :

$dh = c_p.dT$; beachtet man (4),dann folgt: $dh = c_p.T.(dp/p + dc/c)$;
$dh = c_p.(T/p).dp + c_p.T.dc/c$; mit $p/\varrho = R.T$ und $c_p = \varkappa.R/(\varkappa -1)$
ergibt sich dann,wenn man mit $T = T^* - c^2/(2.c_p)$ die Totaltemp. einfügt:

$$(8): \quad \frac{\varkappa}{\varkappa -1} \cdot \frac{dp}{\varrho} + \frac{\varkappa}{\varkappa -1} .R.(T^* - c^2/(2.c_p)).dc/c + c.dc = 0 \ ;$$

mit (1) zusammen bekommt man jetzt unter Verwendung von (7):

$$-\frac{\varkappa +1}{2.\varkappa} .c.dc + R.T^*.dc/c = dw_R = \lambda \cdot \frac{c^2}{2.D}.dx$$

,was sich zur folgenden Differentialgleichung umformen läßt:

$$(R.T^* - \frac{\varkappa + 1}{2.\varkappa} . c^2). \frac{dc}{c^3} = \frac{\lambda}{2} . \frac{dx}{D} \quad ;$$

die Integration liefert:

$$R.T^*.(\frac{1}{c_1^2} - \frac{1}{c_2^2}) + \frac{\varkappa + 1}{\varkappa} .\ln(\frac{c_1}{c_2}) = \lambda . \frac{L}{D} \quad ;$$

in Anlehnung an den Aufbau der Gl.(21-24) klammert man links c_1^2 aus und führt die Machzahl für die Totaltemperatur $Ma_1^* = c_1/\sqrt{\varkappa .R.T^*}$ ein:

$$\boxed{\frac{1}{\varkappa . Ma_1^{*2}} . \left[1 - \left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2\right] + \frac{\varkappa+1}{2.\varkappa} .\ln\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 = \lambda . \frac{L}{D}} \quad (21\text{-}25).$$

Aus genannten Gründen rechne man auch hier mit gleichbleibender Rohrreibungszahl λ .Die Näherungslösung wird durch das Intersektionsverfahren wiederum erreicht.

d) c_2 und p_2 ; zur Kontrolle Ma_2 :

Datenbeschaffung:

Totaltemperatur nach Gl.(21-7) : $T_1^* = T_1 + \frac{c_1^2}{2.c_p} = T^*$;

$T^* = 300 + 50^2/(2.2156)$; $\underline{\underline{T^* = 300,58 \text{ K.}}}$

Schallgeschwindigkeit für den Totalzustand: $c_{s1}^* = \sqrt{1,317.518,31.300,58}$;

$\underline{\underline{c_{s1}^* = 452,97 \text{ m/s}}}$.

Anfangsmachzahl für den Totalzustand : $Ma_1^* = 50/452,97$; $\underline{\underline{Ma_1^* = 0,11.}}$

Bestimmung von λ : Wert kann sofort übernommen werden; $\underline{\underline{\lambda = 0,02.}}$

Datenverwertung in Gl.(21-25):

$$62,317 - 62,317.(50/c_2)^2 + 0,88.\ln(50/c_2)^2 = 50$$

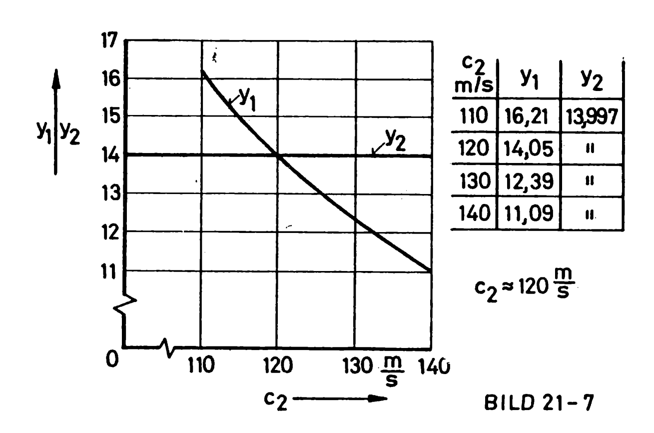
$$62,317.(50/c_2)^2 - 0,88.\ln(50/c_2)^2 = 12,317$$

$$\underbrace{70,815.(50/c_2)^2 - \ln(50/c_2)^2}_{y_1 = f(c_2)} = \underbrace{13,997}_{y_2 = const} \quad ;$$

Die grafische Näherungslösung ist in Bild 21-7 dargestellt. -

Die Näherungslösung ergibt $\underline{\underline{c_2 = 120 \text{ m/s}}}$.

Interessanterweise unterscheidet sich dieser Wert nur wenig von dem der isothermen Rohrströmung.



c_2 m/s	y_1	y_2
110	16,21	13,997
120	14,05	"
130	12,39	"
140	11,09	"

$c_2 \approx 120\ \frac{m}{s}$

BILD 21-7

Dichte am Ende:

$\varrho_1 . c_1 = \varrho_2 . c_2$;

$\varrho_2 = 50.16{,}078/120$

$\underline{\underline{\varrho_2 = 6{,}7\ kg/m^3}}$.

Bei der isothermen Strömung bleibt die statische Temperatur konstant,wogegen hier im Falle adiabater Strömung die Totaltemperatur unverändert bleibt.Deshalb erhält man die absolute,statische Endtemperatur über:

$T_2 = T^* - c_2^2/(2.c_p) = 300{,}58 - 120^2/(2.2156)$; $\underline{\underline{T_2 = 297{,}24\ K}}$.

Enddruck : $p_2 = \varrho_2 . R . T_2 = 6{,}7.518{,}31.297{,}24$;

$\underline{\underline{p_2 = 10{,}322\ bar}}$.

Die Machzahlkontrolle kann entfallen.

Bemerkung: Diese beiden Extremfälle der Strömung mit vollkommenem Wärmeaustausch (isotherme Strömung) und der Strömung bei vollkommener Wärmeisolierung (adiabate Strömung) stecken für die Praxis die Grenzen ab,zwischen denen die Realität der Zustandsgrößen technischer Rohrströmungen liegt.

21.4. Energieformel

21.4.1. Theorie

Die allgemeinste Energieformel,also die Energiebilanzgleichung mit Arbeitsaustausch,steht auf S.231 als Gl.(12-9).Bezüglich stationärer Strömungen im Erdschwerefeld lautet sie:

$$\frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} + \underbrace{2.\int_{1.2} \vec{\omega} x \vec{c} \,.\, d\vec{r}}_{= J} + \int_{1.2} v.dp + g.(z_2 - z_1) = 0 \ .$$

Im Turbinenfall stellt das Integral J die vom Fluid verrichtete Arbeit dar.Man hat darunter neben der Turbinenarbeit Y_i auch die Rei-

bungsarbeit w_{R12} zu verstehen, so daß gilt : $J = Y_i + w_{R12}$. Die Vorzeichen (hier +) sind derart gewählt, daß die abgegebenen Arbeiten das gleiche Vorzeichen tragen wie die Größen mit Index 2 , damit Y_i als positive Größe erhalten werden kann:

$$Y_i = -\int_{1.2} v.dp + \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + g.z_1 - g.z_2 - w_{R12} \qquad (21-26).$$

Wird das Integral durch den ersten Hauptsatz **der** Thermodynamik, Gl. 20-14, ersetzt, dann bekommt man zunächst:

$$Y_i = q_{A12} + q_{irr12} + h_1 - h_2 + \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} + g.z_1 - g.z_2 - w_{R12}$$

. Wiederum entsprechen sich Reibungswärme und Reibungsarbeit, so daß man unter Verwendung der Totalenthalpie, Gl. (21-4) und Gl. (21-22), schließlich notieren kann:

$$Y_i = h_1^* - h_2^* + g.(z_1 - z_2) + q_{A12} \qquad (21-27).$$

Da bei Gas- und Dampfturbinen Energie als Wärme aus dem System abfließt, q_{A12} also negativ würde, ist auf beste Isolation zu achten, solange das Fluid eine relativ hohe Temperatur besitzt. Die Energieumformung geschieht demnach adiabat. Verzichtet man, wie es bei Gas- und Dampfturbinen immer geschieht, auf das Schwereglied, dann nimmt die Energieformel die denkbar einfache Gestalt an:

$$Y_i = h_1^* - h_2^* \qquad (21-28).$$

Im Kompressorenfall stellt das Integral J die am Fluid verrichtete Arbeit dar. Man hat darunter neben der spezifischen Schaufel- oder Radarbeit $-Y_{th}$ (Minuszeichen wegen Arbeitszufuhr) auch die Reibungsarbeit w_{R12} zu verstehen, so daß gilt: $J = -Y_{th} + w_{R12}$. Die Vorzeichen sind so gewählt, daß die zugeführte Arbeit das gleiche Vorzeichen trägt wie die Größen mit Index 1 und die abgeführte Arbeit vorzeichenmäßig genauso bestückt ist wie die Größen mit Index 2 . Dadurch kann Y_{th} jetzt ebenfalls als positive Größe bei Zahlenrechnungen erhalten werden.

$$Y_{th} = \int_{1.2} v.dp + \frac{c_2^2}{2} - \frac{c_1^2}{2} + g.z_2 - g.z_1 + w_{R12} \qquad (21-29).$$

Die Umformung mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik liefert:

$$Y_{th} = h_2 - h_1 - q_{A12} - q_{irr12} + c_2^2/2 - c_1^2/2 + g.z_2 - g.z_1 + w_{R12}.$$

Nach Kompensation der Reibungsarbeit und Reibungswärme bleibt:

$$\boxed{Y_{th} = h_2^* - h_1^* + g.(z_2 - z_1) - q_{A12}} \qquad (21\text{-}30).$$

Man muß im Kompressorenfall natürlich darauf achten,damit zur Zielerreichung Y_{th} ,der Aufwand nämlich,möglichst klein wird.Wärmeabfuhr, d.h. Kühlung, ist angebracht.Wenn man bei einem Kompressor keine Kühler vorsieht,verständlicherweise auch auf den Schwereeinfluß verzichtet, dann ist auch hier die Energieformel denkbar einfach:

$$\boxed{Y_{th} = h_2^* - h_1^*} \qquad (21\text{-}31).$$

Der Verdichtungsvorgang verläuft in der thermischen Turbomaschine deshalb u.U. quasi-adiabat,weil sie vom Fluid relativ schnell durchströmt wird,so daß zum Wärmeaustausch wenig Zeit zur Verfügung steht.

21.4.2. Beispiel

Das Expansionsgeschehen einer Heißluftturbine ist in drei thermodynamischen Diagrammen des Bildes 21-8 verdeutlicht.Im h,s-Diagramm kann

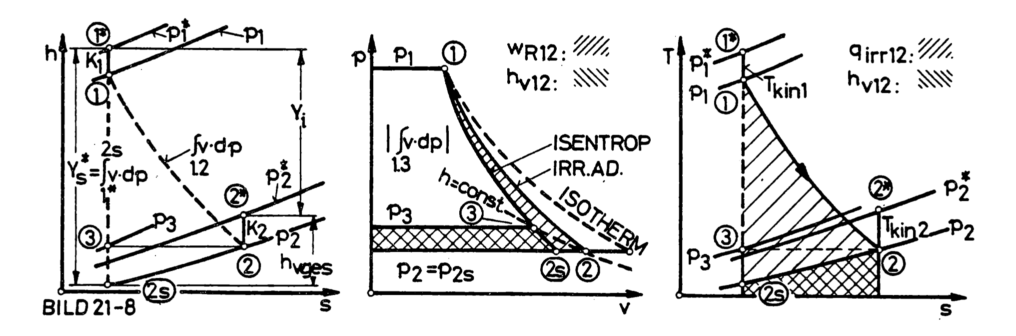


BILD 21-8

man u.a. kinetische Energie und isentrop berechenbare Arbeit sowie Strömungsverluste angeben.- Das p,v-Diagramm eignet sich besonders für die Darstellung jeglicher Art von Arbeit,also auch der polytropen Druckarbeit,wozu das h,s-Diagramm nicht in der Lage ist.- Im T,s-Diagramm lassen sich Reibungswärme (Reibungsarbeit) und Strömungsverlust (nicht abbaufähige,in mechanische Arbeit wandlungsunfähige Enthalpie-

differenz, und zwar in der vorgegebenen Maschine) flächenhaft veranschaulichen.-Angaben: Irreversibel adiabate Expansion; $T_1^* = 875$ K ; $p_1^* = 5$ bar; $p_2 = 1$ bar; $c_1 = 60$ m/s; $c_2 = 80$ m/s; $c_p = 1050$ J/(kg.K); $R = 300$ J/(kg.K); $\varkappa = 1,4$; innerer Wirkungsgrad $\eta_i = Y_i/Y_s^* = 0,8$.-

Man bestimme bei einer Berechnung von Flansch zu Flansch :

a) den statischen Anfangszustand durch T_1 und p_1 ;
b) das totale isentrope Gefälle Y_s^* sowie die massenstromspezifische, innere Turbinenleistung Y_i ;
c) die totale und die statische Austrittstemperatur T_2^* und T_2 ;
d) den Polytropenexponenten n ;
e) den gesamten Strömungsverlust $h_{v,ges} = h_{v12} + K_2$;
f) die Reibungswärme q_{irr12} ;
g) den Wärmerückgewinn q_{RG} ;
h) die Entropieänderung Δs_{12} .
i) die polytrope Druckarbeit $Y_{pol,12} = -\int_{1.2} v.dp$.

Lösungen:

a) T_1 und p_1 :

Gl.(21-7) : $T_1 = T_1^* - c_1^2/(2.c_p) = 875-60^2/(2.1050)$; $\underline{\underline{T_1 = 873,29 \text{ K.}}}$

Gl.(3-16) : $p_1 = p_1^*.(T_1/T_1^*)^{\varkappa/(\varkappa-1)} = 5.10^5.(873,29/875)^{1,4/0,4}$ Pa;

$\underline{\underline{p_1 = 4,9658 \text{ bar.}}}$

b) Y_s^* und Y_i :

Isentrope Arbeiten berechnet man bekanntlich mit (siehe auch die Ableitungen zu Gl.(21-3) und Gl.(21-5)):

$$\boxed{Y_s = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}.R.T_1.\left[1-(p_2/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa}\right]} \qquad (21\text{-}32).$$

Legt man die Grenzen hier zwischen 1* und 2s fest, dann folgt:

$$Y_s^* = \frac{1,4}{1,4-1}.300.875.\left[1-(1/5)^{0,4/1,4}\right] \text{ J/kg} ; \qquad \underline{\underline{Y_s^* = 338,93 \frac{\text{kJ}}{\text{kg}}}} .$$

$$Y_i = \eta_i.Y_s^* = 0,8.338,93 ; \qquad \underline{\underline{Y_i = 271,16 \text{ " .}}}$$

c) T_2^* und T_2 :

$\underline{h_2^*} = h_1^*-Y_i = c_p.T_1^* - Y_i = 1050.875-271160 = \underline{647,59 \text{ kJ/kg}}$;

Gl.(20-7): $T_2^* = h_2^*/c_p = 647590/1050$; $\underline{\underline{T_2^* = 616,75 \text{ K.}}}$

Gl.(21-7): $T_2 = 616,75 - 80^2/(2.1050)$; $\underline{\underline{T_2 = 613,70 \text{ K.}}}$

d) n :

Gl.(3-16): $1/5 = (613{,}7/873{,}29)^{n/(n-1)}$; $\ln 0{,}2 = \frac{n}{n-1} \cdot \ln 0{,}7027$;

$n/(n-1) = 0{,}5677$; $\underline{\underline{n = 1{,}2807}}$.

e) $h_{v,ges}$:

Gl.(3-10) : $\Delta h = c_p . \Delta T$; $Y_s^* = c_p . (T_1^* - T_{2s})$; $T_{2s} = 875 - \frac{338930}{1050}$ K;

$\underline{\underline{T_{2s} = 552{,}21 \text{ K}}}$.

Damit läßt sich der statische Strömungsverlust $h_{v12} = h_3 - h_{2s} = h_2 - h_{2s}$ ermitteln: $h_{v12} = c_p . (T_2 - T_{2s}) = 1050.(613{,}7-552{,}21) = \underline{64{,}565 \text{ kJ/kg}}$.

Die kinetische Austrittsenergie wird für den inneren Wirkungsgrad auch als Verlust gewertet (nicht abbaufähig !), so daß gilt:

$h_{v12} + K_2 = 64565 + 80^2/2$; $\underline{\underline{h_{v,ges} = 67{,}765 \text{ kJ/kg}}}$.

f) $q_{irr,12}$:

S.380 : $q_{irr,12} = c_v . \frac{n-\varkappa}{n-1} . (T_2 - T_1) = \frac{1050}{1{,}4} . \frac{1{,}2807-1{,}4}{1{,}2807-1} . (613{,}7-873{,}29)$;

$\underline{\underline{q_{irr,12} = 82{,}746 \text{ kJ/kg}}}$.

g) q_{RG} :

Gl.(21-23) : $q_{RG} = q_{irr,12} - h_{v12} = 82{,}746 - 64{,}565$;

$\underline{\underline{q_{RG} = 18{,}181 \text{ kJ/kg}}}$.

h) Δs_{12} :

S.381: $\Delta s_{12} = c_v . \frac{n-\varkappa}{n-1} . \ln(T_2/T_1) = \frac{1050}{1{,}4} . \frac{1{,}2807-1{,}4}{1{,}2807-1} . \ln \frac{613{,}70}{873{,}29}$;

$\underline{\underline{\Delta s_{12} = 112{,}445 \text{ J/(kg.K)}}}$.

i) die polytrope Druckarbeit $Y_{pol,12}$:

Entweder nach Gl.(21-26) oder nach Gl.(21-32) erhält man :

$\underline{\underline{Y_{pol,12} \approx 355 \text{ kJ/kg}}}$.

21.5. Impulssätze

21.5.1. Theorie

Da bei den Ableitungen zu den Impulssätzen auf den S.265 bis 270 keine isochoren Einschränkungen gemacht worden sind,behalten alle Ausführungen auch in der Gasdynamik ihre Gültigkeit.-Auch die Eulersche Hauptgleichung für Strömungsmaschinen,Gl.(19-18) u.a.,S.366/367,darf weiterhin verwendet werden:

Für Kompressoren gilt:	$Y_{th} = c_{2u} \cdot u_2 - c_{1u} \cdot u_1$;	Gl.(21-33).
für Turbinen gilt:	$Y_i = c_{1u} \cdot u_1 - c_{2u} \cdot u_2$	

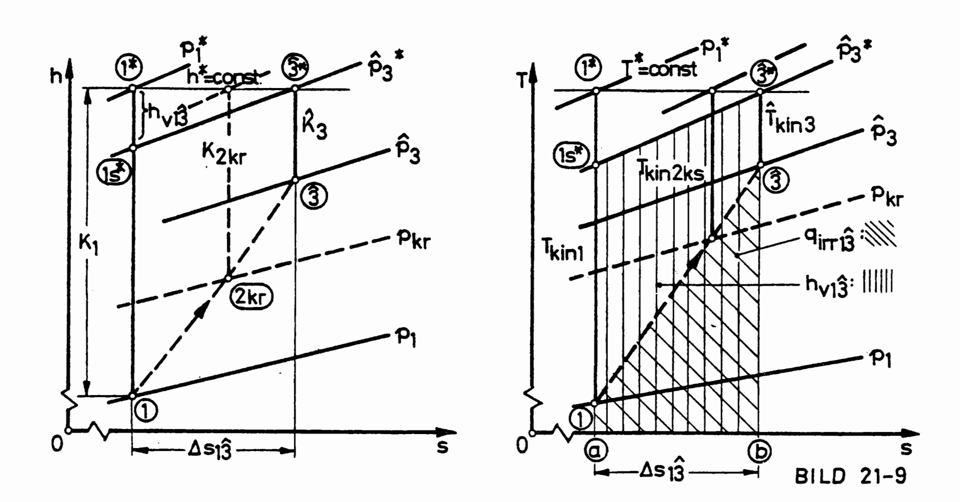
21.5.2. Beispiele

1.Beispiel

Wenn bisher die Rede gewesen ist von einer Verdichtungsströmung,dann ging man stillschweigend immer von einer stetigen Verdichtung aus.In Hochgeschwindigkeitsströmungen treten aber auch sprungartige Dichtevergrößerungen auf: Man spricht von Verdichtungsstößen.-In diesem Beispiel soll nur der senkrechte Verdichtungsstoß besprochen werden,wie er beispielsweise in einer Rohrströmung u.U. auftreten kann. Wenn in einer geraden Rohrströmung mit Überschallgeschwindigkeit die geringste Störung durch Wandrauhigkeit,Wandwelligkeit u.a. auftritt, dann entsteht eine Verdichtungsfront im Strömungsquerschnitt,die wenige Zehntausendstel Millimeter dick ist,in der aber die Dichte ϱ massiv ansteigt.-Man ermittle:

a) den Nachweis,daß der Verdichtungsstoß nur von Über- auf Unterschallströmung anzutreffen ist;
b) den statischen Zustand nach dem Stoß,wenn alle Daten vor dem Stoß als bekannt vorauszusetzen sind,und zwar für $\hat{T}_3$ und $\hat{p}_3$;
c) den Totalzustand nach dem Stoß für $\hat{T}_3^*$ und $\hat{p}_3^*$;
d) den Polytropenexponenten n für den Verdichtungsvorgang ;
e) spätestens bei $\hat{p}_3^* < p_1^*$ ist klar geworden,daß es sich beim Verdichtungsstoß um einen dissipativen Vorgang handelt;er läßt sich zwischen Anfangs- und Endzustand mittels eines Polytropenexponenten beschreiben;man bestimme nun die Entropievermehrung $\Delta s_{1\hat{3}}$;
f) die Rankine - Hugoniot - Kurve bzw. die dynamische Adiabate oder Stoßadiabate ;
g) die maximale Dichteänderung bei diesem unstetigen Verdichtungsvorgang.-Gasdynamische Zusammenhänge siehe Bild 21-9.

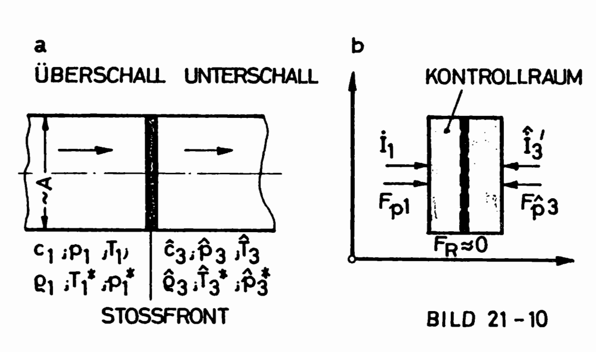
h) Zusammenhang zwischen Strömungsverlust und Reibungswärme.



Lösungen:

a) Nachweis für Überschall-/Unterschallströmung:

In Bild 21-10, Pos. a, sind die Zustandsgrößen vor und nach der Stoßfront lokalisiert worden. Die Indexführung ist in Anlehnung an Bild 21-2, die Lavaldüse, vorgenommen worden, weil der kritische Zustand "durchstoßen" wird.



Mit Hilfe des Impulssatzes wird nun das Kräftegleichgewicht an einem Kontrollraum untersucht, wie es Bild 21-10, Pos. b, angibt:

Gl. (12-25), S. 268: $\sum F_{ix} + \dot{I}_1 - \hat{\dot{I}}_3{}' = 0$:

$$+ p_1 . A + A . \varrho_1 . c_1^2 - A . \hat{p}_3 - A . \hat{\varrho}_3 . \hat{c}_3^2 = 0 \; .$$

$$\boxed{\hat{p}_3 - p_1 = \varrho_1 . c_1 . (c_1 - \hat{c}_3)} \qquad (21\text{-}34);$$

hierzu ist die Kontinuitätsgleichung $A . \varrho_1 . c_1 = A . \hat{\varrho}_3 . \hat{c}_3$ herangezogen worden. Ersetzt man in dieser Gleichung die Drücke über die allgemeine Gasgleichung: $\hat{p}_3 = \hat{\varrho}_3 . R . \hat{T}_3$ und $p_1 = \varrho_1 . R . T_1$, so folgt:

$c_1.(c_1 - \hat{c}_3) = R.(\hat{T}_3.\hat{\varrho}_3/\varrho_1 - T_1) = R.(T_3.c_1/c_3 - T_1)$,weil $\hat{\varrho}_3/\varrho_1 = c_1/\hat{c}_3$ ist !-Um eine Bestimmungsgleichung für $\hat{c}_3$ zu erhalten,die nur von Stoffgrößen und der Totaltemperatur abhängt,werden T_1 und $\hat{T}_3$ nach Gl.(21-7) ersetzt:

$$\hat{c}_3.c_1.(c_1 - \hat{c}_3) = R . (\hat{T}_3.c_1 - T_1.\hat{c}_3)$$

$$" \qquad = R.\left[c_1.(T^* - \hat{c}_3^2/(2.c_p)) - \hat{c}_3.(T^* - c_1^2/(2.c_p))\right].$$

Dies führt zu einer quadratischen Gleichung für $\hat{c}_3$ mit folgenden beiden Lösungen:

$$\hat{c}_3 = \frac{c_1}{2} + \frac{\varkappa}{\varkappa+1}.\frac{R.T^*}{c_1} \pm \left(\frac{c_1}{2} - \frac{\varkappa}{\varkappa+1}.\frac{R.T^*}{c_1}\right) \quad ;$$

die Triviallösung $\hat{c}_3 = c_1$ entfällt;die richtige Lösung lautet:

$$c_3 = 2.\frac{\varkappa}{\varkappa+1}.\frac{R.T^*}{c_1} \text{ oder: } \boxed{\hat{c}_3 . c_1 = 2.\frac{\varkappa}{\varkappa+1}.R.T^*} \qquad (21\text{-}35).$$

Auf diesen Zusammenhang hat Prandtl aufmerksam gemacht.-Die rechte Gleichungsseite entspricht gerade der kritischen Schallgeschwindigkeit c_{s2kr} nach Gl.(21-13) im Quadrat !-Wenn demnach das Produkt zweier Geschwindigkeiten gleich c^2_{2skr} ist und wenn wegen der Dichtezunahme $\hat{c}_3$ kleiner geworden sein muß,dann kann es sich bei c_1 nur um eine Überschallgeschwindigkeit handeln !

b) $\hat{T}_3$ und $\hat{p}_3$:

Wegen Gleichheit der Totaltemperaturen folgt sofort:

$$\boxed{\hat{T}_3 = T^* - \hat{c}_3^2/(2.c_p)} \qquad (21\text{-}36).$$

$\hat{p}_3$ ergibt sich aus Gl.(21-34).

c) $\hat{T}^*_3$ und p^*_3 : $\qquad \hat{T}^*_3 = T^*_1$.

Aus den Überlegungen im h,s-Diagramm beispielsweise ergeben sich einfache Hinweise über das weitere programmatische Vorgehen. -Gl.(3-16),

Bild 21-9 :

$$\boxed{\hat{p}^*_3 = \hat{p}_3 . (\hat{T}^*_3 / \hat{T}_3)^{\varkappa/(\varkappa-1)}} \qquad (21\text{-}37).$$

d) n :

Gl.(3-16): $\qquad \hat{T}_3/T_1 = (\hat{p}_3 / p_1)^{(n-1)/n}$;

$$n = \frac{\ln(\hat{p}_3 / p_1)}{\ln(\hat{p}_3 / p_1) - \ln(\hat{T}_3 / T_1)} \qquad (21\text{-}38).$$

e) $\Delta s_{1\hat{3}}$:

Nach S.381 gilt:

$$\Delta s_{1\hat{3}} = c_v \cdot \frac{n - \varkappa}{n - 1} \cdot \ln(\hat{T}_3 / T_1) \qquad (21\text{-}39).$$

f) Dynamische Adiabate:

Den Zusammenhang zwischen dem beim Verdichtungsstoß auftretendem Druck- und Dichteverhältnis nennt man dynamische Adiabate oder Stoßadiabate; ihre grafische Darstellung im pv Diagramm heißt Rankine-Hugoniot-Kurve.

g) $(\hat{\varrho}_3/\varrho_1)_{max}$:

Aus der Massenstromdichte erkannte man : $\hat{\varrho}_3 / \varrho_1 = c_1 / \hat{c}_3$.
Das Dichteverhältnis nimmt einen maximalen Wert an, wenn c_1 einem Maximum entspricht. Die maximal mögliche Geschwindigkeit erhält man aus Gl.(21-5), S.385, wenn man $p_2 \rightarrow 0$ gehen läßt:

$$c_{max} = \sqrt{2 \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot R \cdot T^*} = c_{1max} \qquad (21\text{-}40).$$

Diese Geschwindigkeit ist ebenfalls unter dem Namen Crocco-Geschwindigkeit bekannt.-Nun folgt:

$$\left(\frac{\hat{\varrho}_3}{\varrho_1}\right)_{max} = \frac{c_{1max}}{c_3} = \frac{c_{1max}}{c_{2skr}^2 / c_{1max}} = \frac{2 \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} \cdot R \cdot T^*}{2 \cdot \frac{\varkappa}{\varkappa + 1} \cdot R \cdot T^*} = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \; ;$$

$$(\hat{\varrho}_3 / \varrho_1)_{max} = \frac{\varkappa + 1}{\varkappa - 1} \qquad (21\text{-}41).$$

Für $\varkappa = 1{,}4$ ergibt sich:

$$(\hat{\varrho}_3/\varrho_1)_{max} = 6 \; .$$

h) $h_{v1\hat{3}}$ und $q_{irr1\hat{3}}$:

Als Strömungsverlust verstehe man im Verdichtungsfall den Mehraufwand an kinetischer Energie, um einen angestrebten Totaldruck zu er-

reichen. Strebt man effektiv $\hat{p}_3^*$ an, dann muß man um

$$h_{v13} = h_1^* - h_{1s}^* = c_p \cdot (T_1^* - T_{1s}^*) = c_p \cdot \left[T_1^* - T_1 \cdot (\hat{p}_3^*/p_1)^{(\varkappa-1)/\varkappa} \right] \quad (21\text{-}42)$$

mehr kinetische Anfangsenergie aufwenden.-Da $T_1^* = \hat{T}_3^*$ ist, läßt sich aus dem T,s-Diagramm des Bildes 21-9 ablesen, daß der Strömungsverlust um den Erhitzungsverlust größer ist als die Reibungswärme:

$$h_v = q_{irr} + f \quad (21\text{-}43).$$

Der Erhitzungsverlust f entspricht der Fläche $1s^* - \hat{3}^* - \hat{3} - 1 - 1s^*$. Er stellt sich deshalb ein, weil die Reibungswärme $q_{irr} = w_R$ spontan dem Fluid mitgeteilt wird: Wärmezufuhr ist aber bei quasi-isobarer Mitteilung der Verdichtung abträglich, weshalb nicht nur die Reibung, sondern auch die expansive Auswirkung der Zufuhr von Reibungswärme überwunden bzw. rückgängig gemacht werden muß.

Bemerkungen:

(1) Je größer die Anfangsmachzahl ist, desto höher liegen Totaldruckverluste.

(2) Der stetigen Dichtezunahme sind keine Grenzen gesetzt, wohl aber der stoßartigen.

(3) Schwache Störungen breiten sich in einem Fluid mit Schallgeschwindigkeit aus.-Stoßartige Druckzunahmen bezüglich der statischen Drücke, wie z.B. ebene Verdichtungsstöße und Detonationen, breiten sich mit Überschallgeschwindigkeit aus.

(4) Wenn der Umgebungsdruck p_4 bei einer Lavaldüse (Bild 21-2) größer ist als p_3 - das ist der statische Druck, der sich entsprechend der Düsenerweiterung einstellt, wenn im engsten Querschnitt kritische Verhältnisse vorliegen - , aber kleiner als derjenige Druck, welcher sich beim kritischen Venturibetrieb der Lavaldüse einstellt, dann kommt es in der Düsenerweiterung ebenfalls zu einem Verdichtungsstoß; der restliche Teil der Lavaldüse wird dann wie ein Diffusor im Unterschallbereich durchströmt.

2. Beispiel

In einem Rohr strömt Luft mit Überschallgeschwindigkeit. Mit Hilfe eines Pitotrohres soll der Totaldruck gemessen werden. Nach dem Drehen der Meßsonde um 180° läßt sich auch die Totaltemperatur näherungsweise messen.-Vor der relativ stumpfen Sonde entsteht ein ebener Verdichtungsstoß, der zur Wand hin abflacht. Durch eine Wandbohrung wird der stati-

sche Druck nach dem Stoß gemessen.-Angaben: $\varkappa = 1{,}4$; $c_p = 1004{,}5$ J/(kg.K); $R = 287$ J/(kg.K); $p_{Pitot} = 5{,}5$ bar; $\hat{T}_3^* = 520$ K; $\hat{p}_3 = 4{,}5$ bar.-Man ermittle:

a) den statischen Zustand nach dem Stoß mit $\hat{T}_3$ und $\hat{\varrho}_3$;

b) die Geschwindigkeiten nach und vor dem Stoß $\hat{c}_3$ und c_1 ;

c) den statischen Zustand vor dem Stoß mit T_1, ϱ_1 und p_1 ;

d) den Totaldruck vor dem Stoß p_1^* und den Totaldruckverlust Δp^* ;

e) die Machzahlen vor und nach dem Stoß Ma_1 und $\hat{Ma}_3$;

f) den Unterschied zwischen dynamischem und kinematischem Druck ;

g) den Polytropenexponenten n und die Entropiezunahme $\Delta s_{1\hat{3}}$;

h) die Crocco-Geschwindigkeit c_{max} ;

i) Strömungsverlust $h_{v1\hat{3}}$,die Dissipation $q_{irr,1\hat{3}}$ und den Erhitzungsverlust f .

Die Meßanordnung geht aus Bild 21-11 hervor,das thermodynamische Programm ist im Bild 21-9 vorgezeichnet. - Lösungen:

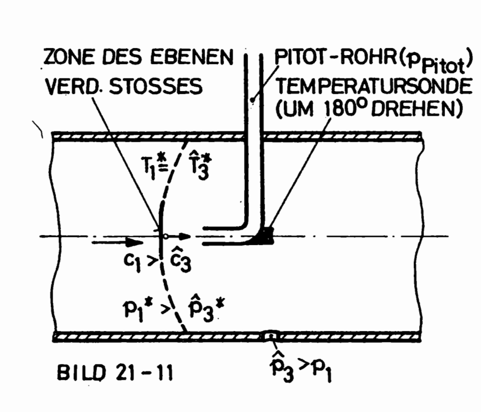


BILD 21-11

a) $\hat{T}_3$ und $\hat{\varrho}_3$:

Gl.(21-37):

$\hat{T}_3 = 520./(5{,}5/4{,}5)^{0,286} = 491$ K.

Gl.(3-7):

$\hat{\varrho}_3 = 4{,}5.10^5/(287.491) = 3{,}193$ kg/m^3.

b) c_1 und $\hat{c}_3$:

Gl.(21-7): $\hat{T}_{kin3} = 520-491 = 29$K;

$\hat{c}_3 = \sqrt{2.1004{,}5.29} = 241{,}37$ m/s.

Gl.(21-35):

$\hat{c}_3 = 2.1{,}4.287.520/(241{,}37.2{,}4)$

$\hat{c}_3 = 721{,}35$ m/s.

c) T_1, ϱ_1 und p_1 :

Gl.(21-8): $T_1 = 520-721{,}35^2/(2.1004{,}5) = 261$ K ; aus der Kontinuität folgt: $\varrho_1 = 3{,}193.241{,}37/721{,}35 = 1{,}068$ kg/m^3 ;Gl.(21-34): $p_1 = 4{,}5.10^5 - 1{,}068.721{,}35.(721{,}35-241{,}37) = 0{,}8$ bar .

d) p_1^* und Δp^* :

Gl.(3-16): $p_1^* = 0{,}8.10^5.(520/261)^{3,5} = 8{,}93$ bar .- $\Delta p^* = 8{,}93-5{,}5 = 3{,}43$bar.

e) Ma_1 und $\hat{Ma}_3$:

Gl.(21-10): $Ma_1 = 721{,}35/\sqrt{1{,}4.287.261} = 2{,}228$.

$\hat{Ma}_3 = 241{,}37/\sqrt{1{,}4.287.491} = 0{,}543$.

f) p_{dyn} und p_k : Siehe S.248 bis 250 !

Im Pitotrohr wird das Fluid von $\hat{c}_3$ bis auf null abgebremst.Dabei steigt die Dichte,so daß die Differenz aus Totaldruck- und statischer

Druckmessung ($p_{Pitot} = \hat{p}_3^*$) nicht gleich dem kinetischen Druck $\hat{p}_{k3} = \hat{\varrho}_3 . \hat{c}_3^2/2$ ist, sondern größer: $\hat{p}_{dyn,3} = \varepsilon . \hat{\varrho}_3 . \hat{c}_3^2/2$. Man ermittle jetzt den Korrekturfaktor ε :

In der Gleichung (21-19), S.391, setzt man für die Endgeschwindigkeit $c_3 = 0, p_1 \rightarrow \hat{p}_3$, $p_2 \rightarrow \hat{p}_3^*$ und $T_1 \rightarrow \hat{T}_3$ (neue Indexführung zwischen Anfangs- und Endzustand), so folgt:

$$\frac{\hat{\varrho}_3}{2} . \hat{c}_3^2 . \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} . \frac{1}{\left(\frac{\hat{p}_3^*}{\hat{p}_3}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} - 1} = \hat{p}_3 \quad ; \quad \hat{p}_{dyn3} = \hat{p}_3^* - \hat{p}_3 \; ;$$

$$\boxed{\hat{p}_{dyn3} = \left(\frac{\hat{p}_3^*}{\hat{p}_3} - 1\right) . \hat{p}_3 = \underbrace{\frac{\hat{\varrho}_3}{2} . \hat{c}_3^2}_{\hat{p}_{k3}} . \underbrace{\left[\frac{\varkappa-1}{\varkappa} . \frac{\hat{p}_3^* / \hat{p}_3 - 1}{(\hat{p}_3^* / \hat{p}_3)^{(\varkappa-1)/\varkappa} - 1}\right]}_{\varepsilon} \qquad \hat{p}_{dyn3} = \hat{p}_{k3} . \varepsilon} \quad (21\text{-}43).$$

In Zahlen:

$\hat{p}_{dyn3} = 5{,}5 - 4{,}5 = 1$ bar ; $\varepsilon = 1{,}0759$; $\hat{p}_{k3} = 1/1{,}0759 = 0{,}9294$ bar.

g) n und $\Delta s_{1\hat{3}}$:

Gl.(21-38): $n = 1{,}577$; Gl.(21-39): $\Delta s_{1\hat{3}} = 139{,}04$ J/(kg.K) .

h) c_{max} : Gl.(21-40) : $c_{max} = 1022{,}1$ m/s .

i) $h_{v1\hat{3}}$, $q_{irr,1\hat{3}}$ und f :

Gl.(21-42): $h_{v1\hat{3}} = 67{,}299$ kJ/kg ; S.380: $q_{irr,1\hat{3}} = 50{,}623$ kJ/kg ;

Gl.(21-43): $f = h_{v1\hat{3}} - q_{irr,1\hat{3}} = 16{,}676$ kJ/kg .

Bemerkungen:

(1) Gl.(21-43) gilt natürlich für alle Unterschallströmungen, so daß auf den Akzent ∧ und den Index 3 nicht mehr geachtet werden muß.

(2) Die Staupunktsströmung darf isentrop angenommen werden, weil die Abbremsung praktisch verlustlos verläuft und zum Wärmeaustausch keine Zeit vorhanden ist.

3. Beispiel

Die Beschleunigungsphase einer Rakete spiele sich im schwerelosen und reibungsfreien Raum ab.

Die Startmasse beträgt m_o ;der austretende konstante Massenstrom heißt $\dot{m}$;nach Brennschluß liegt nur noch die Masse m vor.Es soll bei einer relativen Gasaustrittsgeschwindigkeit $w = 4000$ m/s eine Fluggeschwindigkeit von $v = 11\,200$ m/s erreicht werden.-Man bestimme das Massensverhältnis m/m_o .

Lösung:

Nach Gl.(9-16) und Bild 21-12 ergibt sich das Kräftegleichgewicht an der freigemachten Rakete zu:

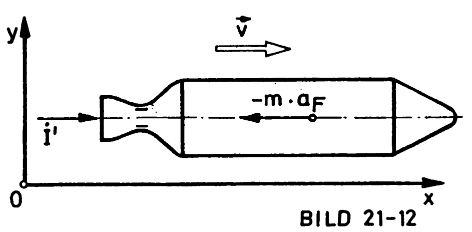


BILD 21-12

$$\sum F_{ix} - m.a_F = 0 \; ;$$

$$\dot{I}' - m.a_F = 0 = \dot{m}.w - m.\frac{dv}{dt} \; ;$$

die Momentanmasse lautet in Abhängigkeit von der Brennzeit: $m(t) = m_o - \dot{m}.t$.

Somit folgt:

$$dv = \frac{w\,.\,\dot{m}}{m_o - \dot{m}.t}.dt$$

. Die Integration liefert:

$$\boxed{v = w\,.\,\ln\frac{m_o}{m_o - \dot{m}.t} = w.\ln\frac{m_o}{m(t)}} \qquad (21\text{-}44).$$

Setzt man die Daten ein und löst die Gleichung nach dem Massenverhältnis auf,dann ergibt sich:

$$\underline{\underline{m/m_o = 0{,}0608}} \; .$$

Bemerkung:

Wegen dieses sehr ungünstigen Massenverhältnisses geht man zur Mehrstufenrakete über,so daß leere Tanks abgeworfen werden können.Damit entfällt die Beschleunigung unnützer Massen.

22. ZWEIDIMENSIONALE BEWEGUNG

22.1. Theorie

Unter einer zweidimensionalen Strömung versteht man eine ebene Strömung,wie sie auf S.199 beschrieben worden ist.-Es ist üblich,gasdynamische Strömungen durch ihre Machzahl zu kennzeichnen.Gewisse Ma-Bereiche tragen besondere Namen: $Ma < 1$: Unterschall- oder subsonischer Bereich; $Ma \approx 1$: schallnaher oder transsonischer Bereich; $1 < Ma < 5$: Überschall- oder supersonischer Bereich; $Ma > 5$: Hyperschall- oder hypersonischer Bereich.

Die Schallgeschwindigkeit ist auf S.9 als die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer "schwachen" (nicht explosiven) Störung in einem Medium eingeführt worden.-Die gasdynamische Berechnung erfolgt für eine isentrope Zustandsänderung bei der Druckwellenausbreitung mit c_s nach Gl. (21-2),S.382.

Geht man beispielsweise von einer punktförmigen Störquelle aus,die etwa periodisch das Fluid um sich herum stört,dann breiten sich die Störungen als kugelförmige Druckwellen aus mit der Störquelle als Kugelmittelpunkt.-Überlagert man nun eine ebene Transportströmung,so werden die kugeligen,induzierten Fluidbereiche weggespült.Wenn die Anströmung gar mit Überschallgeschwindigkeit vorgenommen wird,dann erhält man als Schnittformation das Bild 22-1 .Nach 2s befindet sich z.B. das Störzentrum in 0" (zurückgelegter Weg = 2.c).Die Druckwelle legte den Weg $2.c_s$ zurück.Die Kugelwellen werden vom sogenannten Machschen Kegel eingehüllt. Die Kegelerzeugende heißt Machsche Linie.Außerhalb des Kegels ist kein Einfluß der Störquelle zu spüren.Der halbe Öffnungswinkel des Machschen Kegels heißt Machscher Winkel α .Es gilt also:

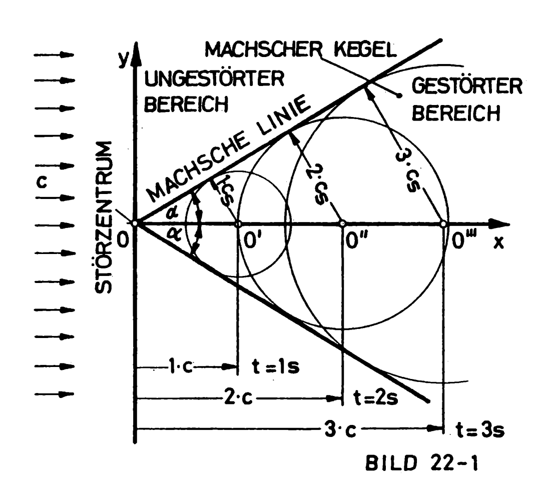


BILD 22-1

$$\boxed{\sin\alpha = 1/Ma = c_s/c} \qquad (22\text{-}1).$$

Man beachte,daß die Schallgeschwindigkeit senkrecht auf der Machschen Linie steht.Im übrigen entsteht das gleiche Strömungsbild,wenn ein spitzer Körper mit Überschallgeschwindigkeit sich durch ruhendes Fluid bewegt.-Im Grunde genommen,kann jeder Krümmungssprung im Oberflächenverlauf einer Körperoberfläche und damit jede Kante,jede besonders rauhe Stelle Ausgangspunkt zweier Machschen Linien sein,wobei eine wegen des vorhandenen Festkörpers nur virtuelle Bedeutung hat.-Bei der zweidimensionalen Strömung spricht man vom Machschen Keil.

22.2. Beispiele

1.Beispiel

Heißluft strömt unter dem Winkel $\beta = 40^o$ gegenüber der x-Achse des

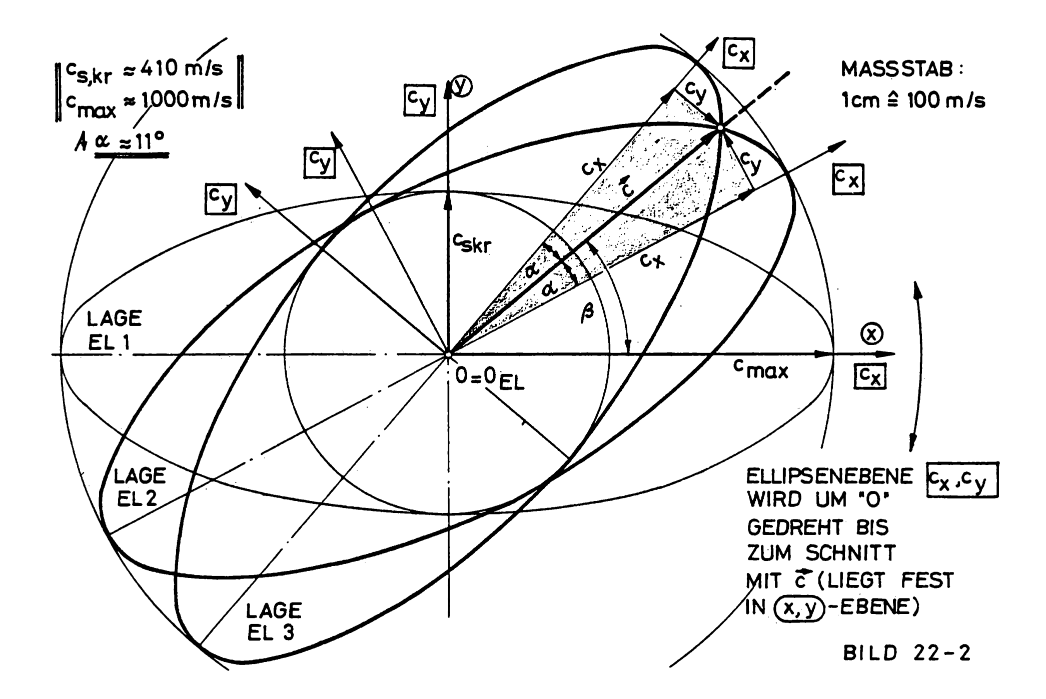


BILD 22-2

ruhenden x,y-Koordinatensystems.Bei ebener Strömung werden noch folgende Daten nachgereicht: $c = 920$ m/s ; $R = 287$ J/(kgK) ; $\varkappa = 1{,}4$; $c_p = 1004{,}5$ J/(kgK) ; $T^* = 500$ K .-Man ermittle:

a) die obere und untere Geschwindigkeitsgrenze bei Überschallströmung;
b) eine Beziehung zwischen Machschem Winkel,der kritischen Schallgeschwindigkeit,der Croccogeschwindigkeit und der Momentangeschwindigkeit;
c) eine grafische Darstellung obigen Zusammenhangs,so daß man für jede Geschwindigkeit zwischen den beiden Grenzgeschwindigkeiten den Machschen Winkel ablesen kann.-Grafische Darstellungen zu diesem Problem finden sich in Bild 22-2;
d) den Machschen Winkel bezüglich der Zahlenangaben,die Machzahl und die Schallgeschwindigkeit.

Lösungen:

a) Grenzgeschwindigkeiten bei Überschallströmung:

Wenn man sich des Geschehens in einer Lavaldüse erinnert,bes.S.389, dann wird klar,daß mit c_{skr} ,Gl.(21-13),die Strömung gerade anfängt, mit Schallgeschwindigkeit zu strömen:

$$c_{skr} = \sqrt{2 \cdot \frac{1{,}4}{1{,}4+1} \cdot 287 \cdot 500} \quad ; \quad c_{skr} = 409{,}2 \text{ m/s} \quad .$$

Die für den jeweiligen Gaszustand maximal mögliche Strömungsgeschwindigkeit ist nach Gl.(21-40) auch als Croccogeschwindigkeit bekannt:

$$c_{max} = \sqrt{2 \cdot \frac{1{,}4}{1{,}4-1} \cdot 287 \cdot 500} \quad ; \quad \underline{\underline{c_{max} = 1002{,}25 \text{ m/s}}} \quad .$$

Die gegebene Geschwindigkeit liegt also als Überschallgeschwindigkeit im berechneten Bereich.

b) $f(\text{Stoffgrößen}, c_{skr}, c_{max}, \alpha) = 0$:

Die lokale Schallgeschwindigkeit, Gl.(21-2), wird mittels der Isentropengleichung folgendermaßen umgeformt:

$$T = T^* \cdot (p/p^*)^{(\varkappa-1)/\varkappa} \text{ ,Gl.(21-9).} - \quad c_s^2 = c_s^{*2} \cdot (p/p^*)^{(\varkappa-1)/\varkappa} \qquad (1).$$

Hier ist die Schallgeschwindigkeit für den Totalzustand $c_s^{*2} = \varkappa \cdot R \cdot T^*$ eingeführt worden.

Damit folgt mit Gl.(21-13) für die kritische Schallgeschwindigkeit:

$$c_{skr}^2 = c_s^{*2} \cdot 2/(\varkappa+1) \qquad (2).$$

Formt man gar Gl.(21-5) unter Zuhilfenahme von Gl.(21-40) um, so folgt:

$$c^2 = c_{max}^2 \cdot \left[1 - (p/p^*)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \right] \qquad (3).$$

Setzt man nach dieser Beziehung $(p/p^*)^{(\varkappa-1)/\varkappa} = 1 - c^2/c_{max}^2$ in (1) ein und verwertet noch für c_s^{*2} die Beziehung (2), dann ergibt sich aus Gl.(22-1):

$$\boxed{\sin\alpha = \frac{c_{s,kr}}{c} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa+1}{2} \cdot \left(1 - c^2/c_{max}^2\right)}} \qquad (22\text{-}2).$$

c) Grafische Darstellung von Gl.(22-2):

Die Ringfläche zwischen dem Innenkreis mit Radius c_{skr} und dem Außenkreis mit Radius c_{max} (Bild 22-2) ist der Bereich, in dem sich eine Kurve befindet, die sowohl den Innenkreis als auch den Außenkreis anpeilt. Auf dieser Kurve werden die Pfeilspitzen des Vektors $\vec{c}$ liegen müssen, denn die Funktion nach Gl.(22-2) ist ja zu erfüllen. Es ist einzusehen, daß man als Funktionsdarstellung eine Ellipse erwartet. - In diesem Sinne wird obige Gleichung umgeformt. Damit bei der weiteren Betrachtung nur Geschwindigkeiten bzw. Geschwindigkeitskomponenten anwesend sind, wird $\sin\alpha$ durch die Annahme $\sin\alpha = c_y/c$ ersetzt.

Somit kann aus Gl.(22-2) folgendes nachgewiesen werden:

$$\frac{c_y^2}{c^2} = \frac{\varkappa + 1}{2} \cdot \frac{c_{s,kr}^2}{c^2} \cdot \left(1 - \frac{c_x^2 + c_y^2}{c_{max}^2}\right) \rightarrow \frac{c_y^2}{c_{s,kr}^2} \cdot \left[\frac{2}{\varkappa+1} + \frac{c_{s,kr}^2}{c_{max}^2}\right] = 1 - \frac{c_x^2}{c_{max}^2} \; ;$$

mit Gl.(21-13) und Gl.(21-40) folgt: $\frac{2}{\varkappa+1} + \frac{\varkappa-1}{\varkappa+1} = 1$ sowie:

$$\boxed{\frac{c_x^2}{c_{max}^2} + \frac{c_y^2}{c_{s,kr}^2} = 1} \qquad (22\text{-}3).$$

Das ist aber die vermutete Gleichung einer Ellipse.Unter der Annahme $\sin\alpha = c_y/c$ also liegt als geometrischer Ort für alle möglichen Geschwindigkeitsvektoren im Überschallbereich eine Ellipse vor.Man nennt sie auch Isentropenellipse,weil ihrer Ableitung isentrope Zustandsänderungen (siehe isentrope Schallgeschwindigkeit $c_s = \sqrt{\varkappa . R . T}$) zugrundeliegen.

Das Arbeiten mit der Isentropenellipse:

(1) Der Geschwindigkeitsvektor ist in der x,y-Koordinatenebene fest dem Betrage und der Richtung nach gegeben (Bild 22-2).

(2) Für das vorliegende Gas und den gegebenen Totalzustand der Strömung entwerfe man auf einem durchsichtigen Blatt die diesbezügliche Isentropenellipse,z.B. EL 1 .

(3) Man lege nun den Ellipsenmittelpunkt O_{EL} auf den Ursprung O, so daß die Anfangslage EL 1 heißen kann.Man spricht auch von der Hodografenebene;die Ellipse ist der Hodograf des anstehenden Problems.

(4) Nun drehe man die Ellipsenebene so lange,bis der Geschwindigkeitspfeil mit seiner Spitze auf der Ellipsenkontur liegt: Lage EL 2.

(5) Der Winkel zwischen $\vec{c}$ und der c_x-Achse ist der gesuchte Machsche Winkel.

(6) Da von einer punktförmigen Störung zwei Machsche Linien ausgehen (Machscher Keil),muß auchdas Hodografenverfahren zwei Lösungen anbieten können: Dreht man die Ellipse weiter : Lage EL 3 , so erhält man ohne weiteres die Lage der zweiten Machschen Linie.

d) α ; Ma ; c_s :

Der Ellipsendarstellung in Bild 22-2 entnimmt man einen Machschen Win-

kel von $\alpha \approx 11^\circ$.

Nach Gl.(22-1) kann man die gesuchte Machzahl berechnen,und zwar zu:

$Ma = 1/\sin\alpha = 1/\sin 11^\circ$; $Ma = 5{,}24$.

Über die Definitionsgleichung der Machzahl $Ma = c/c_s$ erhält man für die dazugehörende Schallgeschwindigkeit von:

$c_s = c/Ma = 920/5{,}24$; $c_s = 175{,}54$ m/s .

2.Beispiel

Eine wirbelfreie,ebene Heißluftströmung ($\varkappa = 1{,}4$; $R=287$ J/(kg.K); $c_p=1004{,}5$ J/(kg.K); $T_1 = 450$ K; $p_1 = 4$ bar ; $c_1 = 600$ m/s) verläuft längs der Wand AO, Bild 22-3. Die Wand erfährt einen Knick in O bei einem weiteren Wandverlauf OB. An der Störkante O entsteht eine Druckwellenstörfront in Form der Machschen Linie OD_1,wenn der Druck in Zone 2 kleiner ist als p_1. Man ermittle bei isentropem Strömungsgeschehen und einem Neigungswinkel der Wand von $\delta_2 = 60^\circ$:

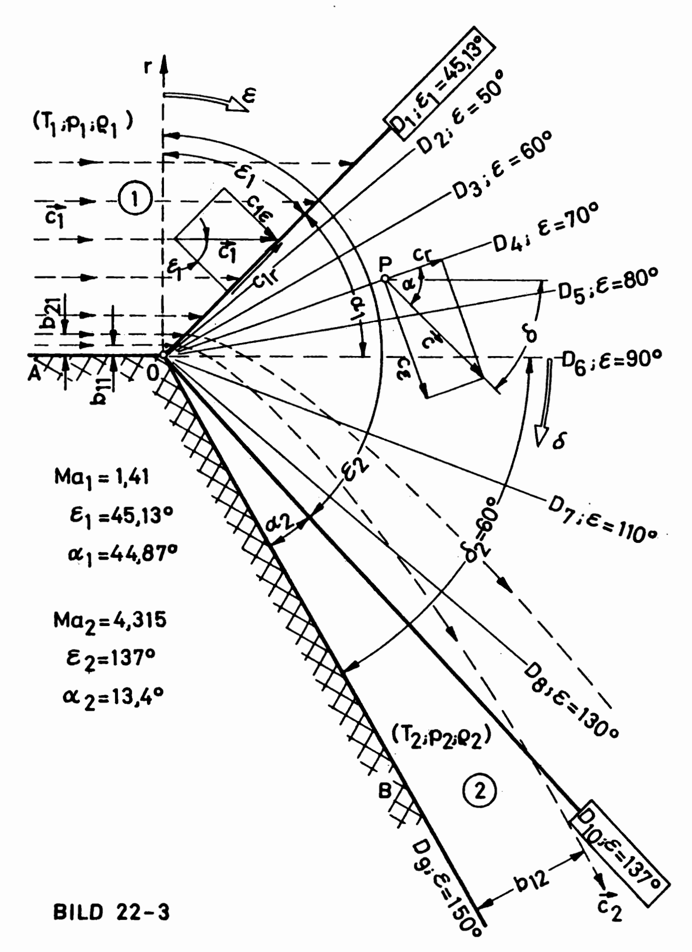


BILD 22-3

a) die Art des Strömungsvorganges;
b) die Machzahl am Anfang Ma_1 und den Machschen Winkel α_1 ;
c) die Strömungsgeschwindigkeit am Ende des Geschehens c_2 ;
d) den Machschen Winkel α_2 und die Machzahl Ma_2 ;
e) den statischen Zustand am Ende: T_2 , p_2 , ϱ_2 ;
f) den Stromlinienabstand b_{12} , b_{22} usw.;
g) den maximalen Umlenkwinkel δ_{2max} .

Lösungen:

a) Art des Strömungsvorganges:

Nimmt man den oberen Bildrand etwa als Kanalbegrenzung an,so liegt eine Kanalerweiterung vor.Da laut Voraussetzung $p_2 < p_1$ gilt und das Fluid mit Überschallgeschwindigkeit ankommt,liegt im Sinne der Lavaldüse eine Expansionsströmung vor,S.386ff.

b) Ma_1 und α_1 :

Schallgeschwindigkeit am Anfang:Gl.(21-2):$c_{s1}^2=1{,}4.287.450$; $c_{s1}=425{,}22\frac{m}{s}$;

Machzahl am Anfang:Gl.(21-10): $Ma_1 = 600/425{,}22$; $Ma_1 = 1{,}41$.

Machscher Winkel am Anfang:Gl.(22-1): $\sin\alpha_1=1/1{,}41$;$\alpha_1 = 45{,}13^o$.

c) c_2 :

Die Expansion beginnt rechts von der Anfangsmachlinie OD_1 und ist längs der Endmachlinie OD_{10} abgeschlossen.Von hier aus verlaufen die Stromlinien wieder parallel zur Wand OB,sofern der Gegendruck p_2 nicht zur Ablösung zwingt.-Zunächst trage man beliebig viele Machlinien OD ein,z.B.: OD_2 ,OD_3 bis OD_9 (man weiß ja noch nichts um die letzte Machlinie).Im beliebigen Punkt P auf z.B.OD_4 hat die lokale Geschwindigkeit eine Komponente c_r und eine senkrecht dazu c_ε ,die nach S.417 gleich der lokalen Schallgeschwindigkeit sein muß: $c_\varepsilon = c_s$. Führt man,was bei Wirbelfreiheit erlaubt ist,das Geschwindigkeitspotential $\varphi\,(r,\varepsilon)$ ein,dann folgt für die Geschwindigkeitskomponenten:

$$\boxed{\vec{c} = \operatorname{grad}\varphi \ ; \quad c_r = \partial\varphi/\partial r \ ; \quad c_\varepsilon = (1/r).\partial\varphi/\partial\varepsilon} \qquad (22\text{-}4).$$

Aus der Bernoulligleichung,Gl.(21-3),folgt bei Expansion ins Vakuum (p_2=0) und $c_2=c_{2max} = c_{max}$,Gl.(21-40),und isentroper,stationärer Strömung mit indexlosen Anfangssymbolen:

$$\frac{c_{max}^2}{2} = \frac{\varkappa}{\varkappa-1}.\frac{p}{\varrho}+\frac{c^2}{2} = \frac{c_s^2}{\varkappa-1}+\frac{c^2}{2} = \frac{c_\varepsilon^2}{\varkappa-1}+\frac{c_r^2+c_\varepsilon^2}{2}$$; somit folgt mit Gl. (22-4):

$$c_{max}^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \cdot c_\varepsilon^2 + c_r^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \cdot \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon}\right]^2 + \left[\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]^2 \qquad (1).$$

Es handelt sich um eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung und zweiten Grades. Als Integrationsverfahren verwende man die Trennung der Variablen. Die unbekannte Funktion $\varphi(r,\varepsilon)$ setze man als Produkt zweier Teilfunktionen an, die ihrerseits jeweils nur von einer Größe abhängen mögen: $\varphi(r,\varepsilon) = \varphi_1(r) \cdot \varphi_2(\varepsilon)$. -Man versuche, eine Lösung zu finden mit der einfachen Form von $\varphi_1(r) = r$!-Dann gilt: $\varphi(r,\varepsilon) = r \cdot \varphi_2(\varepsilon)$. Für die Geschwindigkeitskomponenten ergibt sich dann: $c_r = \partial\varphi/\partial r = \varphi_2(\varepsilon)$; $c_\varepsilon = (1/r) \cdot \partial\varphi/\partial\varepsilon = (1/r) \cdot \frac{\partial}{\partial\varepsilon}\left[r \cdot \varphi_2(\varepsilon)\right]$; man fasse zusammen:

$$c_r = \varphi_2(\varepsilon) \quad (2) \quad ; \quad c_\varepsilon = d\varphi_2/d\varepsilon \quad (3)$$

. Dadurch läßt sich die wichtige Beziehung angeben:

$$c_\varepsilon = dc_r/d\varepsilon \qquad (4) \quad ,$$

womit man durch Einsetzen in (1) zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung gelangt:

$$c_{max}^2 = \frac{\varkappa+1}{\varkappa-1} \cdot \left(\frac{dc_r}{d\varepsilon}\right)^2 + c_r^2$$

, eine Dgl. erster Ordnung und zweiten Grades. Ihre Integration verläuft einfach über:

$$d\varepsilon = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \cdot \frac{d(c_r/c_{max})}{\sqrt{1-(c_r/c_{max})^2}} \quad :$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \cdot \arcsin(c_r/c_{max}) + C \qquad (22\text{-}5).$$

Oder:

$$c_r = c_{max} \cdot \sin\left[\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \cdot (\varepsilon - C)\right] \quad \text{und} \quad c_\varepsilon = \frac{dc_r}{d\varepsilon}:$$

$$c_\varepsilon = c_{max} \cdot \sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \cdot \cos\left[\sqrt{\frac{\varkappa-1}{\varkappa+1}} \cdot (\varepsilon - C)\right] \qquad (22\text{-}6).$$

Zur Bestimmung der Integrationskonstanten benötigt man die Anfangswerte: Gl.(21-7): $T_1^* = 450 + 600^2/(2.1004,5)$; $T_1^* = 626,19$ K ;

Gl.(21-40): $c_{max} = \sqrt{2.3,5.287.629,19}$; $c_{max} = 1124,3$ m/s ;

$\varepsilon_1 = 90^\circ - \alpha_1 = 90^\circ - 45,13^\circ$; $\varepsilon_1 = 44,87^\circ$;

$c_{r1} = \sin\varepsilon_1 \cdot c_1 = \sin 44,87^\circ \cdot 600$; $c_{r1} = 423,3$ m/s .

Mit diesen Werten folgt für C aus Gl.(22-5) : $C = -0,1624$.

Der Winkel zwischen der Geschwindigkeit c und der Machschen Linie OD_4 ist der lokale Machsche Winkel. Dafür gilt:

$$\boxed{tg\alpha = c_\varepsilon / c_r} \qquad (22\text{-}7).$$

Die Neigung der Stromlinien ist:

$$\boxed{\delta^\circ = \varepsilon^\circ + \alpha^\circ - 90^\circ} \qquad (22\text{-}8).$$

Man ermittle nun mittels eines Näherungsverfahrens (z.B. Intersektionsverfahren, S.401 und 403) den Winkel ε derart, daß $\delta_2 = \delta = 60^\circ$ wird. Dieses Ziel wird erreicht mit:

$\varepsilon_2 \approx 137^\circ$ und $\alpha_2 \approx 13{,}4^\circ$. - Siehe Bild 22-3 !

Nun folgt für die Geschwindigkeitskomponenten von c_2 nach Gl.(22-6):

$c_{2r} = 1124{,}3.\sin\left[\sqrt{\frac{1{,}4-1}{1{,}4+1}}.(2{,}391 + 0{,}1624)\right]$; $\quad c_{2r} = 970{,}98$ m/s .

Gl.(22-7): $c_{2\varepsilon} = c_{2r} \cdot tg\,\alpha_2 = 970{,}98.tg13{,}4^\circ$; $\quad c_{2\varepsilon} = 231{,}32$ m/s .

Für die Endgeschwindigkeit ergibt sich nun:

$c_2 = \sqrt{c_{2r}^2 + c_{2\varepsilon}^2} = \sqrt{970{,}98^2 + 231{,}32^2}$; $\quad c_2 = 998{,}15$ m/s .

d) α_2 und Ma_2 :

Den Mach-Winkel α_2 kennt man bereits: $\quad \alpha_2 = 13{,}4^\circ$.

Die Machzahl lautet dann: $\sin\alpha_2 = 1:Ma_2$; $\quad Ma_2 = 4{,}315$.

e) T_2 ; p_2 ; ϱ_2 :

$c_{s2} = c_2 / Ma_2 = 998{,}15/4{,}315$; $\quad c_{s2} = 231{,}32$ m/s ;

$T_2 = c_{2s}^2 / (\varkappa . R) = 231{,}32^2/(1{,}4.287)$; $\quad T_2 = 133{,}17$ K .

$p_2 = p_1 . (T_2/T_1)^{\varkappa/(\varkappa-1)} = 4.10^5.(133{,}17/450)^{3,5}$; $\quad p_2 = 0{,}056$ bar .

$\varrho_2 = 0{,}056.10^5/(287.133{,}17)$; $\quad \varrho_2 = 0{,}1465$ kg/m³.

f) Stromlinienabstand b_{12} , b_{22} :

Bei einer ebenen Strömung gilt beispielsweise $b_{11}.c_1.\varrho_1 = b_{12}.c_2.\varrho_2$

Für $b_{11} = 2{,}5$ mm und $\varrho_1 = 4.10^5/(287.450) = 3{,}097$ kg/m³ folgt:

$b_{12} = 31{,}76$ mm usw.

g) δ_{2max} :

Wenn ε nach Gl.(22-5) mit $c_r = c_{max}$ einen Maximalwert annimmt,

dann wird auch δ maximal werden: $\varepsilon_{max} = \sqrt{\frac{\varkappa+1}{\varkappa-1}} \cdot \frac{\pi}{2} - 0{,}1624 = 3{,}6852$;

$\alpha_2 = 0$: $\varepsilon_{max} = 211{,}15^o$; $\delta_{max} = 121{,}15^o$.

Bemerkungen:

(1) In Gl.(22-6) fällt auf,daß die Strömungsgeschwindigkeit nicht vom Radius abhängt;sie ist also längs einer Machschen Linie überall gleich.Daraus läßt sich sofort folgern,daß alle übrigen Zustandsgrößen längs der Machlinie konstant sind.

(2) Ist die Kantenneigung größer als δ_{max} ,dann hebt die Strömung von der Wand ab.Zwischen Wand und Strömungsrand herrscht Vakuum.

(3) Die Stromlinien in der Expansionszone,also zwischen D_1OD_{1o} ,sind Epizykloiden,was sich aus der Zusammenfassung obiger Beziehungen nachweisen läßt.

(4) Aus didaktischen Gründen ist die Problemlösung immer wieder auf die grundsätzlichen Zusammenhänge zurückgeführt worden.

3.Beispiel

Luft ($\varkappa$ = 1,4;R = 287 J/(kg.K) ; T = 300 K) strömt mit der Geschwindigkeit c = 1000 m/s der Wand AO entlang und wird längs der Kante 0

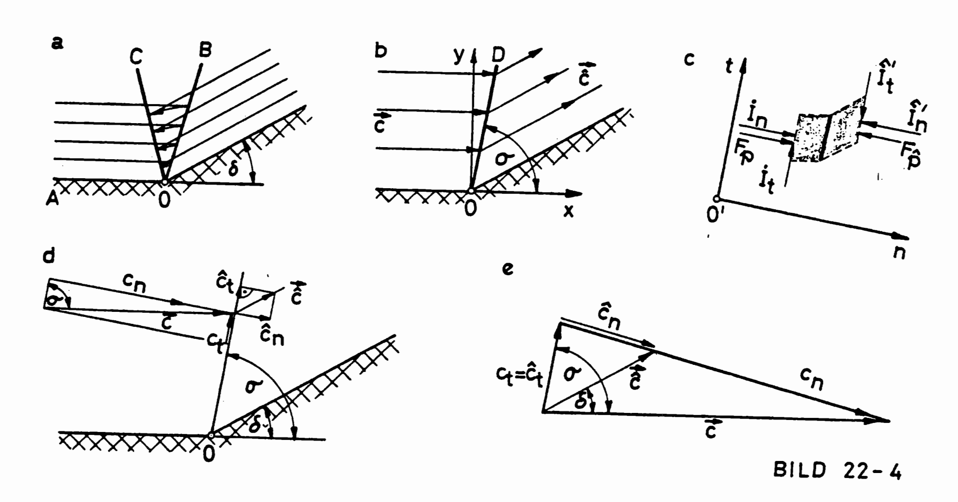


BILD 22-4

unstetig um $\delta = 30^o$ abgelenkt,Bild 22-4,Pos. a.-Man ermittle:

a) Nachweis,daß es sich um eine Überschallanströmung handelt und Ma ;

b) physikalische Kurzbeschreibung der Eckenströmung;

c) den Neigungswinkel der Stoßfront σ ;

d) die Geschwindigkeit nach dem schiefen Verdichtungsstoß $\hat{c}$;

e) die Machzahl nach dem Verdichtungsstoß $\hat{Ma}$;

Lösungen:

a) Nachweis der Überschallströmung und Ma :

Schallgeschwindigkeit nach Gl.(21-2): $c_s = \sqrt{1,4 . 287 . 300}$; $c_s = 347,19 \frac{m}{s}$.

Machzahl nach Gl.(21-10) : $Ma = 1000 / 347,19$; $Ma = 2,88$.

b) Beschreibung der Eckenströmung :

Die Überschallströmung wird durch die Kippkante 0 gestört;von hier aus vermutet man eine Machlinie OB ,wie sie in Bild 22-4 eingetragen ist.Die Strömung wird durch den konkaven Wandverlauf zwangsweise gedreht.Also käme die Machlinie OB in die neue Lage OC .Diese sich aus dieser Überlegung ergebende Doppellage ist natürlicherweise unmöglich: Der notwendige Drehvorgang der Strömungsfront bedeutet eine Verzögerung der ankommenden Strömung: Die Natur zieht sich durch einen Verdichtungsstoß aus der Affäre,Bild 22-4,Pos. b.Die Stoßfront OD wird schiefer Verdichtungsstoß genannt.Es stellt sich der Stoßfrontwinkel σ ein.

c) σ :

Aus der Stoßfront nehme man einen Kontrollraum heraus und untersuche das Kräftegleichgewicht.Das Koordinatensystem ist um $90^\circ - \sigma^\circ$ gedreht; die Achsen heißen t und n .Druckkräfte in t-Richtung heben sich gegenseitig auf.Die Impulsströme hierzu sind gegensinnig gleich,so daß gilt: $\dot{I}_t - \hat{\dot{I}}_t = \dot{m} . c_t - \dot{m} . \hat{c}_t = 0$; $c_t = \hat{c}_t$. - Ohne jetzt das Kräftegleichgewicht in n-Richtung weiterzuverfolgen,kann man in Bild 22-4,Pos. d,die Geschwindigkeitspläne vor und nach dem schiefen Verdichtungsstoß prinzipiell andeuten.Daraus kann man aber eine wichtige Erkenntnis gewinnen: Überlagert man der ankommenden Strömung eine Art Fahrzeuggeschwindigkeit mit $-\vec{c}_t$,dann liegen relativ zur schiefen Stoßfront nun Verhältnisse vor,wie man sie vom geraden Verdichtungsstoß her kennt.Damit sind die Zusammenhänge beim schiefen Verdichtungsstoß klargestellt worden,wenn man c durch c_n ersetzt.

Aus der Ineinanderzeichnung der beiden Geschwindigkeitsdreiecke (Bild 22-4,Pos. e) lassen sich folgende beiden trigonometrischen Beziehungen ablesen:

$$\cot\sigma = c_t/c_n \ ; \ \cot(\sigma - \delta) = \hat{c}_t / \hat{c}_n = c_t / \hat{c}_n \qquad (22\text{-}9).$$

Eliminiert man c_t ,dann bleibt nach[ ]:

$$\frac{\cot(\sigma - \delta)}{\cot\sigma} = c_n / \hat{c}_n \qquad (22\text{-}10).$$

Entsinnt man sich der Prandtlschen Stoßgleichung, Gl.(21-35):

$$c \,.\, \hat{c} = c_{kr}^2 \quad ,$$

was für den senkrechten Stoß gilt,so erhält man durch Umschreiben auf die Normalkomponenten der Geschwindigkeiten für den schiefen Verdichtungsstoß:

$$c_n \,.\, \hat{c}_n = c_{kr,n}^2 \qquad (22\text{-}11).$$

Neu an dieser Beziehung ist die kritische Geschwindigkeit für die Normalenverhältnisse $c_{kr,n}$ .Sie ist nämlich mit der Totaltemperatur

$$T_n^* = T + \frac{c_n^2}{2.c_p} \qquad (22\text{-}12)$$

zu berechnen.-Wenn man $c_n = \sin\sigma \,.\, c$ setzt,dann ergibt sich aus Gl.(22-10) mit Gl.(22-11):

$$\underbrace{\frac{\cot(\sigma - \delta)}{\cot\sigma}}_{y_1 = f(\sigma)} = \underbrace{\frac{c^2 \,.\, \sin^2\sigma}{2.\frac{\varkappa}{\varkappa + 1}.R.(T + \frac{c^2.\sin^2\sigma}{2.c_p})}}_{y_2 = f(\sigma)} \qquad (22\text{-}13).$$

Nach Einsetzen der Daten (Zusatzangabe c_p = 1004,5 J/(kg.K)) ist die Naherungslösung beispielsweise mit dem schon angedeuteten Intersektionsverfahren zu ermitteln. - Ein Näherungswert liegt vor bei

$$\underline{\underline{\sigma \approx 54^\circ}} \quad .$$

d) $\underline{\hat{c}}$:

$c_t = c \,.\, \cos\sigma = 1000.\cos 54^\circ$; $\underline{\underline{c_t = 587{,}79 \text{ m/s} = \hat{c}_t}}$;

$\hat{c} = \hat{c}_t / \cos(\sigma - \delta) = 587{,}79/\cos\,(54\text{-}30)^\circ$;

$$\underline{\underline{\hat{c} = 643{,}42 \text{ m/s}}} \ .$$

e) $\underline{\hat{Ma}}$:

Die statische Temperatur nach dem Stoß $\hat{T}$ kann man wegen der Gleichheit der Totaltemperaturen in Normalenrichtung aus Gl.(22-12):

$$T_n^* = \hat{T}_n^* = \hat{T} + \frac{\hat{c}_n^2}{2 \cdot c_p} \qquad \text{berechnen:}$$

$$\hat{T} = 300 + \frac{(1000.\sin 54^o)^2}{2 \cdot 1004{,}5} - \frac{(587{,}79/\cot(54-30)^o)^2}{2 \cdot 1004{,}5} \quad ;$$

somit erhält man für die statische,absolute Temperatur nach dem Stoß:

$$\underline{\underline{\hat{T} = 591{,}7\ K}} \quad .$$

Daraus folgt die Schallgeschwindigkeit nach dem Stoß zu:

$$\hat{c}_s = \sqrt{1{,}4.287.591{,}7} \quad ; \qquad \underline{\underline{\hat{c}_s = 494{,}51\ m/s}} \quad .$$

Als Mach-Zahl nach dem schiefen Verdichtungsstoß stellt sich ein:

$$\hat{Ma} = \hat{c} / \hat{c}_s = 643{,}42 / 494{,}51 \quad ;$$

$$\underline{\underline{\hat{Ma} = 1{,}3}} \quad .$$

<u>Bemerkungen</u>:

(1) Man stellt fest,daß durch schiefe Verdichtungsstöße nicht unbedingt Unterschallgeschwindigkeit erreicht wird.-Von einem bestimmten Grenzwert an allerdings wird dieses Ziel erreicht.

(2) Die Dissipationen in einem schiefen Verdichtungsstoß sind geringer als in einem senkrechten Verdichtungsstoß.Deshalb vermeidet man stumpfe Flugkörper und führt sie spitz und scharfkantig aus,damit möglichst nur schiefe und schwache senkrechte Verdichtungsstöße entstehen.

(3) Arbeitet man bei zweidimensionalen Strömungen mit dem Machschen Keil,so ist bei dreidimensionalen Strömungen der Machsche Kegel von Interesse.-Eine besondere Theorie konischer Strömungen geht auf Busemann zurück.

L I T E R A T U R V E R Z E I C H N I S

Es kann sich hier nur um eine unvollkommene Auflistung handeln.Die Veröffentlichungen sind in vier Gruppen eingeteilt.

Vorwiegend mathematische Werke

[1] ALBRING,W. : Angewandte Strömungslehre,2.Auflage.Verlag Th. Steinkopf,Dresden und Leipzig,1962.

[2] GREINER,W.,und H.STOCK : Theoretische Physik,Band 2A : Hydrodynamik.Verlag Harri Deutsch.Thun und Frankfurt a.M.,1978.

[3] KAUFMANN,W. : Technische Hydro- und Aeromechanik,2.Auflage. Springer,Berlin/Göttingen/Heidelberg,1958.

[4] MILNE-THOMSON,L.M. : Theoretical Hydrodynamics.Mac Millan,London,1949.

[5] OSWATITSCH,K. : Gasdynamik.Springer,Wien,1952.

[6] SAUER,R. : Einführung in die theoretische Gasdynamik.Springer, Berlin/Göttingen/Heidelberg,1960.

Physikalische Werke

[7] BAEHR,H.D. : Thermodynamik,2.Auflage.Springer,Berlin/Heidelberg/New York,1966.

[8] PRANDTL,L.,OSWATITSCH,K. und K.WIEGHARDT : Führer durch die Strömungslehre,7.Auflage.Vieweg,Braunschweig,1969.(Mit ausführlichem Literaturverzeichnis).

[9] WALLOT,J. : Größengleichungen,Einheiten und Dimensionen.Johann Ambrosius Barth-Verlag,Leipzig,1953.

Technische Werke

[10] BOHL,W. : Technische Strömungslehre,1.Auflage.Vogel,Würzburg,1971.

[11] DUBBEL,Bd. I : Taschenbuch für den Maschinenbau,13.Auflage. Springer,Berlin/Heidelberg/New York,1970.

[12] ECK,B. : Technische Strömungslehre,7.Auflage.Springer,Berlin/Heidelberg/New York,1966.

[13] JOGWICH,A. : Strömungslehre.Girardet,Essen,1975.

[14] NAUE,G. : Technische Strömungsmechanik.VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie,Leipzig,1975.

[15] RICHTER,H. : Rohrhydraulik,5.Auflage.Springer,Berlin/Heidelberg/New York,1971.

[16] RÖDEL,H. : Hydromechanik,7.Auflage.Verlag Carl Hanser,München/ Wien,1974.

[17] TRUCKENBRODT,E. : Strömungsmechanik.Springer,Berlin/Heidelberg/ New York,1968.

Pädagogische Werke,Beispiel- und Aufgabensammlungen

[18] BECKER,E. und E.PILTZ : Übungen zur Technischen Strömungslehre. Teubner,Stuttgart,1971.

[19] BÖSWIRTH,L. und O.SCHÜLLER : Beispiele und Aufgaben zur Technischen Strömungslehre.Vieweg,Braunschweig/Wiesbaden,1978.

[20] FEDERHOFER,K. : Aufgaben aus der Hydromechanik.Springer,Wien, 1954.

[21] GILES,R.V. : Strömungslehre und Hydraulik (Theorie und Anwendung).Mc Graw-Hill,Düsseldorf,1976.

[22] KALIDE,W. : Einführung in die Technische Strömungslehre.Verlag Carl Hanser,München,1965.

[23] KALIDE,W. : Aufgabensammlung zur Technischen Strömungslehre. Verlag Carl Hanser,München,1967.

[24] OSWATITSCH,K. und R.SCHWARZENBERGER : Übungen zur Gasdynamik. Springer,Berlin 1960.

[25] RITTER,R. : Vorlesungsmanuskript der Technischen Strömungslehre an der Fachhochschule des Saarlandes,1978.

[26] SCHRIEDER,E. : Mechanik-Aufgaben,Bd. V,Strömungslehre (Lehr- und Aufgabenbuch).Schroedel,Hannover,1961.

[27] TASCA,D. : Cours de Mécanique des Fluides.Univ. d'Alger,Ed. ENPA,Algier,1973.

[28] TASCA,D. : Mesures en mécanique des fluides,cycle de conférences pour les doctorands.Univ. d'Alger,Ed.ENPA,Algier,1973.

[29] TASCA,D. und I.BACANU : Aufgabensammlung der technischen Hydraulik (rumänisch),2.Auflage.Technischer Verlag,Bukarest,1966.

A

B



